بسم الله الرحمن الرحیم

۱۱۳۲۷۳

۸۷/۱/۱۰۸۳۵۰
۸۸-۱۲۶

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر

موضوع

استفاده از توابع متعامد گویا برای حل مسایل سیستم‌های دینامیکی

استاد راهنما

دکتر کورش پرند

استاد مشاور

دکتر سهرابعلی یوسفی

۱۳۸۸/۱۱/۲۴

نگارش

مهدی شاهینی

پاییز ۸۷

۱۱۳۲۷۳

تقدیم به

پدر و مادر گرامی،

همسر عزیز،

خواهر و برادر مهربانم

قدردانی

وظیفه خویش می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ اساتید گرانقدر آقایان دکتر پرند و دکتر یوسفی که با راهنمایی و مشاوره این عزیزان توانستم این پروژه را به اتمام برسانم، تشکر کنم.

از آقایان دکتر دهقان و دکتر آذری که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند و نظرات آنان مرا در انجام هرچه بهتر این پایان‌نامه یاری نمود و همچنین خانم دکتر اسلامی مدیر گروه علوم کامپیوتر کمال تشکر را دارم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم که از همه اساتیدی که در دوره‌های مختلف تحصیلی چراغ راه علم و دانش را بر من روشن کرده و باعث رسیدن من به این مرحله از دریای بیکران دانش گشته‌اند سپاسگزاری نمایم.

همچنین از دوستان عزیزم خصوصا آقایان زارع‌پور و تقوی که مرا یاری نمودند، متشکرم.

استفاده از توابع متعامد گویا برای حل مسایل سیستم‌های دینامیکی

چکیده

رشته علوم کامپیوتر و خصوصا گرایش محاسبات علمی رابطه خوبی بین مسایل و مشکلات موجود در جامعه و علم ریاضی برقرار کرده است. بسیاری از این مسایل که در علوم فیزیک و مهندسی روی می‌دهند به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و غیرخطی ظاهر می‌شوند. هدف از این پایان‌نامه ارائه راه حل برای برخی از این مسایل است که در بازه نیمه‌متناهی پدیدار می‌گردند.

در این پایان‌نامه ابتدا روش‌های طیفی و شیوه کاربرد آن‌ها در بازه‌های نیمه‌متناهی را معرفی می‌کنیم. سپس با استفاده از نگاشت جبری چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر را به بازه نیمه‌متناهی نگاشته و توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر را می‌سازیم. آنگاه با استفاده از توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر و با روش هم‌مکانی مسایل غیرخطی در بازه‌های نیمه‌متناهی را حل می‌کنیم.

از این پایان‌نامه دو مقاله در مجلات بین‌المللی Physics Letters A و International Journal of Information and System Sciences به چاپ رسیده است. همچنین مقالاتی نیز برای چاپ در مجلات دیگر ارسال شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روش‌های طیفی، بازه های نیمه متناهی، توابع گویای چبیشف، توابع گویای لژاندر، معادله لین-امدن، معادله توماس-فرمی، معادله بلاسیوس

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیلی را که در کاربردهای عملی پدیدار می‌شوند، به ندرت می‌توان به صورت دقیق حل کرد. حتی زمانی که جواب‌های تحلیلی نزدیکی بیابیم، استفاده از چنین جواب‌هایی در عمل و برای پیاده‌سازی، غیرممکن است. اما از سوی دیگر، شیوه‌های عددی می‌توانند به خوبی برای حل معادلات دیفرانسیل خوش فرم به کار روند. شیوه‌های عددی پرکاربرد عبارتند از:

- عنصر متناهی
- حجم متناهی
- تفاضل متناهی
- روش‌های طیفی

روش‌های عنصر متناهی به طور اخص برای مسایل دارای هندسه پیچیده، برای مثال ساختارهای مهندسی سه بعدی، مناسبند؛ در حالی که روش‌های طیفی دقت بالاتر و کارایی بهتر را در هندسه‌های ساده مانند جعبه‌ها و کره‌ها (اگر چه می‌توانند به صورت اشکال پیچیده‌تری ترکیب شوند) ارائه می‌دهد.

