دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه دوره دکتری فیزیک نظری

ذرات اسپینی کلاسیک و امواج گرانشی

توسط:

مرتضی محسنی

استاد راهنما:

دکتر حمید رضا سپنجی

استاد مشاور:

دکتر محمد هادی صالحی

دی ۱۳۷۹

بسمه تعالی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

* صورتجلسه دفاع از رسالهٔ دکتری *

جلسه ارزیابی رسالهٔ ~~خانم~~ آقای مرتضی محسنی فرزند عباس
دارای شناسنامه شماره ۸۷ صادره از گلپایگان متولد ۱۳۴۹
دانشجوی دورهٔ دکتری رشته فیزیک گرایش ......

باعنوان : ذرات اسپینی کلاسیک وامواج گرانشی

به راهنمائی آقای دکترحمیدرضا سپنجی و مشاورت آقای دکترهادی صالحی
طبق دعوت قبلی در تاریخ ۷۹/۱۰/۲۱ تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوران و باعنایت به ماده ۲۱، ۲۲ و ۲۳ و تبصره‌های مربوطه، مندرج در آئین‌نامه دورهٔ دکتری مورخ ۱۳۷۲/۱۲/۸، رساله مزبور با نمره ۱۸/۶ هجده و شش دهم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

هیأت داوران :

سمت داوری	نام ونام خانوادگی	درجه دانشگاهی	امضاء
۱-استاد راهنما	دکترحمیدرضا سپنجی	استادیار	
۲-استا مشاور	دکترمحمدهادی‌صالحی	دانشیار	
۳-استاد مشاور			
۴-داور از دانشگاه	دکترکاوس غفوری تبریزی	"	
۵-داور از دانشگاه	دکترمهرداد فرهودی	"	
۶-داور خارج از دانشگاه	دکتررضا منصوری	استاد	
۷-داور خارج از دانشگاه	دکترفاطمه شجاعی	استادیار	
۸-نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکترمهرداد فرهودی	استادیار	

ناظر تحصیلات تکمیلی

۳۵۵۹۲

ذرات اسپینی کلاسیک و امواج گرانشی

چکیده

در این رساله امواج گرانشی و برخی از ویژگی های آن و نیز دینامیک ذرات اسپینی در نسبیت عام مرور می شوند. حرکت ذرات اسپینی در میدان گرانشی امواج گرانشی بررسی می شود. جواب های معادله های پاپاپترو دیکسون برای یک ذرهٔ جرم دار اسپینی در میدان این امواج بر حسب جواب های یک دستگاه دینامیکی مقید، ساخته می شود. نشان داده می شود که برای امواج گرانشی همساز با قطبش معین، این دستگاه به یک معادلهٔ از نوع ماتیو هیل تبدیل می شود. برای امواج ضعیف، معادله های پاپاپترو دیکسون به صورت اختلالی حل می شوند. نشان داده می شود که مقدار انحراف مسیر ذره از ژئودزی های میدان بستگی به نسبت اسپین به جرم ذره به طول موج ($\frac{s}{m\lambda}$) دارد و برای مقادیری از این نسبت، تأثیر جفت شدگی اسپین گرانش بر حرکت ذره به اندازهٔ تأثیر نیروی کشندی معمول مهم است. تأثیر احتمالی این نتایج بر آشکارسازی امواج گرانشی بررسی می شود. بالاخره مسئله برای معادلات تولچیجبو نیز حل می شود و نتیجه گرفته می شود که نتایج فیزیکی بسیار به نتایج پاپاپترو دیکسون نزدیک اند.

