دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران مرکزی
دانشکده علوم ، گروه فیزیک
پاین نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.SC)

گرایش : ذرات بنیادی و نطریه میدان

عنوان :
اثر نوفه روی درهمتنیدگی ثبات کوانتومی

استاد راهنما :
دکتر کوروش آقایار

استاد مشاور :
دکتر سلیمه کیمیاگر

پژوهشگر :
زهره خلیلی

تابستان ۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران مرکزی
دانشکده علوم ، گروه فیزیک
پاین نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.SC)

گرایش : ذرات بنیادی و نطریه میدان

عنوان :
اثر نوفه روی درهمتنیدگی ثبات کوانتومی

استاد راهنما :
دکتر کوروش آقایار

استاد مشاور :
دکتر سلیمه کیمیاگر

پژوهشگر :
زهره خلیلی

تابستان ۹۲

به پاس عشق جاودانت و گرمای امیدبخش وجودت که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب بزرگت که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهت به شجاعت می گراید.

و به پاس محبت های بی دریغت که هرگز فروکش نمی کند.

این مجموعه را به پدرعزیزم تقدیم می کنم.

با سپاس از همه اساتید و کسانی که مرا در تهیه این پایان نامه یاری نمودند.

بسمه تعالي

درتاريخ :۹۲,۵,۲۸
دانشجوی کارشناسي ارشد خانم زهره خليلی از پايان نامه خود دفاع نموده و با نمره ۱۸ بحروف هيجده و با درجه بسيار خوب مورد تصويب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

فهرست

فصل اول .....

مقدمه .....

۱-۱کیوبیت ۲

۱-۲نقاط کوانتومی ۳

۱-۳ثبات کوانتومی ٤

۱-٤اپراتور چگالی ٥

۱-٤-۱عملگر چگالی برای حالتهای خالص ٦

۱-٤-۲تحول زمانی ماتریس چگالی ۹

۱-٤-۳حالتهای کاملا آمیخته ۱۱

۱-٤-٤رد جزئی و عملگرچگالی کاهش یافته : ۱۱

۱-٥گیت های کوانتومی ۱۳

۱-٥-۱گیت های منطقی کلاسیکی ۱٤

۱-٥-۲گیت های تک کیوبیت ۱۹

۱-٥-۳برخی گیت های تک کیوبیتی ۲۱

۱-٥-٤ به توان رساندن ۲۲

۱-٦در همتنیدگی ۲٤

۱-٦-۱کاربرد در ذرات بنیادی ۲۷

۱-٦-۲نمایش پائولی ۲۸

۱-٦-۳ وفاداری درهمتنیدگی ۲۸
۱-٦-٤کاربرد حالت های بل برای نمایش اپراتور چگالی ۲۹
۱-٦-٥تجزیه ی اسمیدت ۲۹
۱-٦-٦پالایش ،خالص سازی ۳۰
۱-۷کوانتوم نویز ۳۱
۱-۷-۱ خطاهای تک کیوبیتی ۳۲
۱-۷-۲ عملیات کوانتومی و اپراتورهای کراس ۳٥
۱-۷-۳ کانال ناقطبی ۳۷
۱-۷-٤ کانال های بیت فیلیپ و فاز فیلیپ ۳۹
۷۱-٥میرایی دامنه ٤۰
۱-۷-٦میرایی فاز ٤۳
فصل دوم.....
پیشینه پژوهش ٤٥
۲-۱ مقیاس درهمتنیدگی ٤٦
۲-۲ ماتریس های پائولی ٥۰
۲-۳ درهمتنیدگی در کانالهای نویز محلی ٥۰
فصل سوم.....
۳-۱ درهمتنیدگی سیستم سه کیوبیتی ٥۲
۳-۲ محاسبه درهمتنیدگی سیستم سه کیوبیتی تحت تاثیر نوفه ٦۹

۳-۲-۱ کانالهای تک طرفه ٦٩

۳-۲-۲ نمودارها ٨٦

نتیجه گیری.....

پیشنهادات .....

منابع و ماخذ .....

چکیده انگلیسی .....