روش‌های عنصر متناهی، شیوه بسیار مناسبی برای تولید و کنترل برنامه‌های پیچیده و به دست آوردن نتایج دارای تخمین‌های خطای نسبتا خوب، می‌باشد. در روش‌های عنصر متناهی ابتدا بازه به تعداد متناهی زیربازه تقسیم می‌شود، سپس جواب به صورت ترکیب خطی توابع تکه‌ای پیوسته که روی این زیربازه‌های کوچک غیرصفرند تقریب زده می‌شود؛ در حالی که روش طیفی جواب را به صورت ترکیب خطی توابع پیوسته که روی تمام بازه جواب غیرصفرند، برای مثال چندجمله‌ای‌های چبیشف یا توابع مثلثاتی، تقریب می‌زند. به همین دلیل روش‌های عنصر متناهی را روشی محلی و روش‌های طیفی را روشی سراسری می‌نامند. این یکی از دلایلی است که در هندسه‌های پیچیده روش عنصر متناهی مناسب‌تر می‌باشد در حالی که هنگامی که هندسه مسئله نسبتا هموار و منظم است روش‌های طیفی بهتر کار می‌کند.

در حل مسایل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وابسته به زمان، روش طیفی توانایی‌های قابل توجه‌ای دارد. در حال حاضر روش‌های طیفی در بسیاری از زمینه‌ها بسیار موفق است مانند مدل‌سازی آشفتگی، پیش‌بینی وضع هوا، امواج غیرخطی، مدل‌سازی زلزله و ....

در این پایان‌نامه از روش هم‌مکانی طیفی بر پایه توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر برای حل عددی مسایل در بازه نیمه‌متناهی استفاده گردیده است. در فصل ۱ با روش‌های طیفی و تاریخچه آن آشنا می‌شویم. روش‌های طیفی در بازه‌های نیمه‌متناهی و توابع گویای چبیشف و توابع گویای لژاندر در فصل ۲ معرفی شده‌اند. کاربرد این روش در مسایل و نتایج عددی حاصل از آن، در فصل ۳ آورده شده است. فصل ۴ نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

فصل ۱

روش‌های طیفی

در سه دهه گذشته روش‌های طیفی به سرعت گسترش یافته‌اند. این روش‌ها به طور فراوان در زمینه‌های گوناگون مانند انتقال گرما، مکانیک سیالات، مکانیک کوانتوم و ... به کار رفته‌اند. در حال حاضر نیز همانند روش‌های تفاضل متناهی و عنصر متناهی به طور گسترده‌ای برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به کار می‌روند.

ویژگی فوق‌العاده روش‌های طیفی دقت بالا و همگرایی به اصطلاح از مرتبه نامتناهی[1] است. ایده اصلی این روش‌ها از آنالیز فوریه سرچشمه می‌گیرد. روش‌های طیفی معمول روش هم‌مکانی، روش گالرکین و روش تاو می‌باشند که همه‌ی آن‌ها به نوعی از روش باقیمانده‌های وزنی نشات می‌گیرد [۱، ۲، ۳].

در این فصل ابتدا روش باقیمانده‌های وزنی را شرح می‌دهیم، آنگاه به معرفی روش‌های طیفی معمول می‌پردازیم. در انتها نحوه انتخاب توابع پایه و گره‌های هم‌مکانی مناسب را بیان می‌کنیم.

۱.۱ روش باقیمانده‌های وزنی

همانطور که گفته شد برخی از روش‌های طیفی از روش باقیمانده‌های وزنی سرچشمه می‌گیرد. این بخش را به معرفی این روش و زیرشاخه‌های آن اختصاص می‌دهیم.

روش باقیمانده‌های وزنی یک روش کلی برای به دست آوردن جواب‌های معادلات دیفرانسیل است. در این روش جواب معادله به صورت مجموعی از توابع سعی مشخص به همراه یک سری ضرایب تعدیل‌پذیر ارائه می‌گردد. جواب بهتر به کمک این ضرایب یافت می‌شود. عناصر کلیدی در این روش توابع سعی و توابع آزمون می‌باشند. توابع سعی به عنوان توابع پایه در بسط سری بریده شده جواب به کار می‌روند. توابع آزمون به کار می‌روند تا سری بریده شده را در معادله دیفرانسیل تا حد ممکن برقرار سازند. این امر به کمک کمینه‌سازی تابع باقیمانده انجام می‌گیرد.

[1] این همگرایی را همگرایی طیفی و یا همگرایی نمایی نیز گویند.