واژه‌های کلیدی: امواج گرانشی، ذرات اسپینی، معادله های پاپاپترو دیکسون

سهم اصلی مولف:فصل ۵ و فصل ٦

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مقدمه

دینامیک اجسام، یکی از مهم ترین بخشهای نظریهٔ نسبیت عام است. این مسئله در حالت کلی، دارای پیچیدگی ریاضی بسیاری است. از اینرو بخش بزرگی از مطالعات، به دینامیک ذرات آزمون، یعنی ذراتی که تأثیر آنها بر محیط قابل چشم پوشی است، منحصر شده است. نخستین مطالعات در بارهٔ دینامیک ذرات آزمون در یک میدان گرانشی معلوم، توسط اینشتین و همکاران در دهه های سی و چهل میلادی انجام شده است [۱]. نتیجهٔ کلاسیک این مطالعات چنین است: ذرات آزمون آزاد در یک میدان گرانشی، روی ژئودزی های فضازمان حرکت می کنند. این ژئودزی ها برای ذرات جرم دار زمان گونه و برای ذرات بی جرم، نورگونه اند. بعداً فوک[۱] [۲] پیشنهاد کرد که با در نظر گرفتن معادلهٔ پایستگی تانسور انرژی‌تکانهٔ توصیف کنندهٔ جسم، دینامیک اجسام با ساختار داخلی را نیز می توان بررسی کرد. این عقیده توسط پاپاپترو[۲] [۳] برای ذراتی که ساختار داخلی آنها تنها شامل اسپین است به کار گرفته شد و منجر به دو معادله برای حرکت ذره و اسپین آن گردید (البته این معادله ها پیش از آن توسط ماتیسون[۳] [۴] نیز پیشنهاد شده بود). ویژگی کلی این معادله ها چنین است: برای توصیف ذرات اسپینی جرم دار، کمیتهای سرعت، تکانه و تانسور اسپین لازم اند. در حالت کلی، معادلات حرکت همهٔ مولفه های تانسور اسپین را تعیین نمی کنند و این کار توسط افزودن یک معادله موسوم به شرط کمکی انجام می شود (علی رغم برتریهای نسبی یکی از آنها، توافق عمومی در مورد آن وجود

---

[۱] Fock

[۲] Papapetrou

[۳] Mathisson

ندارد. این عدم توافق. به این واقعیت مربوط است که ضابطهٔ فیزیکی قاطعی برای تعیین آن شناخته نشده و به نوعی مربوط به یکتا نبودن مفهوم مرکز جرم در نسبیت عام است). صرف نظر از دلخواه بودن شرط کمکی، در حالت کلی سرعت و تکانهٔ ذره، بر خلاف نسبیت خاص با یکدیگر متناسب نیستند. مسیر ذره عموماً یک ژئودزی نیست، و اسپین ذره نیز در طول مسیر به طور موازی منتقل نمی شود. معادلات پاپاپترو بعداً توسط دیکسون[۴] [۵] ، [٦]، و [۷] با روشی دقیقتر به دست آمدند و به موردی که علاوه بر نیروهای گرانشی، نیروهای دیگر نیز حضور دارند، تعمیم داده شدند. همچنین معادلات متناظر برای حالتی که ساختار درونی ذره، تنها شامل اسپین نباشد نیز به دست آمدند. از آن پس، جنبه های مختلفی از این معادلات توسط دیگران بررسی شده است [۸]. در [۹] نشان داده شده است که معادلات مذکور، تحت شرایطی حد کلاسیکی معادله های دیراک در فضای خمیدهٔ یک میدان ضعیف اند. فرمالیزم ۳+۱ این معادلات در [۱۰]، فرمول بندی لاگرانژی آنها در [۱۱] و [۱۲]، فرمالیزم کانونی آنها در [۱۳]، و بالاخره تقریب فرا نیوتنی آنها در [۱۴] بررسی شده است.

حل دقیق معادلات پاپاپترو دیکسون، دشوار است و از اینرو مثالهای اندکی از حل این معادلات آنهم به روشهای تقریبی و یا در حالات خاص، موجود است، از جمله حرکت در میدان شوارتسشیلد [۱۵] و [۱٦]، رایسنرنوردستروم [۱۷]، وایدیا[۵] [۱۸]، و کر[٦] [۱۹] که در ضمن مرجع اخیر حاوی تنها حل دقیق شناخته شدهٔ این معادلات است. این حل دقیق عبارت است از حرکت یک ذرهٔ اسپینی در صفحهٔ استوای یک سیاه‌چالهٔ کر که در ضمن اسپین ذره همواره عمود بر این صفحه است.

