دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش جبر

توصیف نیم گروه ها با سیستم های انژکتیو چگال دنباله ای

استاد راهنما

دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور

دکتر بهناز طلوع حقیقی

پژوهشگر:

فهیمه شرکاء

مهر ۱۳۹۳

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: فهیمه شرکاء

تاریخ و امضا:

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تلاوت آیاتی چند ازکلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه آقای /خانم **فهیمه شرکاء** دانشجوی رشته ریاضی محض به شماره دانشجویی ۹۱۱۳۱۲۳۰۱۷ با عنوان:

توصیف نیم گروه ها با سیستم های انژکتیو چگال دنباله ای

در ساعت مورخه در محل دانشکده دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل گردید . پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای / خانم فهیمه شرکاء به دفاع از موضوع پرداخت وبه سئوالات آنها پاسخ گفت . سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره   برابر درجه   برای آن تعیین گردید .

به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ آقای/ خانم فهیمه شرکاء به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی محض شناخته می شود .

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	امضــــــــــــــا
۱	استاد راهنما	دکتر غلامرضا مقدسی	استادیار	
۲	استاد مشاور	دکتر بهناز طلوع حقیقی	استادیار	
۴	استاد داور	دکتر اعظم پورمیرزایی	دانشیار	
۶	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر طیبه لعل شاطری	استاد یار	

نام و نام خانوادگی وامضای مدیر گروه: دکتر بهناز طلوع حقیقی

رونوشت:

- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع
- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع
- آموزش دانشکده جهت درج در پرونده دانشجو
- دانشجو

تأییدیه ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب فهیمه شرکاء به شماره دانشجویی ۹۱۱۳۱۲۳۰۱۷ دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می نمایم که کلیه ی نتایج این پایان نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: فهیمه شرکاء

تاریخ و امضا:

مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

☐ بهره برداری از این پایان نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر غلامرضا مقدسی

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

مقدسترین واژه ها در لغت نامه دلم، مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می دانم. پدر، مهربانی مشفق، بردبار و حامی. همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است. برادر و خواهرانم همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگیم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، آقای دکتر غلامرضا مقدسی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از خانم دکتر بهناز طلوع حقیقی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می دانم از گروه پارسی لاتک در پاسخگویی به مشکلات کاربران کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می"کنم وجود مقدس شان را و تشکر می"کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان ، که بهترین پشتیبان من بودند.

فهیمه شرکاء

مهر ۱۳۹۳

دانشگاه حکیم سبزواری

فرم چکیده ی پایان نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو:شرکاء	نام:فهیمه	ش. دانشجویی:۹۱۱۳۱۲۳۰۱۷
استاد راهنما: دکتر غلامرضا مقدسی		
استاد مشاور: دکتر بهناز طلوع حقیقی		
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: ریاضی محض	گرایش:جبر
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع:مهر ۱۳۹۳	تعداد صفحات: ۷۴
عنوان پایان نامه: توصیف نیم گروه ها با سیستم های انژکتیو چگال دنباله ای		
کلید واژه ها:انژکتیو چگال دنباله ای ،چگال دنباله ای، M-انژکتیو، M-انژکتیو ضعیف، ایده ال M-انژکتیو		

چکیده: هدف از این پایان نامه توصیف نیم گروه ها با سیستم های انژکتیو چگال دنباله ای وسیستم های M-انژکتیو می باشد. رفتار مفاهیم انژکتیوی، ضرب، هم ضرب و ضرب انژکتیوی آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم و بر این اساس چند رده از این نیم گروه ها را مورد بحث قرار می دهیم.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

وجود	$\exists$
مجموع مستقیم A_i ها از s–سیستم ها	$\bigoplus_{i\in I} A_i$
مجموعه تمام روابط دو تایی روی مجموعه X	$B(X)$
همنهشتی تولید شده توسط x و y	$\rho(x,y)$
تفاضل مجموعه ی A از B	$B \setminus A$
الحاق عنصر ∞ به مجموعه ی $\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^{\infty}$

