بسم الله الرحمن الرحيم

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

تحقیق در مورد معادلات انتگرال - دیفرانسیل سهموی با یک شرط مرزی انتگرالی

نگارش:

الهه خرم

استاد راهنما:

دکتر ابوالفضل تاری مرزآباد

استاد مشاور:

دکتر سید حجت اله مومنی ماسوله

دی ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم،

همسرم به صمیمیت باران و

دخترم به طراوت شبنم

قدردانی

سپاس و ستایش خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان.

و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

وظیفه خویش می دانم که از زحمات بی دریغ استاد گرانقدر جناب آقای دکتر ابوالفضل تاری که با راهنمایی های ایشان توانستم این پایان نامه را به اتمام برسانم، تشکر کنم. همچنین از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر سید حجت اله مومنی به خاطر مشاوره و راهنمایی های ارزشمند ایشان صمیمانه سپاسگزارم.

از خانواده ی عزیزم که راهنمایی هایشان همواره روشنی بخش راه زندگیم بوده است کمال تشکر و قدردانی را دارم و از خداوند متعال برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و توفیق دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه معادلات انتگرال-دیفرانسیل سهموی با یک شرط مرزی انتگرالی را بررسی می‌کنیم. در اینجا با استفاده از روش راث، وجود، یکتایی و وابستگی پیوسته جواب به داده‌ها را در معادله ذکر شده اثبات می‌کنیم.

سپس معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای جزئی خطی را با شرایط اضافی مطالعه می‌کنیم و با روش تاو عملیاتی با پایه استاندارد را برای بدست آوردن جواب عددی این نوع معادلات تعمیم می‌دهیم.

ما همچنین روش تاو عملیاتی را برای یک دسته از معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی با یک شرط مرزی انتگرالی تعمیم می‌دهیم.

در نهایت برای نشان دادن دقت روش، چند مثال عددی با استفاده از روش ارائه شده حل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، معادلات انتگرال-دیفرانسیل سهموی، شرایط انتگرالی، روش تاو.

فهرست مطالب

لیست جداول

پیشگفتار

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد، معادلات انتگرال است. معادلات انتگرال در خیلی از مباحث فیزیک، زیست شناسی، شیمی و مهندسی ظاهر می‌شوند. مراجع [۳، ۴] منابع خوبی برای پی بردن به منشأ ظهور این گونه معادلات می‌باشند.
معادلات انتگرال ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا[۱] معرفی شدند [۵، ۶، ۷]. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و تأثیر وراثت بود که با اینگونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد. از آن زمان به بعد دانشمندان و محققین در پژوهش‌های کاربردی زیادی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و غیره به حل این معادلات نیاز پیدا کردند.
یکی از مسائل جالبی که در سالهای اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده است معادلات انتگرال و دیفرانسیل و نیز انتگرال–دیفرانسیل با شرایط انتگرالی است. به عنوان مثال در [۳۰]، کانن و وندر هوك معادله گرمای شبه خطی با شرایط انتگرالی را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از جواب مساله دیریکله، خوش وضعی، معادله گرمای شبه خطی با شرایط غیر موضعی را مورد بررسی قرار دادند.
در [۳۱] و [۳۲]، کانن و لین روش گالرکین را برای حل معادله گرما به کار بردند. در [۳۶]، مرازگا و بوزاینی روی معادلات انتگرال–دیفرانسیل سهموی غیرخطی با شرایط مرزی و شرط انتگرالی کارکردند و از روش راث برای حل تقریبی این