معرفی این روش برای اولین بار به کراندال [۴] نسبت داده می‌شود. هر چند ایده مشابهی توسط کولاتز [۵] با نام اصول توزیع خطا معرفی شد. این روش به طور جدی توسط فینلیسون و اسکریون [۶]، ویچنوتسکی [۷] و فینلیسون [۸] گسترش یافت.

معادله دیفرانسیل

$$L(u) = 0, \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که باید تحت شرایط اولیه $I(u) = 0$ و شرایط مرزی $S(u) = 0$ حل شود. برای حل این معادله در ابتدا جواب تقریبی u_N را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_j(x), \tag{۱.۲}$$

که a_jها ضرایب بسط و φ_jها توابع تحلیلی شناخته شده‌ای هستند. این توابع را اغلب، توابع سعی، توابع تقریب و یا توابع بسط و معادله (۲.۱) را جواب سعی گویند. در این روش هدف یافتن ضرایب a_j می‌باشد. چنانچه معادله (۱.۱) وابسته به زمان نیز باشد در این صورت جواب سعی به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$u_N(x,t) = \sum_{j=0}^{N} a_j(t) \varphi_j(x). \tag{۱.۳}$$

برای حل معادله (۱.۱) جواب سعی را در آن جایگزین کرده و تابع باقیمانده را تشکیل می‌دهیم:

$$Res(x; a_0, \ldots, a_N) = L(u_N). \tag{۱.۴}$$

برای شرایط اولیه و مرزی نیز داریم:

$$\begin{cases} Res_I(x; a_0, \ldots, a_N) = I(u_N), \\ Res_b(x; a_0, \ldots, a_N) = S(u_N). \end{cases} \tag{۱.۵}$$

جواب تقریبی را می‌توان به گونه‌ای ساخت که

۱. معادله دیفرانسیل برقرار باشد، یعنی $Res(x) = 0$. این حالت را روش مرزی می‌نامند.

۲. شرایط مرزی برقرار باشد، یعنی $Res_b(x) = 0$. این حالت را روش درونی می‌نامند.

۳. نه معادله دیفرانسیل و نه شرایط مرزی برقرار باشند. این حالت را روش آمیخته می‌نامند.

در اینجا روش باقیمانده‌های وزنی بر پایه روش درونی معرفی می‌شوند یعنی توابع سعی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $u_N(x)$ در شرایط مرزی و شرایط اولیه (در صورت امکان) دقیقا برقرار باشد. فرمولبندی ارائه شده را می‌توان برای روش‌های مرزی و آمیخته نیز توسعه داد.

برای به دست آوردن معادلات مربوط به a_jها ضرب داخلی باقیمانده وزنی برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\langle Res(x; a_0, ..., a_N), \psi_k(x)\rangle = \int_D Res(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad k = 0, ..., N. \tag{۱.۶}$$

روش نامش را از این رابطه می‌گیرد. ψ_kها راتوابع آزمون و به ندرت توابع وزن نیز می‌نامند.

چون برای یافتن ضرایب a_j به روابط مستقل نیاز است، ψ_kها باید توابع مستقل باشند. اگر ψ_kها اعضای مجموعه کاملی از توابع باشند، آنگاه هنگامی که $N \to \infty$، معادله (۶.۱) می‌رساند که باقیمانده معادله باید با هر عضو مجموعه کامل توابع متعامد باشد. این ایجاب می‌کند که باقیمانده در حد $N \to \infty$ به صفر همگرا شود. اگر باقیمانده به صفر همگرا شود و معادله (۲.۱) دقیقا در شرایط مرزی صدق کند، آنگاه انتظار می‌رود جواب تقریبی u_N به جواب دقیق معادله (۱.۱) همگرا شود، یعنی

$$\lim_{N\to\infty} \|u_N - u\|_2 = 0. \tag{۱.۷}$$

این را می‌توان با همگرایی یکنواخت که به صورت زیر تعریف می‌شود مقایسه کرد:

$$\lim_{N\to\infty} \|u_N - u\|_\infty = 0, \tag{۱.۸}$$

که

$$\|u_N - u\|_\infty = \max|u_N - u|. \tag{۱.۹}$$

معادله (۶.۱) حالت ضعیفی از معادله

$$\langle L(u), \psi\rangle = 0, \tag{۱.۱۰}$$

است که در اینجا ψ تابع آزمون کلی است.