پیش گفتار

مفهوم تکریختی های چگال دنباله ای و انژکتیوی اولین بار توسط ژولی [1] برای سیستم ها روی تکواره $(\mathbb{N}^\infty, min)$ معرفی گردید. در این پایان نامه این مفهوم را روی یک نیم گروه دلخواه توسعه داده می شود. رفتار مفاهیم انژکتیوی، ضرب، هم ضرب و ضرب انژکتیوی آن ها را مورد مطالعه قرار می دهیم. پس از بیان تعاریف و مفاهیم اولیه که فصل اول به آن اختصاص دارد در فصل دوم، S-چگال دنباله ای ، S-انژکتیو، S-درون بر مطلق را معرفی کرده و در ادامه قضایای مربوط به آن ها را بررسی می کنیم. همچنین به معرفی S-کامل، ایده ال انژکتیو و انژکتیو ضعیف می پردازیم و روابط بین آنها را بررسی می کنیم و در پایان این فصل مفاهیم Σ-S-انژکتیو شمارا، S-انژکتیو متناهی، F-S-انژکتیو، S-انژکتیو ضعیف و Σ-انژکتیو را معرفی می کنیم. سرانجام به بررسی قضایای مربوط به آنها می پردازیم. در واقع این فصل مقدمه ورود به فصل سوم می باشد. در فصل سوم ، $\mathcal{M}$-انژکتیو، ایده آل $\mathcal{M}$-انژکتیو، $\mathcal{M}$-انژکتیو ضعیف، $\mathcal{M}$-انژکتیو را معرفی می کنیم سپس به روابط بین آنها می پردازیم و در پایان $\mathcal{M}$-انژکتیو بزرگ و $\mathcal{M}$-نوتری را معرفی می کنیم و ضرب و هم ضرب را در مورد آنها مورد مطالعه قرار می دهیم.

[1] Giuli

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان مفاهیم، تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند، می پردازیم.

۱-۱ رسته، نیم گروه و S - سیستم

در این بخش به بیان مفهوم رسته و S - سیستم می پردازیم. تعاریف و قضایای اولیه مورد نیاز برای مطالعه ی فصل های بعدی در این بخش گنجانده شده است. رسته زبان سودمندی است و زمینه ای عمومی برای پرداختن به حالات مختلف ریاضی را فراهم می کند. ایده شهودی در تعریف رسته این است که چند شیء ریاضی مثل مجموعه ها، گروه ها، ... همراه نگاشت های مناسبی از این اشیا (توابع برای مجموعه ها، همریختی برای گروه ها و غیره) از خواص مشترکی برخوردارند که در تعریف رسته به آن ها اشاره می شود.

تعریف ۱-۱-۱. هر **رسته**[۱] $\mathcal{C}$ رده ای است از اشیاء (که با ... $A, B, C,$ نمایش داده می شوند)، با این ویژگی ها که:

۱. به ازای هر دو شی مانند A و B، مجموعه ای متناظر می شود که با $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان می دهیم و هر عضو آن را **ریخت**[۲] می نامیم. به علاوه دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی A و B و C و D که $(A, B) \neq (C, D)$ و

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$$

---

[۱] Category
[۲] Morphism

۲. به ازای هر سه شیء A و B و C و تابع

$$Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$$

با ضابطه $gof \longmapsto (g,f)$ موجود است که

آ به ازای هر چهار شیء A و B و C و D اگر $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$، آنگاه $ho(gof) = (hog)of$

ب به ازای هر شیء مانند B عضوی از $Mor_{\mathcal{C}}(B,B)$ مثل ۱_B موجود است که به ازای هر عضو از $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ مثل f و هر عضو از $Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ مثل g، داشته باشیم $go۱_B = g$ و $۱_Bof = f$.

تعریف ۱-۱-۲. رسته ی $\mathcal{C}$ را رسته ی **ملموس** [۳] می نامیم هرگاه همه ی اشیاء آن، مجموعه و ریخت های از A به B، نگاشت های از A به B و ترکیب ریخت ها، ترکیب نگاشت ها و همانی ریخت ها، همانی نگاشت ها باشند.