فصل اول

مقدمه

برای شبیه سازی کوانتومی، کامپیوترها ی کوانتومی به طور موثر تر نسبت به کامپیوترهای کلاسیکی می توانند انواع وظایف محاسباتی را انجام دهند.مشابه کامپیوترهای کلاسیکی ،این کامپیوترها دارای بخش ثبات برای ذخیره موقت و پردازش داده ها می باشند که به ثبات کوانتومی معروف می باشد.ثبات های کوانتومی در قسمت ALU (واحد منطق محاسبات) و یا در قسمت حافظه برای پردازش کوانتومی بکار می روند.بررسی برخی از نوفه های کوانتومی ،یافتن نوفه ها و نحوه کاستن و کنترل انها در ثبات کوانتومی و تاثیر آنها روی درهمتنیدگی می تواند به استفاده موثرتر از درهمتنیدگی در داخل ثبات منجر شود.درهمتنیدگی از ویژگی های قابل توجه مکانیک کوانتوم است و در محاسبات کوانتومی و اطلاعات کوانتومی نقش اساسی دارد.به دلیل اهمیت اساسی اش برای پردازش اطلاعات کوانتومی،در سالهای اخیر توجه ها را به خود جلب کرده است.در این پایان نامه بعد از توضیحات مختصر و مهم در مورد کیوبیت ، نقاط کوانتومی ، گیت ، ماتریس چگالی ،درهمتنیدگی و نوفه،به بررسی درهمتنیدگی سیستم سه کیوبیتی در معرض نوفه می پردازیم.

۱-۱کیوبیت

هر سیستم کوانتومی دو حالته را می توان کیوبیت نامید.در نانو تکنولوژی نقطه کوانتومی، بیت کوانتومی یا کیوبیت نامیده می شود. کلمه کیوبیت[۱] مخفف بیت کوانتومی است. بیت پایه ای از محاسبات کوانتومی و واحد اطلاعات کوانتومی در کامپیوتر های دیجیتال می باشد، که برای انتقال اطلاعات کوانتومی به کار برده می شود. که امروزه انتقال اطلاعات بین اشکال مختلف فیزیکی به عنوان یکی از موضوعات اصلی در حال بررسی است. اطلاعات بیت ها به صفر و یک محدود می شود."کیوبیت ها (بیت های کوانتومی) بر خلاف بیت های معمولی می توانند هر زمان بیانگر بیش از یک عدد باشند. در واقع یک کیوبیت یک سیستم مکانیک کوانتوم دو حالته است مانند قطبش یک تک فوتون که دارای دو حالت پلاریزاسیون افقی و عمودی است. بنابر این در یک سیستم کلاسیکی، یک بیت فقط یکی ازدو حالت را دارد اما مکانیک کوانتوم اجازه می دهد که یک کیوبیت طور هم زمان به هر دو حالت را داشته باشد. کارشناسان رایانه چندین سال پیش دریافتند که نشان دادن هم زمان چندین مقدار عددی (استفاده از کیوبیت ها به جای بیت های معمولی) می تواند زمان لازم را برای حل برخی از مسائل عددی از بطور چشمگیری کاهش دهد.(مرتبه زمانی از حالت نمایی به حالت چند جمله ای کاهش می یابد. استفاده از کیوبیت ها در رایانه های کوانتومی یک تفاوت اساسی بین رایانه های کوانتومی و رایانه های فعلی که با ترانزیستور ها کار می کنند ایجاد کرده است و آن این است که در رایانه های کوانتومی می توان از خواص و قوانین فیزیک کوانتوم برای ذخیره سازی و انجام عملیات روی داده ها استفاده کرد. به طور واضح تر، یک رایانه کلاسیک بر اساس قوانین فیزیک کلاسیک دستورات از پیش تعیین شده را اجرا می کند در حالی که یک رایانه کوانتومی دستگاهی است که یک پدیده فیزیکی را بر اساس مکانیک کوانتوم به صورت منحصر به فردی در می آورد تا به صورت اساسی یک حالت جدید از پردازش اطلاعات را تشخیص دهد.

---

[۱] Qubit

۱-۲نقاط کوانتومی

نقاط کوانتومی[۲] دسته ایی از نانو ذرات می باشند و به صورت دستگاههای از مرتبه نانو هستند که شامل سیستم کوچکی از الکترون های آزاد هستند که افزایش و یا کاهش حتی یک الکترون نیز خواص برخی از آنها را به نحو ارزشمندی تغییر می دهد. ابعاد آنها بین ۱۰-۲ نانومتر است یعنی معادل کنار هم قرار گرفتن ۱۰ تا ۵۰ اتم است. در نانو تکنولوژی به نقاط کوانتومی، بیت های کوانتومی و یا کیوبیت گفته می شود. دو ویژگی مهم که نانوذرات را از دیگر گروه های متمایز، جدا می سازد:

۱)افزایش نسبت سطح به حجم نانو ذرات، که موجب می شود اتم های واقع در سطح نانو ذرات اثر بیشتری نسبت به اتم هایی که درون حجم آنها قرار دارند، بر روی خواص آنها داشته باشد

۲)تاثیرات کوانتومی نانو ذرات، که به عنوان ویژگی دوم آنها مطرح می شود.