در مراجعی که تا کنون ذکر آنها رفت. ذرات جرم دار مورد بحث قرار گرفته اند. در [۲۰] و [۲۱] پیشنهاد شد که معادله های پاپاپترو را می توان برای توصیف حرکت ذرات بدون جرم (فوتون و نوترینو) نیز به کار برد. بر اساس این معادله ها مسیر ذرات اسپینی بی جرم، ژئودزی های نور گونه است [۲۰]. یک توضیح ممکن برای این تفاوت رفتار بین ذرات اسپینی جرم دار و بی جرم، این است که تانسور انرژی‌تکانهٔ توصیف کنندهٔ ذرات بی جرم پایسته و بی رد است ولی از آن ذرات جرم دار تنها پایسته است. این ویژگی اضافی بی رد بودن تانسور انرژی‌تکانه. شرط کمکی را به گونهٔ قاطعی تعیین می کند.

---

[۴] Dixon
[۵] Vaidya
[٦] Kerr

معمولاً معادله های نسبیت عام در تقریب میدان ضعیف، ساده تر می شود. علاوه بر این در میدانهای ضعیف، معادله های حرکت ذرات اسپینی ویژگیهای جالبنری دارند، مانند این که حد کلاسیکی معادلهٔ دیراک اند. از اینرو بررسی حرکت یک ذرهٔ اسپینی در میدان ضعیف جالب است. یکی از موارد مهم میدانهای ضعیف، میدان امواج گرانشی است[۷]. امواج گرانشی، جوابهای موجی معادله های اینشتین اند که می توانند هم در حضور و هم در غیاب مادّه منتشر شوند [۲۴]. مطالعهٔ امواج گرانشی اطلاعات زیادی در مورد ساختار فضازمان و خصوصیات منابع تولید کنندهٔ آنها می دهد [۲۵] و به این ترتیب آشکار سازی این امواج یکی از چالشهای مهم فیزیک معاصر است [۲۶]. روشهای آشکار سازی محتملی که تا کنون پیشنهاد شده اند، مبتنی بر بررسی رفتار دینامیکی ذرات (یا در حالت کلی تر، اجسام)در میدان این امواج اند. به این ترتیب مسئلهٔ دینامیک ذرات اسپینی علاوه بر این که از دید خود دینامیک ذرات اسپینی جالب است، ممکن است به بهبود روشهای آشکار سازی بینجامد.

مسئلهٔ دینامیک ذرات اسپینی در میدان امواج گرانشی ابتدا در [۲۷] بررسی شد. در این مرجع، به جای شرطهای کمکی معمول، یک شرط کمکی دلخواه به گونه ای که منجر به مسیرهای ژئودزی شود، به کار برده شد. چنین شروطی اصولاً مورد توجه قرار نگرفته اند. مطالعهٔ دینامیک ذرات اسپینی در امواج گرانشی با شرطهای کمکی معمول، در [۲۸]، [۲۹]، و [۳۰] انجام شده است. در [۲۸] جوابهای معادله های پاپاپترو دیکسون در امواج گرانشی کلی، بررسی شده اند. جوابهای دقیق برای انتقال موازی اسپین به دست آمده اند و در حالت کلی انتقال ناموازی اسپین. مسیر ذرات به طور عددی محاسبه شده است. در [۲۹] جوابهای معادله های مذکور، برای یک میدان ضعیف و با روش اختلال پیدا شده اند و بالاخره در [۳۰] روش اختلالی برای معادله های پاپاپترو تولچیجبو (معادله های پاپاپترو همراه با شرط کمکی پیرانی) بررسی شده و نشان داده شده که جوابهای آن تطابق زیادی با [۲۹] دارد. هدف این رساله، بررسی این کارهاست.

ساختار رساله به قرار زیر است . نخست امواج گرانشی مرور شده اند. این بحث بسیار گسترده است و از اینرو تنها بخشی که مستقیماً در این پژوهش استفاده شده را به اختصار مرور کرده ایم. سپس

[۷] گر چه برخی منابع امواجی قوی تولید می کنند، ولی دامنهٔ امواجی که به ناظرهای زمینی می رسد، همواره بسیار کوچک است.