تعریف ۱-۱-۳. اگر $ob\mathcal{C}$ نشان دهنده کلاس اشیاء رسته $\mathcal{C}$ باشد، رسته $\mathcal{B}$ زیر رسته $\mathcal{C}$ نامیده می شود اگر شرایط زیر برقرار باشد.

۱. $ob\mathcal{B} \subseteq ob\mathcal{C}$

۲. برای هر A و B متعلق به $ob\mathcal{B}$ داشته باشیم $Mor_{\mathcal{B}}(A,B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$.

۳. ترکیب ریخت ها در $\mathcal{B}$ تحدیدی از ترکیب ریخت ها در $\mathcal{C}$ باشد.

فرض کنید $\mathcal{B}$ زیر رسته از رسته $\mathcal{C}$ باشد، اگر برای هر A و B متعلق به $ob\mathcal{B}$، داشته باشیم

$$Mor_{\mathcal{B}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B),$$

آن گاه $\mathcal{C}$ را زیر رسته کامل می گویند.

تعریف ۱-۱-۴. در رسته $\mathcal{C}$، ریخت $f : A \longrightarrow B$ را یک تعادل می نامند هرگاه ریختی مانند $g : B \longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به طوری که $gof = ۱_A$ و $fog = ۱_B$.

ترکیب دو تعادل، وقتی تعریف شده باشد یک تعادل است.

اگر $f : A \longrightarrow B$ تعادل باشد می گوییم A و B معادل می باشند.

[۳] Concrete

مثال ۱-۱-۵. فرض کنیم $\mathcal{C}$ رسته تمام مجموعه ها باشد. به ازای هر A و B متعلق به $\mathcal{C}$، $Mor(A,B)$ مجموعه تمام توابع $f : A \longrightarrow B$ می باشد.

ریخت f از رسته A یک تعادل است اگر f، دوسویی باشد.

مثال ۱-۱-۶. فرض کنیم $\mathcal{B}$ رسته تمام گروه ها باشد. به ازای هر A و B متعلق به $\mathcal{B}$، $Mor(A,B)$ مجموعه تمام همریختی های گروه $g : A \longrightarrow B$ می باشد.

ریخت g از $\mathcal{B}$ یک تعادل است اگر وتنها اگر f، یکریختی باشد.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند، **تابعگر**[۴] هم ورد T از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ که با $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نمایش داده می شود، تابعی است که به شیء C از $\mathcal{A}$ شیی مانند $T(C)$ از $\mathcal{B}$ را نسبت می دهد و ریخت $f : C \longrightarrow C'$ از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $T(f) : T(C) \longrightarrow T(C')$ از $\mathcal{C}$ را نسبت می دهد به طوری که،

۱. به ازای هر ریخت همانی id_C از $\mathcal{A}$، داشته باشیم

$$T(id_C) = id_{T(C)}.$$

۲. به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{A}$ که ترکیب f و g آن ها تعریف شده باشد $T(gof) = T(g)oT(f)$.

مثال ۱-۱-۸. تابعگر همانی $I_A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ هر شیء و هر ریخت در رسته $\mathcal{A}$ را به خودش نسبت می دهد.

تعریف ۱-۱-۹. اگر $\mathcal{A}$ رسته باشد، آن گاه **رسته متقابل**[۵] $\mathcal{A}$ که با $\mathcal{A}^{op}$ نشان می دهند، به صورت زیر تعریف می شود.

۱. $ob\mathcal{A}^{op} = ob\mathcal{A}$

۲. $Mor_{\mathcal{A}^{op}}(A,B) = Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$

وقتی ریخت $f \in Mor_{\mathcal{A}}(B,A)$ یک ریخت در $Mor_{\mathcal{A}^{op}}(A,B)$ در نظر گرفته شود، آن را با f^{op} نشان می دهیم. ترکیب ریخت ها در $\mathcal{A}^{op}$ به صورت $g^{op}of^{op} = (fog)^{op}$ تعریف می شود.

