بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی گرایش هندسه

موضوع:

بررسی متر کروپینا با انحنای پرچمی اسکالر

استاد راهنما:

دکتر بهمن رضائی

دانشجو:

زینب حسنوند

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به

مادرم مهربان همیشگیم،

پدرم کوه استوارم،

و

همسرم آرامش زندگی ام.

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را در گزاردن نتوانند.
از پدر و مادر عزیزم که سهم بسزایی در پیشرفت‌های زندگی‌ام داشته اند و از اساتید دوران زندگی‌ام که علاوه بر آموزش علم، منش زندگی و مسیر بهتر زیستن را به من آموخته اند کمال تشکر را دارم.
بر خود لازم می‌دانم از استاد عزیز و بزرگوار، جناب آقای دکتر رضائی زحماتی را متقبل شده اند که نامشان و یادشان همیشه در ذهن ما خواهد بود. برای ایشان آرزوی سلامتی و سعادت و توفیق روز افزون از خداوند متعال خواستارم و کمال تشکر را دارم.
هم‌چنین وظیفه خویش می دانم مراتب سپاسگزاری را از اساتید گرامی گروه ریاضی جهت راهنمایی هایشان در مدت این دو سال ابراز نمایم.

زینب حسنوند
مهر ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه، دسته بندی از مترهای کروپینا با انحنای پرچمی به طور ایزوتروپی ضعیف را خواهیم داشت. اگر F متر کروپینا روی منیفلد M و (h, W) زوج ناوبری در مسئله ناوبری زرملو باشند. هدف ما پیدا کردن رابطه بین (h, W) و F است و در نهایت ثابت خواهیم کرد که متر کروپینا در بعد ۳، یک متر انیشتینی است اگر و فقط اگر با انحنای پرچمی ثابت نامنفی باشد.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۱۸ هندسه فینسلری توسط فینسلر به عنوان تعمیم طبیعی هندسه ریمانی ارائه شد. در سال ۱۹۲۰ توسط ریاضی دانانی هم چون تیلور و بروالد به عنوان تعمیمی از هندسه ریمانی گسترش یافت و در سال ۱۹۳۳ کارتان اصول هندسه‌ای را که فینسلر ابداع نموده بود را ادامه داد و وی از جمله کسانی بود که هندسه فینسلری را گسترش دادند و اولین کسی که نظریه التصاق فینسلری را به صورت سراسری بیان کرد پروفسور اکبرزاده بوده با توجه به آن چه در فصول این پایان نامه در مورد متر ریمانی بیان شده است، اگر شرایط مذکور در تعریف متر ریمانی را تغییر داده و یا حذف نماییم، مترهای جدیدی حاصل می‌شود که تعابیر بسیار جالبی داشته است و در فیزیک و مهندسی بسیاری از پدیده‌ها را با توجه به این مترها می‌توان توجیه کرد.

به عنوان مثال اگر شرط مربعی بودن را از متر ریمانی برداریم، متر فینسلری ظاهر می‌گردد. یک نوع خاص از مترهای فینسلری، (α, β)ـ مترها هستند و یک نوع خاص از این (α, β)ـ مترها، متری با فرض $\varphi(s) = \frac{1}{s}$ و در نتیجه $F = \alpha\varphi(s)$ به شکل $F = \frac{\alpha^{2}}{\beta}$ خواهد بود که متر کروپینا نام دارد.

در فصل اول این پایان نامه، ابتدا مفاهیم مقدماتی مربوط به منیفلدها که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، را یادآور می‌شویم. در فصل دوم به معرفی فینسلر، (α, β)ـ مترها، مشتقات لی و هم چنین مقادیر مهم هندسی هم چون انحنای پرچمی را بیان می‌کنیم. در فصل سوم این پایان نامه انحراف معیار و انحنای S، مسئله مهم ناوبری زرملو و مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر را شرح می‌نماییم. در فصل چهارم دسته بندی از انحنای پرچمی به طور ایزوتروپی ضعیف را شرح داده و به دست آوردن متر انیشتینی و معرف ناوبری از متر کروپینا می‌باشد و در نهایت اثبات می‌شود که متر کروپینا در بعد ۳، یک متر انیشتینی است اگرو فقط اگر با انحنای پرچمی ثابت نامنفی باشد.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

Qiaoling, X. *On Kropina metrics of scalar flag curvature, Differential Geometry and its Applications, 31 (2013), 393-404.*