دینامیک ذرات بی اسپین در امواج گرانشی را بر مبنای کارهای ون هولتن[۸] و گریشوک[۹] مرور کرده ایم. در فصل چهارم، ذرات اسپینی را بررسی کرده ایم. علی رغم کار مدرن دیکسون، این بررسی بر مبنای مقالهٔ کلاسیک پاپاپترو انجام شده زیرا اولاً شفاف تر است و دوم اینکه اثبات دیکسون به سادگی قابل تعمیم به ذرات بی جرم نیست ولی از آن پاپاپترو هست. فصل پنج اختصاص به معرفی مرجع [۲۸] دارد و فصل شش نیز مراجع [۲۹] و [۳۰] را معرفی می کند.

نماد گذاری رساله هم این گونه است: نشان متریک $(+,+,+,-)$ است. به جز در فصول دو و سه، یکاهای هندسی ($c=1$) را به کار می بریم. در اندیسها، معمولاً حروف یونانی و حروف اولیهٔ لاتین $a,b,\cdots$ از ۰ تا ۳ اند و حروف میانی لاتین $i,j,\cdots$ از ۱ تا۳. یک اندیس پایین گاهی به معنی مشتق‌گیری است و گاهی (که از متن معلوم است) به معنی مولفه. عنوانی که برای این کار انتخاب شده، قاعدتاً دو معنی می دهد، یکی تأثیر امواج بر ذرات و دیگری تولید امواج توسط ذرات اسپینی. مورد دوم در [۱۴] بررسی شده و در اثر حاضر گنجانیده نشده است.

---

[۸] van Holten

[۹] Grishchuk، مراجع را ببینید.

فصل ۲

امواج گرانشی

۲–۱ حل های کلاسیکی معادلات میدان گرانشی

معادله‌های میدان اینشتین

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

میدان گرانشی ناشی از یک توزیع ماده که توسط $T_{\mu\nu}$ بیان شده را توصیف می کنند. در دو و یا در سه بعد تعداد درجات آزادی وابسته به این میدانها متناهی و وابسته به چشمه و یا توپولوژی است . در ابعاد چهار و بالاتر میدان گرانشی یک دستگاه دینامیکی با بینهایت درجه آزادی است [۳۱]. میدانهای گرانشی میتوانند در غیاب ماده و در فضای تهی نیز وجود داشته باشند. در تعبیر هندسی نسببیت عام، چنین میدانهایی دینامیک ذاتی فضازمان را نشان می دهند.

در ساختن معادله (۱) از تانسور خمش استفاده می شود.تانسور خمش فضازمان (که خمینه‌ای با ویژگیهای مناسب در نظر گرفته میشود) را می توان بر حسب انتقال موازی یک بردار روی یک خم بسته تعریف کرد

$$dv^{\lambda} = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu\kappa}{}^{\lambda}(x_0) v^{\kappa} d\Sigma^{\mu\nu}, \qquad (2)$$

که در آن $d\Sigma^{\mu\nu} = -d\Sigma^{\mu\nu}$ عنصر سطح جهت دار در صفحه $x^{\mu} - x^{\nu}$ است که شامل نقطه x_0 است و v^{λ} مولفه‌های یک بردارند. یک خمینه تخت است اگر تصویر هر بردار پس از انتقال موازی روی یک

خم بسته دلخواه بر خود بردار منطبق شود. بنابر این شرط لازم و کافی برای تخت بودن یک خمینه در همسایگی نقطه p آن است که تانسور خمش $R_{\mu\nu\kappa}{}^{\lambda}$ درآنجا صفر شود. این شرط عمومی تر از فرض کردن متریک به صورت اقلیدسی یا مینکوفسکی