تعریف ۱-۱-۱۰. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند، حاصل ضرب آن ها، رسته $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ است که،

۱. اشیاء $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ جفت های (A,B) هستند که $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{B}$.

۲. $Mor_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((A,B),(A',B')) = \{(f,g)\}$ که $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,A')$ و $g \in Mor_{\mathcal{B}}(B,B')\}$ می باشد.

[۴] Functor
[۵] Oposite category

۳. ترکیب به صورت $(f',g')o(f,g)=(f'of,g'og)$ تغریف می شود. حاصل ضرب بیش از دو رسته به همین نحو تعریف می شود.

تعریف ۱-۱-۱۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته و $\{A_i|i\in I\}$ خانواده ای از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد. یک **ضرب**[۶] برای خانواده $\{A_i|i\in I\}$ شیء P از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده ای از ریخت ها مانند $\{p_i:P\longrightarrow A_i\mid i\in I\}$ است به طوری که به ازای هر شیء B و خانواده $\{\psi_i:B\longrightarrow A_i\mid i\in I\}$ از ریخت ها، ریخت منحصر به فردی مانند $\psi:B\longrightarrow P$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i\in I$ داشته باشیم: $p_i\psi=\psi_i$. یعنی نمودار زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\exists!\psi"'] & & A_i \\
& P \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته و $\{A_i|i\in I\}$ خانواده ای از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد. یک **هم ضرب**[۷] برای خانواده $\{A_i\in I\}$ شیء S از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده ای از ریخت ها مانند $\{s_i:A_i\longrightarrow S\mid i\in I\}$ است به طوری که به ازای هر شیء B و خانواده $\{\varphi_i:A_i\longrightarrow B\mid i\in I\}$ از ریخت ها، ریخت منحصر به فردی مانند $\varphi:S\longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i\in I$ داشته باشیم: $\varphi s_i=\varphi_i$. یعنی نمودار زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "s_i"'] & & B \\
& S \arrow[ur, "\exists!\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۱۳. ریخت $f:C\longrightarrow D$ از رسته $\mathcal{C}$ را **تکریختی**[۸] می نامیم هرگاه به ازای جمیع اشیاء B و ریخت های $g,h\in Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ از $fg=fh$ نتیجه شود که $g=h$.

تعریف ۱-۱-۱۴. ریخت $f:C\longrightarrow D$ از رسته $\mathcal{C}$ را **برووریختی**[۹] می نامیم هرگاه به ازای جمیع اشیاء E و ریخت های $k,t\in Mor_{\mathcal{C}}(D,E)$ از $kf=tf$ نتیجه شود که $k=t$.

تعریف ۱-۱-۱۵. شیء I در رسته $\mathcal{C}$ را **عمومی یا اولیه**[۱۰] می نامیم هرگاه به ازای هر شیء C از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت مانند $I\longrightarrow C$ وجود داشته باشد.

[۶]Product
[۷]Coproduct
[۸]Monomorphism
[۹]Epimorphism
[۱۰]Initial

تعریف ۱-۱-۱۶. شیء T در رسته $\mathcal{C}$ را **هم عمومی یا نهایی**[۱۱] می نامیم هرگاه به ازای هر شیء C از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت مانند $C \longrightarrow T$ وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۷. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ ریختی از رسته $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت f را **درونبری**[۱۲] می نامیم هرگاه f دارای معکوس راست باشد. به عبارت دیگر $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $fg = id_B$ و در این حالت B را **درون بر** [۱۳] A می نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۸. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ ریختی از رسته $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت f را **هم درون بری**[۱۴] می نامیم اگر f دارای معکوس چپ باشد. به عبارت دیگر $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $gf = id_A$ و در این حالت A را **هم درون بر** [۱۵] B می نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۹. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته و $f_1 : X \longrightarrow Y_1$ و $f_2 : X \longrightarrow Y_2$ دو ریخت باشند.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y_2 \\ Y_1 & \end{tikzcd}$$