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

بنای هر علمی بر یک سری اصول، تعاریف، اصطلاحات و قراردادها نهاده شده است. پی بردن به موضوعات ریاضی نیز مانند سایر علوم دیگر لازمه‌اش درک مفاهیم و تعاریف است. در این فصل تعاریف و قضایایی از منیفلدهای دیفرانسیل ، تانسورها، نظریه کلاف‌ها، هندسه ریمانی، یکریختی‌های موزیکال، التصاق روی منیفلد را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم اولیه هندسه آشنایی دارد. لذا از آوردن مطالب مقدماتی، اثبات قضایا و نتایج مربوط به آن ها خودداری شده است. تعاریف آورده شده با محوریت مقاله اصلی و استفاده از سایر منابع، همراه با مثال‌ها انتخاب گردیده است.

۱.۱.۱ منیفلدهای دیفرانسیل پذیر

تعریف ۱.۱.۱. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ را که دارای خواص زیر باشد یک توپولوژی روی X نامیده و زوج (X,τ) را یک **فضای توپولوژی** [۱] می‌نامیم.

(۱) $\emptyset, X \in \tau$

(۲) تحت اجتماع دلخواه بسته باشد.

(۳)تحت اشتراک متناهی بسته باشد.

[۱] topological space

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد، X را فضای اقلیدسی گوییم، هرگاه دارای یک ضرب داخلی باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و n یک عدد ثابت باشد، Xرا **موضعاً اقلیدسی**[۱] گوییم. هرگاه به ازای هر$x \in X$ همسایگی باز U وجود داشته باشد که همئومورف با یک باز R^nباشد. n مذکور را بعد فضای توپولوژی X در نقطه x می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. تناظر یک به یکی که پیوسته و دارای وارون پیوسته باشد را **همئومورفیسم** [۲]گوییم. هرگاه $f : X \longrightarrow Y$ باشد، آن‌گاه XوY را فضاهای توپولوژی همئومورف گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. فضای توپولوژی X، را یک **منیفلد توپولوژی**[۳]گوییم هرگاه:

(۱)هاسدروف[۴] باشد.

(۲) دارای پایه شمارای نوع دوم[۵] باشد.

(۳) موضعاً اقلیدسی باشد.

تعریف ۶.۱.۱. اگر منیفلد را بتوان توسط تعدادی شمارا از کارت‌ها پوشاند، گوییم منیفلد دارای پایه شمارا است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X منیفلد توپولوژی باشد. در این صورت زوج (x, U) را که $x : u \to x(u)$ یک همئومرفیسم می‌باشد یک **کارت مختصاتی**[۶]می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. دو کارت (x, U) و(y, V) از یک منیفلد توپولوژی را C^∞ سازگار گوییم، هرگاه نگاشت‌های:

$$xoy^{-۱} : y(U \cap V) \longrightarrow x(U \cap V),$$

$$yox^{-۱} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V).$$

به عنوان نگاشت‌هایی از فضای $\mathbb{R}^n$،C^∞ باشد.

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه $A = \{(x_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in I\}$ از کارت‌های C^∞ سازگار برای یک منیفلد توپولوژی را طوری که U_α پوشش برای آن نیز باشند را یک **اطلس** C^∞[۷] برای آن گوییم.

---

[۱] locally euclidean
[۲] homeomorphism
[۳] topological manifold
[۴] hauasdorff
[۵] countable basis
[۶] coordinate chart
[۷] atlas

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد توپولوژی n-بعدی باشد و $\mathcal{A}$ یک اطلس C^∞ روی M باشد، در این صورت زوج $(M, \mathcal{A})$ را یک منیفلد هموار از رده C^∞ نامیم.

مثال ۱۱.۱.۱. کره[۱] یک منیفلد هموار است.