$$ds^{2} = \pm dx_{0}^{2} + \sum_{i=1}^{n} dx_{i}^{2} \tag{۳}$$

است. در واقع در هر خمینهٔ دیفرانسیل پذیر همواره می توان در همسایگی هر نقطه یک دستگاه مختصات محلی یافت که بر حسب آن عنصر خط به صورت بالا قطری باشد ولی در حالت کلی این کار به طور سراسری امکان پذیر نیست. حتی در مواردی که چنین قطری سازیی به طور سراسری ممکن است باز معادله (۳) کلی‌ترین جواب معادله‌های اینشتین برای فضازمان تهی نیست زیرا می توان به طور محلی مختصات را به دلخواه تبدیل کرد. صفر شدن خمش ریمانی به عنوان ضابطه تخت بودن در هر دستگاه مختصات ودر هر توپولوژی بر قرار و به این ترتیب اساسی تر است.

صفر شدن تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ مستلزم صفر شدن همه مولفه‌های تانسور ریمان نیست و به این دلیل می توان جوابهای غیر بدیهی برای معادلات اینشتین با ثابت کیهان‌شناخت صفر در نواحی تهی از مادهٔ فضازمان یافت. یک معیار ریاضی برای تمیز دادن جوابهای معادله‌های اینشتین در یک فضای تهی. از جوابهای این معادلات در حضور چشمه‌های ماده ، تانسور خمش وایل است که به صورت بخش بی رد[1] تانسور ریمان تعریف می شود

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu\kappa\lambda} &:= R_{\mu\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{d-2}(g_{\mu\nu}R_{\kappa\lambda} - g_{\nu\kappa}R_{\mu\lambda} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\kappa} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\kappa}) \\ &+ \frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})R. \end{aligned} \tag{۴}$$

در اینجا d بعد خمینه است. به طور مشابه میتوان $W_{\mu\nu}$ را به عنوان بخش بی رد تانسور ریچی تعریف کرد

$$W_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{d}g_{\mu\nu}R. \tag{۵}$$

که برای آن داریم $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$ و $W^{\mu}{}_{\mu} = 0$. به کمک این اشیا می توان تانسور ریمان را بر حسب

[1] traceless

مولفه‌های بی رد و نرده‌ای ریمان تجزیه کرد

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= W_{\mu\nu\kappa\lambda} + \frac{1}{d-2}(g_{\mu\nu}W_{\kappa\lambda} - g_{\nu\kappa}W_{\mu\lambda} - g_{\mu\lambda}W_{\nu\kappa} + g_{\nu\lambda}W_{\mu\kappa}) \\ &+ \frac{1}{d(d-1)}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})R. \end{aligned} \quad (6)$$

اکنون می توان جواب های معادلات اینشتین را بر حسب اینکه کدامیک از مولفه‌های مستقل $(W_{\mu\nu\kappa\lambda}, W_{\mu\nu}, R)$ صفر و کدام ناصفرند دسته‌بندی کرد. برای مثال متریک هایی که برای آنها تنها تانسور وایل ناصفر است، جوابهای معادلات اینشتین بدون چشمه $R_{\mu\nu} = 0$ هستند. همچنین خمینه‌هایی وجود دارند که برای آنها تنها نرده‌ای ریمان R ناصفر است. n–کره‌ها $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \rho^2$ و نیز همهٔ رویه‌های دو بعدی چنین‌اند. برای n–کره‌ها این امر نتیجه‌ای از تقارن کروی و نیز تقارن جایگشتی بین مولفه‌های تانسور خمش ریمان است. برای خمینه‌های دو بعدی همواره میتوان تانسور ریمان را به صورت زیر نوشت

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2} g\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}R = \frac{1}{2}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})R. \quad (7)$$

برای خمینه‌های ریمانی و شبه‌ریمانی بی‌تاب[2] در ابعاد بالاتر $(d\geq 3)$ تعداد مولفه‌های مستقل تانسور ریمان با در نظر گرفتن همهٔ تقارن های آن عبارت است از $N = \frac{1}{12}d^2(d^2-1)$. این شمارش به صورت زیر انجام می شود: تانسور ریمان نسبت به هرکدام از جفت اندیسهای $\mu\nu$ و $\kappa\lambda$ پادمتقارن است و از اینرو میتوان $R_{[\mu\nu][\kappa\lambda]}$ را یک ماتریس مربعی با بعد $n = \frac{1}{2}d(d-1)$ گرفت. همچنین این ماتریس $n\times n$ نسبت به تعویض این جفت اندیسها متقارن است پس $\frac{1}{2}n(n+1)$ عنصر مستقل دارد. علاوه بر اینها تقارن چرخه‌ای ناشی از اتحاد بیانچی