ضرب داخلی استفاده شده در معادله (۶.۱) برای بازه پیوسته تعریف شده است. این ضرب می‌تواند به صورت گسسته نیز تعریف گردد. استفاده از ضرب داخلی گسسته به روش گسسته باقیمانده‌های وزنی منجر می‌شود که تکنیک مناسبی برای مسایل مقدار مرزی گسسته می‌باشد.

اهمیت معادله (۶.۱) این است که انتخاب‌های متفاوت از تابع وزن با روش‌های مختلف متناظر می‌باشد. رایج‌ترین این روش‌ها در اینجا توضیح داده شده‌اند.

۱.۱.۱ روش زیردامنه

در روش زیردامنه، دامنه به N زیربازه D_i تقسیم می‌شود که ممکن است اشتراک نیز داشته باشند. آنگاه تابع آزمون بدین صورت انتخاب می‌شود:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_k, \\ 0, & x \notin D_k. \end{cases} \tag{۱.۱۱}$$

با این انتخاب توابع آزمون، معادلات لازم برای یافتن ضرایب a_k به این شکل درمی‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle Res(x), \psi_k(x) \rangle &= \int_D Res(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_i \int_{D_i} Res(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{D_k} Res(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x, \qquad k = 0, 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{۱.۱۲}$$

در این روش با افزایش N معادله روی زیربازه‌های کوچک و کوچکتر و در نهایت احتمالا همه جا برقرار می‌گردد. این روش، مشابه روش حجم متناهی است که روش شناخته شده‌ای در مکانیک سیالات و انتقال گرماست. روش زیردامنه از کار بیزنو و کچ [۹] سرچشمه می‌گیرد و در مقالات [۱۰، ۱۱، ۱۲] نیز کاربردهایی از آن وجود دارد. توسعه جدیدی از این روش با عنوان روش روابط انتگرالی شناخته می‌شود.

۲.۱.۱ روش هم‌مکانی

روش هم‌مکانی ساده‌ترین روش باقیمانده‌های وزنی است. در این روش تابع آزمون به صورت

$$\psi_k(x) = \delta(x - x_k), \tag{۱.۱۳}$$

در نظر گرفته می‌شود که δ، تابع دلتای دیراک است. بنا بر ویژگی دلتای دیراک که

$$\langle u, \delta(x - x_k) \rangle = u(x_k), \tag{۱.۱۴}$$

معادله (۶.۱) به

$$Res(x_k; a_0, \ldots, a_N) = 0, \qquad k = 0, \ldots, N, \tag{۱.۱۵}$$

تبدیل می‌شود، یعنی معادله دیفرانسیل نیاز است تا دقیقا در $N + 1$ گره هم‌مکانی صادق باشد. در اینجا با افزایش مقدار N، تابع باقیمانده در نقاط بیشتر و بیشتری و احتمالا همه جا صفر می‌گردد. این روش برای

نخستین بار توسط اسلتر [۱۳] و بارتا [۱۴] برای حل معادلات دیفرانسیل به کار رفت. کاربردهای نوین‌تر از آن و همچنین نامگذاری این روش به فریزر و همکاران [۱۵] برمی‌گردد. آن‌ها توابع سعی مختلفی را به کار بردند و از نقاط هم‌مکانی دلخواه استفاده کردند. لانکزوس [۱۶] جواب را به صورت چندجمله‌ای‌های چبیشف بسط داد و از ریشه‌های چبیشف برای نقاط هم‌مکانی استفاده کرد. جین [۱۷] یک هم‌مکانی با نقاط فراوان را با استفاده از صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف معرفی کرد. او از ویژگی کمینه‌سازی بیشینه خطای چبیشف استفاده نمود. وی این روش را با روش نیوتن ترکیب کرد تا جواب‌های بهتری به دست آورد. ویلادسن و استوارت [۱۸] روش لانکزوس را احیا کرده و روشی به نام هم‌مکانی متعامد معرفی کردند که اثبات شده است بسیار مناسب می‌باشد. آن‌ها صفرهای چندجمله‌ای‌های ژاکوبی را در معادله قرار دادند و از چندجمله‌ای‌های چبیشف به عنوان توابع سعی استفاده کردند.