جفت $((q_1, q_2), Q)$ که $q_i : Y_i \longrightarrow Q$ $(i = 1, 2)$ **جلوبر**[۱۶]جفت (f_1, f_2) نامیده می شود اگر

۱. $q_1 f_1 = q_2 f_2$

۲. برای هر جفت $((q'_1, q'_2), Q')$ که $q'_i : Y_i \longrightarrow Q'$ و $q'_1 f_1 = q'_2 f_2$، ریخت منحصر به فرد $q : Q \longrightarrow Q'$ وجود داشته باشد به طوری که $qq_i = q'_i$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y_2 \arrow[d, "q_2"'] \arrow[ddr, bend left, "q'_2"] & \\ Y_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[drr, bend right, "q'_1"'] & Q \arrow[dr, "q"] & \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

---

[۱۱]Terminal
[۱۲]Retraction
[۱۳]Rrtract
[۱۴]Coretraction
[۱۵]Coretract
[۱۶]Pushout

تعریف ۱-۱-۲۰. یک **فرورفتگی** [17] عبارتست از زوج $((f_{ii\in I}), A)$ شامل یک شی A (هم دامنه ی فرورفتگی) و یک خانواده از ریخت های $f_i : A \longrightarrow A$ که با یک کلاس I اندیس گذاری شده است. خانواده ی $(A_i)_{i\in I}$ دامنه ی فرو رفتگی نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۲۱. یک **دیاگرام** [18] در رسته ی $\mathcal{C}$، یک تابعگر $D : I \longrightarrow \mathcal{C}$ با هم دامنه ی $\mathcal{C}$ است. دامنه ی I، **طرح** [19] نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنید $D \longrightarrow \mathcal{C}$ یک دیاگرام باشد. یک $\mathcal{C}$-فرورفتگی $D_d : D_i \longrightarrow D_j$ برای Dکه i متعلق به I می باشد، **طبیعی** [20] نامیده می شود هرگاه برای هر I ریخت $d : i \longrightarrow j$ دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "D_d"] \arrow[d, "f_i"'] & D_j \arrow[dl, dotted, "f_j"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۲۳. یک **هم حد**[21] از D یک فرورفتگی طبیعی $l_i : D_i \longrightarrow k$ که i متعلق به I می باشد، برای D با خاصیت جهانی زیر است که برای هر فرورفتگی، یک ریخت منحصر به فرد مانند $f : A \longrightarrow K$ موجود باشد به طوری که برای هر i متعلق به I داشته باشیم $fof_i = l_i$.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "l_i"] \arrow[d, "f_i"'] & A \arrow[dl, dotted, "f"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۲۴. فرض کنید$\mathcal{C}$ یک رسته باشد. در این صورت شی $Q \in \mathcal{C}$ را **انژکتیو**[22] می نامیم در صورتی که برای هر ریخت

$f \in Mor(X,Q)_{\mathcal{C}}$ و هر تکریختی $i \in Mor(X,Y)_{\mathcal{C}}$، ریخت $g \in Mor(Y,Q)_{\mathcal{C}}$ وجود داشته باشد به طوری که $gi = f$.

[17] Sink
[18] Diagram
[19] Schame
[20] Natural
[21] Colimit
[22] Injective

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۲۵. می گوییم رسته ی $\mathcal{C}$ به اندازه کافی انژکتیو دارد هرگاه به ازای هر شی $A \in \mathcal{C}$ یک شی انژکتیو مانند $B \in \mathcal{C}$ و یک تکریختی از A به B موجود باشد.

تعریف ۱-۱-۲۶. فرض کنید S یک **نیم گروه**[۲۳] باشد. در این صورت،

۱. عضو $e \in S$ را **همانی چپ**[۲۴] می نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم: $es = s$.

۲. عضو $e \in S$ را **همانی راست**[۲۵] می نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم: $se = s$.

۳. عضو $e \in S$ را **همانی** [۲۶] می نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم: $se = es = s$.
عضو همانی نیمگروه S، معمولا با 1_s نمایش داده می شود.