[۱] $Volterra$

نوع معادلات استفاده کردند.
و در [۳۸]، مرازگا و بوزاینی مساله مقدار اولیه با شرایط انتگرال معادله انتشار دو بعدی را مورد بررسی قرار دادند و در آن معادله انتشار دو بعدی را به یك بعدی تبدیل کردند و وجود، یکتایی و وابستگی پیوسته به دادهها را اثبات کردند.
در این پایاننامه نیز به بررسی رده خاصی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی با یك شرط انتگرالی میپردازیم. در فصل ۱ مقدمهای در مورد معادلات انتگرال و نیز تعاریف و قضایایی که در فصلهای بعدی به آنها نیاز داریم میآوریم. حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای خطی دو بعدی در فصل ۲ ارائه شده است [۲۶]. و در فصل ۳ به بررسی وجود جواب برای معادله انتگرال-دیفرانسیل با شرایط انتگرالی پرداخته شده است. در فصل ۴ به حل عددی معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی با شرایط غیر موضعی پرداختیم. در پایان فصل ۲ و ۴ نتایج عددی حاصل از روش آورده شده است. برنامههای کامپیوتری به کار رفته برای حل معادلات این پایان نامه به صورت پیوست آورده شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معرفی معادلات انتگرال

۱.۱.۱ مقدمه

در این قسمت مفاهیمی از معادلات انتگرال را به اختصار بیان می‌کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر و کاملتر می‌توان به مرجع [۲] مراجعه کرد.
یك معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.
نمونه‌ای از یك معادله انتگرال که در آن $y(x)$ تابع مجهول است و باید یافته شود به صورت زیر است

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt \qquad (۱.۱)$$

که در آن $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. شایان توجه است که هسته معادله و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف از بررسی معادلات انتگرال تعیین تابع مجهول یعنی $y(x)$ است که در معادله (۱.۱) صدق کند.

۲.۱.۱ انواع معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱.۱. به معادلاتی نظیر معادله (۱.۱) که تابع مجهول $y(x)$ به صورت خطی حضور دارد، معادلات انتگرال خطی می‌گویند. اما اگر تابع $y(x)$ با توابعی غیرخطی نظیر $y^2(x)$ یا $cos(y(x))$ و غیره تعویض شود، آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی می‌گویند.

متداول‌ترین معادلات انتگرال خطی را می‌توان در چهار گروه دسته‌بندی نمود.

۱. معادلات انتگرال فردهلم

۲. معادلات انتگرال ولترا
۳. معادلات انتگرال-دیفرانسیل
۴. معادلات انتگرال منفرد
همچنین معادلات انتگرال را با توجه به تعداد متغیرهای تابع مجهول به معادلات انتگرال یك یا چند متغیره تقسیم می‌کنند.
اکنون تعاریف و خواص عمده معادلات چهارگانه بالا را بیان می‌کنیم.

معادلات انتگرال خطی فردهلم

در معادلات انتگرال خطی فردهلم، حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad x \in [a,b], \tag{۲.۱}$$

که در آن هسته معادله انتگرال یعنی $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یك پارامتر معلوم است.
بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدامیك از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته تقسیم می‌شوند:
الف) اگر $\phi(x) = 0$ باشد، معادله (۲.۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = 0 \tag{۳.۱}$$

این معادله را یك معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.
ب) اگر $\phi(x) = 1$ باشد، معادله (۲.۱) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \qquad x \in [a,b]. \tag{۴.۱}$$

به این معادله، یک معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.
قابل توجه است که اگر $\forall x \in [a,b] : \phi(x) \neq 0$، بدون اینکه خللی در کلیت وارد شود می‌توان فرض کرد که $\phi(x) = 1$.
چند روش تحلیلی ساده که توسط آنها می‌توان برخی از معادلات انتگرال فردهلم را حل کرد عبارتند از:
الف. روش تجزیه ادومیان
ب. روش محاسبه مستقیم
ج. روش تقریب‌های متوالی
د. روش جایگذاری‌های متوالی
برای اطلاع از جزئیات بیشتر این روش‌ها می‌توان به مراجع [۱۹، ۲۰] مراجعه کرد.

معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری به جای اینکه یک عدد ثابتی باشد تابعی از x است به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۵.۱}$$

که در آن تابع مجهول یعنی $y(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.
معادلات انتگرال ولترا را نیز می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی نمود:
الف) در حالتی‌که $\phi(x) = 0$ است، معادله (۵.۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = 0. \tag{۱.۶}$$

به این معادله، یك معادله انتگرال ولترای نوع اول می‌گویند.
ب)در حالتی‌که $\phi(x) = 1$ است، آنگاه معادله (۱.۵) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \tag{۱.۷}$$

این را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می‌نامند.
با روش‌های تحلیلی زیر برخی از معادلات انتگرال ولترا را می‌توان حل کرد :

الف. روش تجزیه ادومیان

ب. روش جواب سری

ج. روش تقریب‌های متوالی

د. روش جایگذاری‌های متوالی

برای اطلاع از جزئیات بیشتر این روش ها می‌توان به مراجع [۱۹، ۲۰] مراجعه کرد.

تذکر ۱.۱.۲. *اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (۱.۴) و انتگرال ولترای نوع دوم (۱.۷) ، $f(x) = 0$ باشد، آنگاه معادله حاصل را یك معادله انتگرال همگن می‌نامند. در غیر این صورت معادله مورد نظر یك معادله انتگرال غیرهمگن نامیده می‌شود.*

معادلات انتگرال غیرخطی

اگر در معادلات انتگرال

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,y(t))dt, \tag{۱.۸}$$

و

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,y(t))dt, \tag{۹.۱}$$

تابع K نسبت به y غیرخطی باشد آنگاه معادلات فوق غیرخطی نامیده می‌شوند به طوری‌که معادله (۸.۱) معادله انتگرال غیرخطی فردهلم و معادله (۹.۱) یك معادله انتگرال غیرخطی ولترا گفته می‌شود.

معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال غیرخطی هستند.

$$y(x) = x + \int_0^1 xty^3(t)dt, \tag{۱۰.۱}$$

$$y(x) = x - \frac{1}{4}x^4 + \int_0^x ty^2(t)dt, \tag{۱۱.۱}$$

معادله (۱۰.۱) معادله انتگرال غیرخطی فردهلم و معادله (۱۱.۱) معادله انتگرال غیرخطی ولترا است.

با روش‌های زیر دسته‌ای از معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی را می‌توان حل کرد:

الف. روش تجزیه مستقیم

ب. روش تجزیه ادومیان

با استفاده از روش‌های زیر می‌توان بعضی از معادلات انتگرال ولترای غیرخطی را حل کرد:

الف. روش جواب سری

ب. روش تجزیه ادومیان

برای اطلاع از جزئیات بیشتر این روش‌ها می‌توان به مراجع [۱۹، ۲۱، ۲۲] مراجعه نمود.

معادلات انتگرال-دیفرانسیل

در این گونه معادلات حداقل یکی از مشتقات تابع مجهول $y(x)$ در معادله دیده می‌شود.
جزئیات بیشتر درباره مواردی که این گونه معادلات ظاهر می‌شوند و نیز کاربردهای اینگونه معادلات در علوم دیگر مانند فیزیک، زیست شناسی، مهندسی مکانیک و غیره را می‌توان در مراجع [۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵] پیدا کرد.
در زیر چند مثال از معادلات انتگرال-دیفرانسیل آورده شده است.

$$y'(x) = x - \int_0^1 e^{x-t}y(t)dt, \qquad y(0) = 0, \tag{۱۲.۱}$$

$$y''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty'(t)dt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \tag{۱۳.۱}$$

$$y'(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt, \qquad y(0) = 0, \tag{۱۴.۱}$$

$$y''(x) = -x + \int_0^x (x-t)y(t)dt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \tag{۱۵.۱}$$

با توجه به حدود انتگرال‌گیری، معادلات (۱۲.۱) و (۱۳.۱) معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و معادلات (۱۴.۱) و (۱۵.۱) معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا هستند. به علاوه معادلات (۱۲.۱)-(۱۵.۱) معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی هستند و این به آن دلیل است که تابع مجهول یعنی $y(x)$ و مشتقات آن در معادله مذکور به صورت خطی حضور پیدا کرده‌اند.
با روش‌های زیر دسته‌ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم را می‌توان حل کرد:

الف. روش تجزیه مستقیم

ب. روش تجزیه ادومیان

توسط روش‌های زیر می‌توان بعضی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا را

حل کرد:
الف. روش جواب سری
ب. روش تجزیه ادومیان

معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۱۶.۱}$$

یا نوع دوم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۱۷.۱}$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال(۱۶.۱) و (۱۷.۱) در یك یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری پیوسته نباشد، باز هم این‌گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می‌نامند.