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر $(M^n, \mathcal{A}_M)$ و $(N^m, \mathcal{A}_N)$ منیفلدهای دیفرانسیل پذیر باشند، آنگاه فضای توپولوژی $M \times N$ با اطلس $\mathcal{A}_{M\times N}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر [۲] $(m+n)$ بعدی می‌باشد.

$$\mathcal{A}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \quad | \quad \alpha \in I\}, \qquad \mathcal{A}_N = \{(V_\beta, \psi_\beta) \quad | \quad \beta \in J\},$$

آنگاه اطلس حاصلضرب به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{A}_{M\times N} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) \quad | \quad (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_M, (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{A}_N\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم $p \in M$ و $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت باشد، f را در p، C^∞ گوییم، هرگاه کارت مختصاتی (x, U) از اطلسM و کارت مختصاتی (y, V) از اطلس N به طوری که $f(U) \subseteq V$ وجود داشته باشند که $yofox^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V)$ در $x(p)$ ، C^∞ باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم p یک نقطه از M باشد، یک بردار مماس [۳] بر p به صورت یک مشتق‌گیر در نقطه p تعریف می‌شود. مجموعه همه بردارهای مماس بر M در نقطه p را فضای مماس بر M در نقطه p نامیده و با T_pM نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ و $p \in M$ در این صورت

$$\begin{aligned} f_{*_p} &: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \\ X_p &\longrightarrow f_{*_p}(X_p) : C^\infty_{f(p)}(N) \xrightarrow{\text{خواص ۱.۲}} \mathbb{R} \\ &\qquad g \longrightarrow (f_{*_p}(X_p))g := X_p(gof), \end{aligned}$$

تعریف فوق خوش تعریف می‌باشد. f_{*_p} را **مشتق f در نقطه** p می‌نامیم. و دارای خواص زیر است:

[۱] sphere
[۲] differentible manifold
[۳] tangent vector

۱) f_{*_p} خطی است.

۲)اگر $f : M \longrightarrow N$ دیفئومورفیسم باشد، آنگاه f_{*_p} ایزومورفیسم خطی است.

۳)اگر $M \xrightarrow{\mathrm{f}} N \xrightarrow{\mathrm{g}} p$ آنگاه $(gof)_{*_p} = g_{*f(p)} of_{*_p}$.

تعریف ۱.۱.۱۶. منحنی C^∞[1]: یک منحنی C^∞ روی منیفلد M عبارت است از نگاشت هموار $C : (a, b) \longrightarrow M$ به طوری که $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

قضیه ۱.۱.۱۷. *به ازای هر نقطه p از منیفلد M و هر بردار $X(p)$ از فضای مماس T_PM یک خم هموار $C : (-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{\mathrm{C^\infty}} M$ به طوری که $C(\circ) = p$ و $C'(\circ) = X_{(p)}$.*

برهان. به [[۲۰]، گزاره (۱۶۰۸)]مراجعه شود. □

قضیه ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم که $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت C^∞ باشد، $p \in M$ و $X_p \in T_pM$. در این صورت اگر C خمی باشد که در نقطه p دارای بردار سرعت X_p باشد آنگاه $f_{*_p}(X_p) = \frac{\partial}{\partial t}(foC)_t$.*

برهان. به [[۲۰]، گزاره (۱۸۰۸)] مراجعه شود. □

۱.۲ نظریه کلاف[2]

تعریف ۱.۲.۱. منیفلد دیفرانسیل پذیر M مفروض است. فضای مماس M [3] را با TM نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM = \cup_{p\in M}\{p\} \times T_pM = \{(p, X_p)|p \in M, X_p \in T_pM\},$$

به طور مشابه فضای مماس دوگان [4] روی M به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T^*_pM = \{(p, \omega_p)|p \in M, \omega_p \in T^*_pM\}.$$

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم B و Eمنیفلدهای از ردهٔ C^r و $\pi : E \xrightarrow{\mathrm{C^r}} B$ یک نگاشت از ردهٔ C^r پوشا باشد، چهارتایی (E, π, B, F) را یک کلاف تاری[5] می‌نامیم هرگاه به ازای هر $b \in B$ همسایگی U حول

[1] curve
[2] bundle
[3] tangent space
[4] dual tangent space
[5] bundle fiber

b و دیفئومورفیسم $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ موجود باشد که نمودار زیر جابجایی شود:

$$\begin{tikzcd} E \subseteq \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

تعریف ۱.۲.۳. کلاف تاری (E, π, B, F) را کلاف برداری[1] نامیم، هرگاه F یک فضای برداری بوده و این کلاف دارای اطلسی باشد که نگاشت های گذر از آن در هر نقطه یکریختی‌های خطی باشند. آن‌گاه (E, π, B, F) یک کلاف برداری خواهد بود.

مثال ۱.۲.۴. فضای مماس روی یک منیفلد، حالت خاصی از کلاف های تاری و در واقع یک کلاف برداری است.