ویژگی اصلی نقاط کوانتومی انتشار نور است که از این انتشار می توان برای پردازش اطلاعات در کامپیوتر های نانو مقیاس استفاده کرد. در واقع این نقاط توانایی نشر نور با رنگ های مختلف را دارند و رنگ نور به

اندازه کریستال آنها بستگی دارد. به دلیل ابعاد ریزشان خواص آنها با قوانین فیزیک کلاسیک قابل توجیه نیست و فقط فیزیک کوانتوم می تواند رفتارشان را توجیه کند. از طرف دیگر چون نقاط کوانتومی با یکدیگر برهمکنش دارند بنابراین حل معادله شرودینگر و بدست آوردن تابع موج مربوط به نقاط کوانتومی که اطلاعات مربوط به آنها از جمله احتمال را می دهد به سادگی امکان پذیر نخواهد بود. نقاط کوانتومی عملکرد جالبی دارند، و آن این است که قابلیت جذب هر الکترون وارده را دارا می باشند بنابراین با وجود دارا بودن یک هسته اتمی خاص، بر اساس الکترون های وارده به آنها، خواص و رفتار متفاوتی را از خود بروز می دهند. به عنوان مثال، نقاط کوانتومی در حالت داشتن ٦ الکترون منجر به تولید کربن مصنوعی و با ۷۹ الکترون منجر به تولید طلای مصنوعی می شوند. ضمنا اتم های مصنوعی به وجود آمده توسط این سیستم قابلیت پیوند با دیگر اتم ها را دارا هستند که این مسئله منجر به تولید ملکول های مصنوعی و در نهایت مواد مصنوعی خواهد گردید. علاوه بر

---

[۲] Quqntum Dot

آن نقاط کوانتومی بر خلاف اتم ها می توانند به راحتی به الکترون ها متصل شوند بنابراین یک ابزار عالی برای مطالعه خواص اتمی مواد هستند. مطالعات در مورد ذرات کوانتومی از سال ۱۹۷۰ میلادی شروع شد. این گروه از نانو ذرات نیمه هادی ، اولین بار توسط دانشمندان اکیمو[۳] و بروس[٤] در محلول کلوئیدی ساخته شد. اولین ساختار از ذرات کوانتومی در سال ۱۹۷۰، چاه کوانتومی[٥] بود که یک ساختار دو بعدی از ذرات کوانتومی بود. سیم های کوانتومی[٦] و نقاط کوانتومی که به ترتیب ساختار های یک بعدی و صفر بعدی از ذرات کوانتومی شناخته شده اند، بعد از آن تولید شدند.

۱-۳ ثبات کوانتومی

در کامپیوترهای کلاسیکی از رشته ای از بیت ها برای ساختن ثبات حافظه استفاده می کنیم.در ثبات اطلاعات را ذخیره می کنیم.در کامپیوترهای کوانتومی ثبات کوانتومی[۷] کیوبیت های چند گانه را در بر دارند.

وقتی که ثبات کلاسیکی متشکل از N بیت یک مقدار را در هر زمان نشان می دهد.(هر N ۰ یا ۱ می باشد) ،در حالیکه ثبات کوانتومی می تواند ۲^N حالت را نشان دهد. به شرط آنکه هر یک از N بیت ها در ثبات کوانتومی دربرهم نهی یکسان ازحالات ۰ و ۱ باشد. [۱]

برای مثال، برای ثبات از ۲ بیت ها ٤ حالت ممکنه : $|۱۱\rangle$،$|۱۰\rangle$،$|۰۱\rangle$،$|۰۰\rangle$ در ثبات کوانتومی ، حالت های ممکنه بصورت ترکیبات خطی اند:

$$\alpha_{۰۰}|۰۰\rangle + \alpha_{۰۱}|۰۱\rangle + \alpha_{۱۰}|۱۰\rangle + \alpha_{۱۱}|۱۱\rangle$$