۳.۱.۱ روش کمترین مربعات

در روش کمترین مربعات به جای کمینه‌سازی مستقیم تابع باقیمانده، a_kها به قسمی انتخاب می‌شوند که

$$S = \int_D Res(x)Res(x)\mathrm{d}x = \langle Res, Res\rangle, \qquad (۱.۱۶)$$

کمینه باشد. دلیل نامگذاری روش نیز همین می‌باشد. برای کمینه‌سازی تابع S، مشتقات آن نسبت به ضرایب مجهول a_k در معادله (۲.۱) را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\int_D Res\frac{\partial Res}{\partial a_k}\mathrm{d}x = 0. \qquad (۱.۱۷)$$

بنابراین توابع آزمون به صورت

$$\psi_k = \frac{\partial Res}{\partial a_k}, \qquad (۱.۱۸)$$

خواهند بود.

این روش به طور ذاتی برای مسایل یکنواخت مناسب است، که در آن انتظار می‌رود کمینه سازی مربع باقیمانده، کمترین مقدار $\|u_N - u\|$ را ایجاب کند. روش کمترین مربعات اغلب به معادلات سنگینی منجر می‌شود و در حالت کلی کاربرد آن به تنهایی خوب نیست. این روش را می‌توان به عنوان یک وزن اضافه برای زمان، در مسایل معادلات دیفرانسیل جزیی در نظر گرفت.

روش کمترین مربعات در سال ۱۹۷۵ توسط گاوس برای تخمین حداقل مربعات ایجاد شد و قدیمی‌ترین روش باقیمانده‌های وزنی است.

۴.۱.۱ روش گشتاورها

در روش گشتاورها توابع آزمون

$$\psi_k(x) = x^k, \tag{۱.۱۹}$$

انتخاب می‌شود. دلیل نامگذاری روش نیز همین می‌باشد، زیرا در آمار به $\langle x^i, f(x)\rangle$، iامین گشتاور $f(x)$ گفته می‌شود. توان‌های بالای x بر اثر خطای گرد کردن وابسته خطی می‌شوند. به همین دلیل استفاده از آن‌ها به عنوان توابع سعی مناسب نیست. این روش تنها زمانی مناسب است که N بسیار کوچک باشد و همچنین محاسبات با دقت بالایی انجام پذیرد. در حالتی که توابع سعی توان‌های x باشند، روش گشتاورها با روش گالرکین هم‌ارز است.

روش گشتاورها توسط یامادا [۱۹، ۲۰، ۲۱] و فوجیتا [۲۲] گسترش یافت. روش روابط انتگرالی که بعدها توسط درودنیتسین [۲۳] معرفی شد به طور نزدیکی با این روش مرتبط است. در روش روابط انتگرالی تابع وزن عبارتست از

$$\psi_k(x) = (1-x)^k. \tag{۱.۲۰}$$

۵.۱.۱ روش گالرکین

روش گالرکین را می‌توان به عنوان بهبودی از روش کمترین مربعات در نظر گرفت که در آن به جای استفاده از مشتق تابع باقیمانده نسبت به ضرایب مجهول، به عنوان توابع آزمون، مشتقات جواب سعی نسبت به ضرایب a_k را به عنوان توابع آزمون انتخاب می‌کنیم:

$$\psi_k(x) = \frac{\partial u_N}{\partial a_k} = \varphi_k(x). \tag{۱.۲۱}$$

بنابراین در روش گالرکین توابع وزن از همان خانواده توابع سعی می‌باشد.

در این روش توابع آزمون و سعی باید از N تابع اول مجموعه کاملی از توابع انتخاب شوند. این شرط لازم برای همگرایی به جواب دقیق، هنگامی که $N \to \infty$، می‌باشد. همچنین توابع سعی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در شرایط مرزی همگن صدق کنند. تعامد توابع سعی، یافتن جواب برای Nهای بزرگتر را آسان‌تر می‌سازد.

روش گالرکین توسط مهندسی روسی به همین نام در سال ۱۹۱۵ معرفی گردید. بسیاری از کاربردهای این روش توسط کولاتز [۵]، فینلیسون و اسکریون [۶]، فینلیسون [۸]، دانکن [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷]، دانکن و لیندزی [۲۸]، ایمز [۲۹] و فلچر [۳۰] ارائه شده است.