تعریف ۱.۲.۵. اگر $p \in M$ آن گاه $\pi^{-1}(\{p\})$ را تار کلاف در نقطه p می‌نامیم. در مورد کلاف مماس تارهای آن، همان فضاهای مماس T_pM در هر $p \in M$ می‌باشند.

قضیه ۱.۲.۶. *اگر M^n یک منیفلد دیفرانسیل پذیر C^k باشد آن‌گاه TMیک منیفلد دیفرانسیل پذیر $2n-$ بعدی و از ردهٔ C^{k-1} می‌باشد.*

برهان. به [[۲۵]، قضیه (۲۰۲)] رجوع شود. □

تعریف ۱.۲.۷. کلاف برداری E روی M مفروض است. نگاشت S از M به E را به طوری که $\pi o S = IdM$ را یک بخش [2] کلاف E می‌نامیم. مجموعه بخش‌های کلاف E را با $\Gamma(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۸. اگر $E = TM$ آن گاه یک بخش این کلاف را یک میدان برداری[3] روی M می‌نامیم. مجموعه میدان برداری روی M را با $\chi(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۹. یک بخش از کلاف T^*M را یک میدان، یک فرمی روی Mمی‌نامیم. مجموعه میدان های ۱ ـ فرمی روی M را با $\Omega^1(M)$ نشان می‌دهیم.

[1] bundle vector
[2] section
[3] field vector

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم E یک کلاف برداری روی M باشد و $f: M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار، در این صورت کلاف برگردان E روی M را با f^*E نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*E = \{(x,v) \quad | x \in M, v \in E, f(x) = \pi(v)\}.$$

در واقع f^*E توسط اجتماع برگردان تارهای کلاف E روی منیفلد M ساخته می‌شود، چون f^* خاصیت خطی دارد، پس پایه‌های تارهای کلاف برگردان یک کپی از پایه‌های تارهای کلاف E می‌باشند. می‌توان ثابت کرد که (f^*E, π, N) یک کلاف برداری روی N می‌باشد که تارهای آن کپی تارهای کلاف برداری (E, π, M) می‌باشد. نگاشت تصویر مؤلفه‌ی اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} pr_1 &: f^*E \longrightarrow M \\ (x,v) \in M \times E &\longmapsto x \in M, \end{aligned}$$

واگر نگاشت تصویر مؤلفه دوم به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned} pr_2 &: f^*E \longrightarrow E \\ (x,v) &\longmapsto v \in E, \end{aligned}$$

آن‌گاه نگاشت بین کلاف‌ها در نمودار زیر، جابه جایی خواهد بود:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ \Big\downarrow pr_1 & & \Big\downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

قرارداد: کلاف تاری (E, π, M, F) را با E نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض می‌کنیم B, F منیفلدهای دیفرانسیل پذیر باشند در این صورت با قرار دادن $E = B \times F$ و $\pi : E \longrightarrow B$ با تصویر روی مؤلفه اول یک کلاف تاری به نام کلاف حاصلضرب [۱] تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. کلاف E را کلاف بدیهی [۲] گوییم هرگاه دیفئومورفیسمی مانند φ از E به $B \times F$ موجود باشد.

---
[۱] product bundle
[۲] trivial bundle

تعریف ۱۳.۲.۱. اگر G یک زیر گروه از گروه دیفئومورفیسم های از رده C^r روی Fیعنی $Diff^r(F)$ باشد و $\mathcal{A}$ یک اطلس C^r برای کلاف (E, π, M, F) باشد آنگاه زوج، $((E, \pi, M, F), G)$ را یک Gـ کلاف می‌نامیم هرگاه به ازای هر نگاشت تغییر مختصات $\varphi_{\alpha\beta}$ و به ازای هر $b \in U_\alpha \cap U_\beta$، داشته باشیم $\varphi_{\alpha\beta}(b) \in G$. G را گروه ساختاری کلاف (E, π, M, F) می‌نامیم.