---

[۳] Alexi Ekimov
[٤] Louis E.Brus
[٥] Quantum wells
[٦] Quantum wires
[۷] Quqntum register

که: $|\alpha_{..}|^{۲} + |\alpha_{.۱}|^{۲} + |\alpha_{۱.}|^{۲} + |\alpha_{۱۱}|^{۲} = ۱$

در ثبات کلاسیکی فقط یکی از ٤ عدد قابل حصول می باشد که عبارتند از:

۱۱،۰۱ ، ۱۰ ، ۰۰ ، اما در ثبات کوانتومی از ۲ کیوبیت ها می توانیم همه ی ٤ حالت ممکنه را به خاطربرهم نهی ۲ کیوبیت ذخیره کنیم. بطور مشابه برای ثبات کوانتومی با ۳ تا کیوبیت می توانیم ۸ حالت ذخیره کنیم. و برای ٤ کیوبیت ها ، ١٦ حالت . پس ۲^n حالت با n کیوبیت می توان ذخیره کرد.

وقتی کیوبیت ها در ثبات برای انطباق محاسبات قرار می گیرند. بطور همزمان به هر ترکیبی ازبرهم نهی قرار می گیرند. این رفتار خطی بودن عملگرها را در سیستم کوانتوم مکانیکی دنبال می کند که به آن موازی سازی کوانتومی می گویند که سرعت الگوریتم های کوانتومی را از الگوریتم های کلاسیکی بیشتر می کند.

۱-۴ اپراتور چگالی[۸]:

در بسیاری حالتهای مورد علاقه،به جای در نظر گرفتن سیستم کوانتومی منفرد،به مطالعه تعداد بسیاری از مجموعه ای از سیستم ها که انسامبل نامیده می شوند نیاز داریم.بعلاوه ، به جای اینکه سیستم تنها دریک حالت منفردباشد ، اعضای انسامبل می توانند در یکی از دو یا چند حالت مختلف کوانتومی پیدا شوند. این احتمال وجود دارد که یک عضو انسامبل در هر یک از این حالتها یافته شود. این را با مثال ساده ای می توان واضح ساخت. دو فضای هیلبرت با بردارهای پایه $\{|x\rangle،|y\rangle\}$ در

[۸] Density matrix

نظر می گیریم. تعداد زیادی N از سیستم ها را طوری آماده می سازیم که هر عضو از سیستم بتواند در یکی از دو بردارهای حالت زیر باشد.

$$|a\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$$

$$|b\rangle = \gamma|x\rangle + \delta|y\rangle$$

این حالتها نرمالیزه هستند،بنابراین $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$

برای سیستم در حالت $|a\rangle$ ،اگر اندازه گیری انجام پذیرد، احتمال $|\alpha|^2$ از پیدا کردن $|x\rangle$ وجود دارد وقتی که $|\beta|^2$ از پیدا کردن $|y\rangle$ می شود، و به طور مشابه برای حالت $|b\rangle$. حال فرض کنید که تعداد n_a سیستم برای این سیستم ها در حالت $|a\rangle$ فراهم کنیم و n_bازسیستم در حالت $|b\rangle$ از آنجائیکه تعداد کل سیستم ها N می باشد،اگر بر N تقسیم کنیم:

$$n_a + n_b = N$$

$$\frac{n_a}{N} + \frac{n_b}{N} = 1$$

این رابطه بیان می دارد که اگر بطور تصادفی عضوهای انسامبل را انتخاب کنیم،احتمال آن که سیستم در حالت $|a\rangle$ باشد با $p=\frac{n_a}{N}$ بدست می آید . البته جمع احتمالات باید یک شوند. بنابراین احتمال پیدا کردن اعضای انسامبل در حالت $|b\rangle$ ،برابر $P=1-\frac{n_a}{N}=1-$ می شود.

۱-۴-۱ عملگر چگالی برای حالتهای خالص:

سیستمی که در حالات شناخته شده ی $|\psi\rangle$ در نظر بگیرید. پایه های اورتونرمال $|u_i\rangle$وجود داشته باشد، می توانیم حالت سیستم را در آن پایه ها بسط دهیم.

$$|\psi\rangle=c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle+...+c_n|u_n\rangle$$