معادلات انتگرال یك بعدی و چند بعدی

تقسیم بندی دیگری‌که در معادلات انتگرال وجود دارد مربوط به تابع مجهول معادلات انتگرال است به طوری‌که اگر تابع مجهول معادله، تابعی یك متغیره باشد معادله را یك بعدی‌گویند ولی اگر تابع مجهول معادله تابعی چند متغیره باشد معادله را چند بعدی می‌نامند. به عنوان مثال، معادله

$$y(x) - \int_0^x cos(x+t)y(t)dt = 2\sqrt{x}$$

یك معادله انتگرال ولترای یك بعدی و معادله

$$u(x,t)-\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(xy+tz)u(y,z)dydz=$$
$$xsin(t)-(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}t)\pi^3,\ \ x,t\in[.,\pi]$$

یك معادله انتگرال فردهلم دوبعدی خطی و بالاخره معادله

$$u(x,t)-\int_0^{t}\int_0^{x}(xy+tz)u(y,z)dydz=sin(xt)-$$
$$\frac{6x^3t+x^3t^5+6xt^3-6x^2sin(xt)+x^5t^3-6t^2sin(xt)}{6xt},\ \ x,t\in(0,1)$$

یك معادله انتگرال ولترای دو بعدی خطی است.

۲.۱ تعاریف مقدماتی

در این بخش به بیان بعضی از مفاهیم به‌کار رفته در این پایان نامه می‌پردازیم.

۱.۲.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. X یك فضای خطی حقیقی باشد تابع با خواص زیر را یك ضرب داخلی یا ضرب اسکالر می نامیم هرگاه به ازای هر x,y,z در X و هر α در R داشته باشیم

الف) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

ب) $(x,y)=(y,x)$

ج) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$

د) $(x,x)\geq 0$ $(x,x)=0,\forall x\in X$ اگر و فقط اگر $x=0$

تعریف ۲.۲.۱. اگر $(.,.)$ یك ضرب داخلی روی X باشد زوج $(X,(\cdot,\cdot))$ را یك

فضای ضرب داخلی نامیم.

قضیه ۳.۲.۱. اگر $(\cdot,\cdot)$ یك ضرب داخلی روی فضای X باشد آنگاه با تعریف $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ برای هر $x \in X$، Xیك فضای خطی نرمدار است، که این نرم را نرم تولید شده توسط ضرب داخلی گویند.

تعریف ۴.۲.۱. فضای ضرب داخلی X را یك فضای هیلبرت گویند هرگاه X با نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یك فضای کامل باشد، یا به عبارتی هر دنباله کشی در X با نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یك دنباله همگرا در X باشد. به عبارت دیگر حد آن در X باشد.

تعریف ۵.۲.۱. تابع $g(t)$ را انتگرال پذیر مربعی گویند هرگاه $\int_a^b |g(t)|^2 dt < \infty$.

۲.۲.۱ نامساوی گرانوال

فرض کنید که $h(t)$ و $\alpha(t)$ تابع‌های پیوسته روی بازه بسته I، باشند همچنین تابع $\alpha(t)$ تابع نامنفی روی بازه I و k عدد صحیح نامنفی است. اگر

$$h(t) \leqslant \int_a^t \alpha(s)h(s)ds + k$$

آنگاه

$$h(t) \leqslant k \cdot e^{\int_a^t \alpha(s)ds}.$$

به این نامساوی، نامساوی گرانوال [۱] گویند [۸].

[۱] Gronwall