نتیجه ۱۴.۲.۱. *می‌توان ثابت کرد که کلاف تاری (E, π, M, F) را یک کلاف برداری است، هرگاه F فضای برداری بوده و گروه ساختاری کلاف فوق، $GL(F)$ باشد.*

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم E یک کلاف برداری بوده و F' زیر فضای برداری F باشد. هم‌چنین E'_p زیر فضای برداری E_p به ازای هر $p \in M$ باشد. در این صورت $E' = \bigsqcup_{p\in M} E'_p$ را زیر کلاف[۱] برداری E می‌نامیم، هرگاه کارت کلافی (φ, U) وجود داشته باشد که به ازای هر $p \in M$،

$$\varphi(E'_p) = F'.$$

تعریف ۱۶.۲.۱. کلاف برداری (E, π, M, F) مفروض است. قرار می‌دهیم $V_\xi E = ker(\pi_*)_\xi$. در این صورت اگر $VE = \bigsqcup_{\xi\in E} V_\xi E$ باشد، آنگاه (VE, π, E, F) را یک کلاف برداری روی E می‌باشد که آن‌را کلاف قائم یا عمودی[۲] می‌نامیم.

باید توجه داشت که اگر رتبه کلاف E روی M، m باشد. آنگاه رتبه کلاف عمودی VE روی E نیز m می‌باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم VTM کلاف برداری قائم روی منیفلد TM باشد. در این صورت می‌توان در هر مختصات موضعی (x^i, y^i) برای TM یک میدان برداری سراسری به صورت $V = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ روی TM تعریف کرد. که این میدان برداری را میدان برداری موقعیت روی کلاف برداری قائم VTM می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم E یک کلاف برداری روی M باشد و VE کلاف برداری قائم روی E باشد. در این صورت، اگر بتوان TE را به صورت جمع مستقیم VE و یک فضای دیگر مانند E نوشت آنگاه HE را زیر کلاف افقی[۳] روی E می‌نامیم. HE لزوماً یکتا نیست.

---
[۱] sub bundle
[۲] vertical bundle
[۳] horizontal subbundle

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنیم (E, π, M, F) یک کلاف برداری باشد. یک توزیع k−بعدی روی این کلاف عبارت است از نگاشت $\Delta : M \longrightarrow E$ به طوری که به ازای هر $p \in M$، $\Delta(p)$ یک زیر فضای برداری k−بعدی از تار کلاف در نقطه p یعنی، E_p باشد.

تعریف ۱.۲.۲۰. منیفلد دیفرانسیل پذیر$(M, \mathcal{A})$ را جهت پذیر گوییم هرگاه به ازای هر دو کارت از اطلس $\mathcal{A}$ ژاکوبین نگاشت تغییر کارت همواره مثبت باشد.

مثال ۱.۲.۲۱. کره منیفلد جهت پذیر است.

تعریف ۱.۲.۲۲. فرض کنیم Eیک کلاف برداری روی Mباشد، یک التصاق[۱] روی Mعبارت است از نگاشت:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$
$$(X, S) \longrightarrow \nabla_X S,$$

که دارای خواص زیر باشد.

الف) ∇ روی X ، $C^\infty(M)$ خطی باشد. یعنی $\nabla_{fX} S = f \nabla_X S$.

ب) ∇ روی S دارای این خاصیت باشد که $\nabla_X fS = f\nabla_X S + X(f)S$.

$\nabla_X S$ را مشتق هموردا [۲] S در جهت بردار X می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۲۳. فرض کنیم∇ یک التصاق در E باشد. ∇ (یک التصاق روی M باشد.) التصاق ∇ را خطی [۳] گوییم هرگاه $E = TM$.

قضیه ۱.۲.۲۴. *فرض کنیم ∇ یک التصاق کلاف E روی M باشد و p نقطه ی روی M باشد در این صورت $\nabla_X S|_p$ فقط به مقادیر X, S در یک همسایگی کوچک نقطه p بستگی دارد. به طور معادل یعنی اگر Xو Y در همسایگی نقطه p مانند U با یکدیگر برابر باشند. S و w با یکدیگر برابر باشند، آن‌گاه*

$$\nabla_X S|_p = \nabla_Y w|_p.$$

برهان. به [[۱۰]، لم (۱۰۴)] رجوع شود. □

[۱] connection
[۲] covariant derivative
[۳] linear connection

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم $\{E_i\}$ به صورت موضعی پایه ای برای $\Gamma(E)$ باشد. در این صورت $\nabla_X E_i \in \Gamma(E)$. قرار می‌دهیم $\nabla_X E_i := \omega_i^j(X)E_j$. ω_i^jها را ضرایب التصاق خطی [۱] ∇ می‌نامیم. ω_i^j ها در واقع ۱ ـ فرمی می‌باشند. زیرا با اثر آن ها بر یک میدان برداری X تابعی هموار روی M به‌دست می‌آید. ω_i^j ها را ۱ ـ فرمی التصاق نیز می‌نامیم.