سپس،با استفاده از روش بورن ،احتمال وجود سیستم در حالت $|u_i\rangle$ را با $|c_i|^2$ بدست می آوریم. وقتی که سیستم در حالت معینی مانند این است،می گوییم که سیستم در حالت خالص[9] است. با توجه به بحث بالا، راههای مختلفی را برای توصیف حالتهای کوانتومی که می توانند به مخلوط اماری ،تعمیم یابند را جستجو می کنیم. این می تواند با اپراتوری که ان را اپراتور چگالی می نامیم،انجام شود. که با نماد ρ مشخص می کنیم. عملگر چگالی ،عملگر میانگینی است که اجازه می دهد مخلوط آماری را توصیف کنیم.در حالت خالص با ضرب خارجی از حالت این کار را انجام می دهیم. برای همین ،با پیدا کردن مقدار چشم داشتی یا میانگین برخی از اپراتورهای A شروع می کنیم، می نویسیم:

$$\langle \mathrm{A} \rangle = \langle \psi | \mathrm{A} | \psi \rangle$$

بسط دادن حالت در پایه های اروتونرمال مانند:

$$|\psi\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + \cdots + c_n|u_n\rangle$$

داریم:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = (c_1{}^*\langle u_1| + c_2{}^*\langle u_2| + \cdots + c_n{}^*\langle u_n|)\mathrm{A}(c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + \cdots + c_n|u_n\rangle) = \sum_{k.l=1}^{n} c_k{}^* c_l \langle u_k|A|u_l\rangle$$

ضریب در این بسط با اعداد مشخص می شود:

$$c_m = \langle u_m | \psi \rangle$$

می توانیم بنویسیم:

$$c_k^* c_l = \langle \psi | u_k \rangle \langle u_l | \psi \rangle = \langle u_l | \psi \rangle \langle \psi | u_k \rangle$$

می توانیم ترتیب جملات را تعویض کنیم زیرا:$\langle u_m|\psi \rangle = c_m$ فقط عدد مختلط است.

---

[9] pure

توجه کنید که عملگر تصویر بین بردارهای پایه قرار گرفته است:

$$c_k^* c_l = \langle u_l|\psi\rangle\langle\psi|u_k\rangle = \langle u_l|(|\psi\rangle\langle\psi|)|u_k\rangle$$

ما این را عملگر چگالی می نامیم و ان را با $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ مشخص می کنیم. [۲]بنابراین مقدار چشم داشتی یا مقدار متوسط عملگر با توجه به حالت $|\psi\rangle$ می توان نوشت:

$$\langle A\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} c_k^* c_l A_{kl} = \sum_{k,l=1}^{n} \langle u_l|(|\psi\rangle\langle\psi|)|u_k\rangle$$

عملگر چگالی برای حالت $|\psi\rangle$ برابر است با :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad (1-1)$$

مقدار چشم داشتی عملگر A را دوباره نوشته و سعی می کنیم که بتوانیم به صورت تریس بنویسیم.مقدار چشم داشتی یا متوسط اپراتور A را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle A\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} c_k^* c_l \langle u_k|A|u_l\rangle$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\langle u_l|\psi\rangle\langle\psi|u_k\rangle\langle u_k|A|u_l\rangle=\sum_{k,l=1}^{n}\langle u_l|\rho|u_k\rangle\langle u_k|A|u_l\rangle$$

برای نوشتن این مقدارچشم داشتی [۱۰]در جملات تریس،می توانیم از رابطه ی تمامیت استفاده کنیم.

[۳]به یاد بیاورید که: $\sum_n |u_k\rangle\langle u_k| = 1$

برای پایه اورتونرمال $|u_k\rangle$ است.

[۱۰] Expection Value

تعریف: استفاده از اپراتور چگالی برای یافتن مقدار چشم داشتی:

مقدار چشم داشتی از عملگر A را می توان در جملاتی ازعملگر چگالی مانند زیر نوشت:

$$\langle A\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \langle u_l|A|u_k\rangle\langle u_k|\rho|u_l\rangle$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\langle u_l|\,\rho(\sum_{k=1}^{n}|u_k\rangle\,\langle|u_k|)A|u_l\rangle$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\langle u_l|\rho A|u_l\rangle$$

$$=\mathrm{Tr}(\rho A) \qquad (2\text{-}1)$$

برای یافتن تریس عملگر چگالی می توانیم حالت $|\psi\rangle$ را در جملات پایه بسط دهیم.با فرض نرمالیزه بودن حالت و شرط $\sum|c_j|^2=1$ داریم:

$$\mathrm{Tr}(\rho)=\sum_j\langle u_j|\rho|u_j\rangle$$

$$=\sum_j\langle u_j|\psi\rangle\langle\psi|u_j\rangle$$

$$=\sum_j c_j c_j^*$$

$$=\sum_j|c_j|^2=1 \qquad (3\text{-}1)$$

پس ،تریس اپراتور چگالی همیشه ۱ است.