روش‌های گالرکین نوین‌تر شامل روش طیفی گالرکین و روش عنصر متناهی گالرکین هستند. در روش عنصر متناهی گالرکین، نوع انتخاب توابع سعی از اهمیت کمتری برخوردار است در حالی که در روش طیفی نحوه انتخاب این توابع تاثیر زیادی در نرخ همگرایی دارد.

۲.۱ روش‌های طیفی

در بخش پیشین شالوده اصلی روش‌های طیفی یعنی، روش باقیمانده‌های وزنی را معرفی کردیم. در این بخش روش‌های طیفی را بهتر و کاملتر معرفی می‌کنیم.

روش‌های طیفی را می‌توان به عنوان توسعه‌ای از روش باقیمانده های وزنی در نظر گرفت. همانطور که گفته شد، ایده اصلی این روش، تقریب تابع مجهول $u(x)$ به صورت مجموعی از توابع پایه و سپس جایگذاری این تابع تقریب در معادله و تشکیل معادله باقیمانده می‌باشد. انتخاب توابع پایه یکی از ویژگی‌هایی است که روش‌های طیفی را از روش‌های عنصر متناهی و تفاضل متناهی متمایز می‌کند. توابع پایه در روش‌های طیفی، توابع عمومی بی‌نهایت مشتق‌پذیر (برای نمونه جواب‌های معادلات ویژه اشتورم_لیوویل) می‌باشند. این در حالی است که در روش‌های عنصر متناهی دامنه به اجزای کوچکی تقسیم می‌شود و برای هر جزء یک تابع سعی مشخص می‌گردد. به همین دلیل روش عنصر متناهی برای مسائل دارای هندسه پیچیده مناسب است.

چون برای جواب دقیق، تابع باقیمانده برابر صفر می‌باشد، بنابراین هدف در اینجا یافتن ضرایب a_j است به قسمی که تابع باقیمانده کمینه گردد. کمینه‌سازی تابع باقیمانده به کمک توابع آزمون انجام می‌پذیرد. انتخاب‌های متفاوت از توابع آزمون، روش‌های متفاوتی را به وجود می‌آورد.

روش‌های طیفی به دو زیرشاخه اصلی تقسیم می‌شوند:

- روش‌های درونیاب یا شبه‌طیفی
- روش‌های غیردرونیاب

روش‌های شبه‌طیفی با هر مجموعه پایه، شبکه‌ای از نقاط (گره‌ها) را وابسته می‌سازد که نقاط هم‌مکانی یا درونیابی نامیده می‌شوند. در این روش ضرایب تابعی معلوم مانند $f(x)$ با برابر قرار دادن مقدار سری بریده شده و مقدار تابع $f(x)$ در هر نقطه از شبکه به دست می‌آید. به طور مشابه ضرایب a_j از جواب تقریبی معادله دیفرانسیل توسط برابر قرار دادن تابع باقیمانده با صفر در نقاط هم‌مکانی حاصل می‌شود:

$$Res(x_k) = 0, \qquad k = 0, ..., N. \tag{۱.۲۲}$$

به عبارت دیگر روش شبه‌طیفی بیان می‌دارد که معادله دیفرانسیل باید دقیقا در مجموعه‌ای از گره‌ها برقرار باشد. به طور واضح هرچه N افزایش یابد باقیمانده در نقاط بیشتری صفر خواهد شد. بنابراین $u_N(x)$ با افزایش N به $u(x)$ همگرا می‌شود. روش‌های این زیرشاخه را روش نقاط انتخابی یا هم‌مکانی نیز می‌نامند.

هر چند روش هم‌مکانی نسبت به روش شبه‌طیفی کلی‌تر است و در روش‌های عنصر متناهی به همراه توابع محلی نیز دیده می‌شود، اما در این پایان‌نامه منظور از روش هم‌مکانی، همان روش شبه‌طیفی می‌باشد که تنها با توابع پایه عمومی به کار می‌رود.

زیرشاخه غیردرونیاب شامل روش‌های گالرکین و تاو می‌باشد. در این روش‌ها هیچ شبکه‌ای از نقاط درونیاب وجود ندارد. ضرایب تابعی معلوم مانند $f(x)$ توسط ضرب $f(x)$ در تابعی پایه و سپس انتگرالگیری (منظور ضرب داخلی است) محاسبه می‌شود. از لحاظ تاریخی ابتدا روش‌های غیردرونیاب گسترش یافتند، به همین دلیل برخی عنوان طیفی را فقط برای این روش‌ها به کار می‌برند.