۳.۱ شار و مشتقات لی

تعریف ۱.۳.۱. خم هموار $C : (a,b) \longrightarrow M$ که در آن $C(t_\circ) = p$ را در نظر می‌گیریم، فرض کنیم $X \in \chi(M)$ ، خم C را خم انتگرال میدان X گذرنده از نقطه p گوییم هرگاه به ازای هر $t \in (a,b)$

$$C'(t) = X_{C(t)}.$$

تعریف ۲.۳.۱. یک شار موضعی حول نقطه p از M عبارت است از نگاشت $\varphi : (-\epsilon,\epsilon)\times W \longrightarrow U$ که در آن $W \subset U$ یک همسایگی برای نقطه p می‌باشد و نگاشت φ در خواص زیر صدق می‌کند:

۱) $\varphi(\circ, q) = q$؛

۲) $|\ t+s\ | < \varepsilon \qquad \varphi(t,\varphi(s,q)) = \varphi(t+s,q)$.

تعریف ۳.۳.۱. به ازای هر $q \in W$، نگاشت C^∞، زیر را می‌توان تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \varphi(q) : (-\varepsilon,\varepsilon) &\longrightarrow W \\ t &\longrightarrow (\varphi(q))(t) := \varphi(t,q), \end{aligned}$$

در واقع $\varphi(q)$ خمی است هموار که در هر لحظه $t = \circ$ از نقطه p می‌گذرد که آن را مدار شار گذرنده از نقطه q می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. میدان برداری X را کامل گوییم هرگاه خم‌های انتگرال آن به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شود . اگر X یک میدان برداری کامل باشد آن‌گاه شار آن، سراسری [۲] می‌باشد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد هرگاه نگاشت :

[۱] coefficient linear connection
[۲] globally

$$\begin{aligned}[\quad,\quad]: V\times V &\longrightarrow V\\ (u,w) &\longrightarrow [u,w],\end{aligned}$$

با خواص زیر تعریف شده باشد:

- $[u,w]=-[w,u]$،
- $[u,w_1+w_2]=[v,w_1]+[v,w_2]$، $\qquad [u_1+u_2,w]=[u_1,w]+[u_2,w]$،
- $[v,[u,w]]+[w,[v,u]]+[u,[w,v]]=0$.

$(V,[,])$ را یک جبر لی گوییم.

مثال ۶.۳.۱. فضای $(\mathbb{R}^3,\times)$ یک جبر لی می‌باشد.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم X یک میدان برداری روی M باشد و f یک تابع C^∞ روی M و p از M باشد، می‌دانیم مشتق f نسبت به میدان برداری X در هر نقطه p همان $(X(f))(p)$ می‌باشد. که قبلاً آن را به صورت $X_pf =: (X(f))(p)$ تعریف کرده‌ایم. این مفهوم مشتق تابع دلخواه fنسبت به میدان برداری X در هر نقطه p را می‌توان به صورت دیگر نیز تعریف کرد. در واقع مشابه تعریف مشتق تابع در حساب دیفرانسیل، فرض کنیم φ_t شار وابسته به میدان برداری X گذرنده از نقطه p در لحظه $t=0$ باشد در این صورت می‌توان با در نظرگرفتن تغییرات متغیرتابع fروی این شار که در واقع با تغییر پارامتر t از دامنه شار معادل است مشتق تابع f را نسبت به میدان X در نقطه p به صورت زیر تعریف کرد:

$$\lim_{t\to 0}\tfrac{f(\varphi_t(p))-f(\varphi_0(p))}{t}=\lim_{t\to 0}\tfrac{f(\varphi_t(p))-f(p)}{t},$$