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa} + R_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa} + R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} = 0 \quad (8)$$

$\frac{1}{4!}d(d-1)(d-2)(d-3)$ قید جبری می‌افزاید. با ترکیب این نتایج N به دست می‌آید. برای $d\geq 3$ تعداد مولفه‌های تانسور ریچی بی‌رد $W_{\mu\nu}$ عبارت است از $N = \frac{1}{2}d(d+1) - 1$ و از آن نرده‌ای ریمان R برابر یک است. برای $d = 2$ تانسور خمش ریمان تنها یک مولفه مستقل، متناظر با نرده‌ای ریمان دارد. بنابراین برای $d\geq 3$ تعداد مولفه‌های مستقل تانسور وایل عبارت است از

[2] torsion free

$\frac{1}{12}d(d+1)(d+2)(d-3)$ که تنها برای $d \geq 4$ ناصفر و مثبت است. نتیجهٔ این بحث این است که تنها در فضازمان های با ابعاد $d \geq 4$ می توان جوابهای دینامیکی غیر بدیهی برای معادله‌های خلأ اینشتین یافت. در مورد $d = 4$ که اتفاقاً بعد جهان ماکروسکوپیک است، تانسور وایل و تانسور ریچی هر کدام ده مولفه مستقل دارند. از اینرو نیمی از مولفه‌های خمش توسط چشمهٔ ماده تعیین می‌شوند حال آنکه نیم دیگر دینامیک ذاتی فضازمان را توصیف می کنند.

۲−۲ امواج مسطح

اکنون دسته‌ای از جواب ها را در نظر می‌گیریم که به نام امواج مسطح شناخته می‌شوند و مثالی از انتشار میدانهای گرانشی غیر بدیهی در فضای تهی اند. منشأ این نامگذاری آن است که می توان دستگاه مختصاتی یافت که در آن چنین پیکربندیهایی (۱) با سرعت نور در راستای خطی مستقیم حرکت می‌کنند و (۲) جبهه موج صفحه‌ای تخت دارد و (۳) دوام متناهی دارند.

اکنون یک موج مسطح را در نظر می گیریم که در راستای محور z حرکت می کند وراستاهای عرضی توسط صفحه $x - y$ تعریف می‌شود. جواب هایی از معادلات اینشتین متناظر با عنصرخطی

$$ds^2 = -c^2dt^2 + f^2(t,z)dx^2 + g^2(t,z)dy^2 + dz^2 \qquad (9)$$

را لازم داریم. متریکی که توسط این عنصر خطی توصیف می‌شود دارای خصوصیات زیر است: در صفحه (t, z) فضا زمان تخت (مینکوفسکی) است. در راستاهای x و y فضا زمان در حالت کلی تخت نیست اما مقدار متریک فقط به فاصله در راستای محور z و زمان بستگی دارد و نه به مقدارهای x و y. بنابراین در دستگاه مختصات انتخاب شده مولفه‌های پتانسیلهای گرانشی (f, g) در تمام نقاط صفحه (x, y) یکسان است. این مولفه‌ها به یک نمی‌گرایند واز اینرو فضا زمان در مقیاس بزرگ به طور مجانبی مینکوفسکی نمی‌شود. امواج گرانشی در چنین ویژگی هایی شبیه امواج الکترومغناطیسی هستند که در هر لحظه مشخص در هر نقطه راستاهای عرضی دامنهٔ یکسان دارند. ویژگی دیگر آن است که متریک در $f = 0$ یا $g = 0$ معکوس ندارد ودر نتیجه ارتباط ها تکین می‌شوند. چنین نقاطی نیاز به مراقبت خاص دارند.