۱-۴-۲تحول زمانی ماتریس چگالی:

تحول زمانی اپراتور چگالی را می توان با به کار بردن معادله شرودینگر بدست آورد.[٤]با توجه به $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$:

و نیز $H = H^+$ ، می توان نوشت:

$$-i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi| = \langle\psi|H$$

اپراتور چگالی به صورت $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ نوشت و ، با بکار بردن دستور ضرب برای مشتق ، داریم :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)\langle\psi| + |\psi\rangle(\frac{d}{dt}\langle\psi|)$$

حال از نتایج معادله شرودینگر استفاده می کنیم.

$$\frac{d\rho}{dt} = (\frac{H}{i\hbar}|\psi\rangle)\langle\psi| + |\psi\rangle\left(\langle\psi|\frac{H}{-ih}\right) = \frac{H}{i\hbar}\rho - \rho\frac{H}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar}[H,\rho]$$

تحول زمانی اپراتور چگالی: $i\hbar\frac{d\rho}{dt} = [H,\rho]$ (۱-٤)

برای سیستم های بسته تحول زمانی اپراتور چگالی را می توان در جملات اپراتور واحد U نوشت.اگر اگر $\rho(t)$ اپراتور چگالی را در زمان t و $\rho(t_0)$ اپراتور چگالی در زمان اولیه t_0 باشند:

$$\rho(t) = U\rho(t_0)U^+ \qquad (۱-۵)$$

نهایتا،توجه کنید که $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

واضح است که اپراتور چگالی هرمیتی است، یعنی $\rho = \rho^+$

در مورد حالت های داریم:

$$\rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle(|\psi\rangle\langle\psi|)\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$$

اگر سیستم در حالت خالص $|\psi\rangle$ با اپراتور چگالی $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

باشد[۵] ،سپس $Tr(\rho^2) = 1$ (۱-٦)

۱-۴-۳حالتهای کاملا آمیخته :

یک حالت کاملا آمیخته را می توان در طول زنجیره ای از عملگرهای چگالی به همراه یک حالت خالص در طرف دیگر در نظر گرفته شود. در حالت های کاملا آمیخته ،احتمال برای اینکه سیستم در هر حالت داده شده باشد، یکسان یا مساوی است. در این حالت عملگر چگالی ضرب ثابتی از ماتریس همانی هست. اگر فضای حالت n بعد داشته باشد،

$$\rho = \frac{۱}{n} I \qquad (۷-۱)$$

چون $I^۲ = I$ ، داریم $\rho^۲ = \frac{۱}{n^۲} I$

علاوه بر این ، در n بعد ، $Tr(I) = n$ است.[٦] بنابراین برای حالت کاملا مخلوط داریم

$$Tr(\rho^۲) = Tr\left(\frac{۱}{n^۲} I\right) = \frac{۱}{n^۲} Tr(I) = \frac{۱}{n} \qquad (۸-۱)$$

در اغلب حالتها مطلوب است از n=۲استفاده کنیم. برای n=۲ محدوده پایین ، به وسیله حالت کاملا مخلوط داده شده ، که $Tr(\rho^۲) = \frac{۱}{۲}$ است. درصورتیکه حد بالا برای حالت خالص داده شده می باشد که برابر با $Tr(\rho^۲) = ۱$ است.

۱-۴-۴ رد جزئی و عملگرچگالی کاهش یافته :

یکی از کاربردهای مهم عملگر چگالی در توصیف سیستم های آمیخته است- سیستمی که از دو یا چند زیر سیستم اختصاصی ساخته شده است.به درهمتنیدگی توجه کنید.اپراتور چگالی وسیله ای مفید و پر کاربرد برای توصیف و کار با حالتهای زیر سیستم ها می باشد. ، برای شروع ،سیستمی مخلوط داریم که الیس قسمتی از ان و باب بخش دیگر ان سیستم را دارد و در جهت های مخالف هستند.

حالت کامل سیستم شامل اطلاعات در مورد هر دو زیر سیستم ها است،اما بطور اشکار باب ، سیستمی که دور از الیس است،در مورد نصف دیگر سیستم چیزی نمی داند مگر اینکه الیس به ان در