از نماد $(L_Xf)_p$ برای نمایش دادن مشتق f نسبت به میدان X در نقطه p استفاده می‌کنیم یعنی $L_Xf =: X(f)$ و آن را مشتق لی [1] f نسبت به میدان X می‌نامیم. از آن جا که در فیزیک یک میدان برداری تحت تأثیر یک میدان برداری دیگر تغییرمی‌کند بنابراین می‌توان مفهوم آهنگ تغییرات آن میدان نسبت به میدان مفروض یعنی مشتق میدان برداری نسبت به میدان برداری دیگر را تعریف کرد. برای این کار از همان تعریف مشتق f نسبت به میدان X استفاده می‌کنیم با این تفاوت که چون مقادیر میدان Y در دو نقطه متفاوت از شار Xبه دو فضای برداری متفاوت تعلق دارد، از نگاشت ایزومرفیسم[2] φ_{t_*} استفاده کرده و

[1] Lie derivative
[2] isomorphism

در نتیجه مشتق میدان Y نسبت به میدان X در نقطه p را که با $(L_XY)_p$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(L_XY)_p &= \lim_{t\to 0}\frac{Y(\varphi_t(p)) - Y(\varphi_0(p))}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_{t_{*p}}^{-1}(Y_{\varphi_t}(p)) - Y_p}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{Y(\varphi_t(p)) - \varphi_{t_{*p}}(Y_p)}{t},\end{aligned}$$

که در آن به ازای هر $p\in M$

$$\varphi_{t_{*p}} : T_pM \xrightarrow{\text{iso}} T_{\varphi_t(p)}M.$$

۴.۱ تانسورها[1]

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد نگاشت $k-$خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}t : V\times V\times V\times\ldots\times V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (v_1, v_2, \ldots, v_k) &\longrightarrow t(v_1, \ldots, v_k),\end{aligned}$$

نگاشت t را یک تانسور از مرتبه $\binom{0}{k}$ یا به طور خلاصه از مرتبه k گوییم، مجموعه چنین نگاشت‌هایی را با $L_k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۱. تانسور t از مرتبه k را متقارن [2] گوییم هرگاه به ازای هر i, j:

$$t(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = t(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

و آن‌را متناوب گوییم هرگاه به ازای هر i, j:

$$t(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -t(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

در حالت کلی اگر σ یک عضو از گروه جایگشت های σ_k روی مجموعه متناهی $\{1, 2, \ldots, k\}$ باشد آن‌گاه:

الف) t متقارن است هرگاه: $t(v_1, \ldots, v_k) = t(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$.

ب) t متناوب است هرگاه: $t(v_1, \ldots, v_k) = sgn\sigma\cdot t(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$.

[1] tensor
[2] symmetric

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم t یک تانسور از مرتبه k و متناوب باشد در این صورت t را یک k فرم [۱] روی Vمی‌نامیم. مجموعه چنین نگاشتهایی را با $A_k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنیم $L_k(V)$و $A_k(V)$ به ترتیب تانسورها از مرتبه k و k فرم‌ها روی V باشند در این صورت:

$$\begin{aligned} Alt : L_k(V) &\longrightarrow A_k(V) \\ t &\longrightarrow Alt(t), \end{aligned}$$

که در آن:

$$((Alt)(t))(v_۱, \ldots, v_k) := \sum_{\sigma\in\delta_k} sgn\sigma \cdot t(v_{\sigma(۱)}, \ldots, v_{\sigma(k)}). \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنیم $t \in A_k(V)$ و $s \in A_l(V)$ در این صورت ضرب خارجی [۲] t, s را با $t \wedge s$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t \wedge s &\in A_{k+l}(V) \\ t \wedge s &:= \tfrac{۱}{k!l!} Alt(t \otimes s), \end{aligned}$$

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی و $\{\alpha_i\}_{i=۱}^n$ پایه آن و $\{\beta^j\}_{j=۱}^n$ پایه دوگان وابسته به آن باشد. در این صورت*

$$\{\beta^{j_۱} \otimes \beta^{j_۲} \otimes \ldots \otimes \beta^{j_k}\}_{۱\leqslant j_۱, j_۲, \ldots, j_k \leqslant n},$$

یک پایه برای فضای برداری $L_k(V)$ می‌باشد. در نتیجه $n^k = dim(L_k(V))$.

برهان. به [[۲۵]، صفحه ۱۶۲] رجوع شود. □

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر بوده و p نقطه ای آن باشد در این صورت یک تانسور از مرتبه κ در نقطه p عبارت است از نگاشت $\kappa-$خطی زیر:

$$t_p : T_pM \times \ldots \times T_pM \xrightarrow{\kappa-\text{خطی}} \mathbb{R},$$

[۱] k-form
[۲] wedge product