همانطور که گفته شد در روش گالرکین توابع سعی از مجموعه کاملی از توابع انتخاب می‌شوند، و چون توابع آزمون و سعی از یک خانواده می‌باشند بنابراین با استفاده از تعداد کافی جمله این روش قابلیت نمایش جواب دقیق را دارد. در واقع روش گالرکین تابع باقیمانده را از طریق متعامدسازی آن با هر عضو مجموعه کامل توابع (در حد $N \to \infty$) صفر می‌کند.

روش گالرکین را می‌توان به صورت دیگری نیز تعریف نمود:

پس از جایگذاری تابع تقریب u_N در معادله، تابع باقیمانده را نیز باید به صورت مجموع توابع پایه نوشت:

$$Res(x; a_0, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(a_0, ..., a_N)\varphi_i(x). \qquad (۱.۲۳)$$

ضرایب r_i توسط ضرب داخلی عادی محاسبه می‌شوند:

$$r_i = \frac{\langle Res, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}. \qquad (۱.۲۴)$$

بدیهی است هر چه تعداد ضرایب r_i بیشتری صفر گردد، آنگاه باقیمانده روی دامنه کوچک و کوچکتر خواهد شد. برای یافتن ضرایب a_j، $N+1$ ضریب اول را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$r_i = 0, \qquad i = 0, 1, ..., N. \qquad (۱.۲۵)$$

این هم‌ارز با این است که:

$$\langle Res, \varphi_i \rangle = 0, \qquad i = 0, 1, ..., N, \qquad (۱.۲۶)$$

که همان تعریف قبلی روش گالرکین می‌باشد.

در روش گالرکین توابع آزمون، توابع نامتناهی هموار هستند که به طور جداگانه در شرایط مرزی همگن، صادقند. روش تاو بهبودی از روش گالرکین است که برای مسایل شرایط مرزی غیرمتناوب به کار می‌رود.

در این روش کمینه‌سازی تابع باقیمانده همانند روش گالرکین صورت می‌پذیرد. تنها تفاوت در این است که در اینجا شرایط مرزی نیز به عنوان محدودیت اعمال می‌گردد؛ یعنی نیازی نیست که توابع آزمون در شرایط مرزی صادق باشند. برای مثال یک معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی $u(-1) = u(1) = 0$ را درنظر بگیرید. حل با روش تاو محدودیت‌های زیر را ایجاب می‌کند:

$$\langle Res, \varphi_i \rangle = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-2, \tag{۱.۲۷}$$

$$\sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_j(\pm 1) = 0. \tag{۱.۲۸}$$

چنانچه از روش گالرکین استفاده شود باید توابع پایه را به گونه‌ای انتخاب کرد که:

$$\varphi_i(\pm 1) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{۱.۲۹}$$

در این صورت برای یافتن ضرایب a_j، محدودیت‌های زیر را داریم:

$$\langle Res, \varphi_i \rangle = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{۱.۳۰}$$

با وجود تفاوت بین این دو روش، خطای بین آن‌ها قابل چشم‌پوشی است. روش تاو را می‌توان به عنوان حالت خاصی از روش پترو-گالرکین در نظر گرفت.

۳.۱ انتخاب توابع پایه

یکی از مهم‌ترین سوالاتی که در استفاده از روش‌های طیفی پیش می‌آید، این است که چه توابعی به عنوان مجموعه پایه مناسب است. مسلما توابع پایه باید دارای ویژگی‌هایی باشند:

- محاسبه آسان
- همگرایی سریع
- کامل بودن

در مسایل متناوب، انتخاب پایه آسان است. بسط‌های مثلثاتی، خصوصا سری‌های فوریه بهترین انتخاب می‌باشند [۳۱، ۳۲].

در مسایل غیر متناوب به این سادگی نیست. در اینگونه مسایل ساده‌ترین انتخاب می‌تواند توان‌های x باشد؛ اما انتخاب این توابع به عنوان پایه جز در مواردی که N کوچک باشد یا محاسبات ریاضی با دقت بالایی انجام می‌پذیرد، نامناسب است [۳۲].