تعریف ۱-۱-۲۷. نیم گروه S، را **تکواره**[۲۷] می نامیم هرگاه دارای عضو همانی باشد.

تعریف ۱-۱-۲۸. زیر مجموعه ی ناتهی K از نیمگروه S را یک

۱. **ایده آل چپ**[۲۸] می نامیم هرگاه $SK \subseteq K$

۲. **ایده آل راست**[۲۹]می نامیم هرگاه $KS \subseteq K$

۳. **ایده آل**[۳۰] می نامیم هرگاه $SK \subseteq K$ و $KS \subseteq K$

تعریف ۱-۱-۲۹. ایده آل I را **اصلی**[۳۱] می نامیم هرگاه توسط یک عضو تولید شده باشد.

تعریف ۱-۱-۳۰. نیم گروه S را **نیم گروه ایده آل اصلی**[۳۲]می نامیم هرگاه همه ی ایده آل های آن متناهی تولید شده باشند.

تعریف ۱-۱-۳۱. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. در این صورت کوچکترین ایده آل از S که شامل $a \in S$ باشد عبارت است از $S^1 a = Sa \cup \{a\}$ و آن را **ایده آل چپ اصلی**[۳۳] تولید شده توسط a می نامیم و **ایده آل راست اصلی**[۳۴] تولید شده توسط a به روش مشابه تعریف می شود.

---

[۲۳] Semigroup
[۲۴] Left identity
[۲۵] Right identity
[۲۶] Identity
[۲۷] Monoid
[۲۸] Left ideal
[۲۹] Right ideal
[۳۰] Ideal
[۳۱] Principal
[۳۲] Principal ideal semigroup
[۳۳] Principal left ideal
[۳۴] Principal right ideal

$SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\}$ **ایده آل اصلی**[۳۵] تولید شده توسط a نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۳۲. فرض کنیم S یک نیم گروه و $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم ارزی روی S باشد. در این صورت

۱. ρ رابطه ی **سازگاری چپ**[۳۶] روی S است اگر برای هر s و t و u متعلق به S، $s\rho t$ آن گاه $(us)\rho(ut)$.

۲. ρ رابطه ی **سازگاری راست**[۳۷] روی S است اگر برای هر s و t و u متعلق به S، $s\rho t$ آن گاه $(su)\rho(tu)$.

۳. ρ رابطه ی **سازگاری**[۳۸] روی S است اگر برای هر s و t و u متعلق به S، $s\rho t$ آن گاه $(su)\rho(tu)$ و $(us)\rho(ut)$.

همچنین کلاس $a \in S$ نسبت به رابطه ی هم ارزی ρ را با $\rho(a)$ یا $[a]_\rho$ یا $[a]$ نشان می دهیم. اگر ρ یک رابطه ی سازگاری روی S باشد، با تعریف ضرب $[s]_\rho [t]_\rho = [st]_\rho$ برای هر s و t متعلق به S یک نیم گروه می شود که نیم گروه خارج قسمتی نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۳۳. اگر ρ رابطه ی سازگاری روی نیم گروه S باشد، نگاشت کانونی $\pi : S \longrightarrow \frac{S}{\rho}$، با ضابطه ی $\pi(x) = [x]_\rho$ را بروریختی متعارف می گویند.

تعریف ۱-۱-۳۴. اگر A یک مجموعه باشد، مجموعه ای متشکل از همه زیر مجموعه های A را با $P(A)$ یا $Su(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱-۱-۳۵. فرض کنید A یک مجموعه باشد. در این صورت تابع

$$C : Su(A) \longrightarrow Su(A)$$

را **عملگر بستاری**[۳۹] می نامیم، هرگاه برای هر $X \subseteq A$ و $Y \subseteq A$، سه شرط زیر برقرار باشد.

۱. $X \subseteq C(X)$

۲. $C(C(X)) = C(X)$

۳. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$

تعریف ۱-۱-۳۶. نیم گروه S را **دوری**[۴۰] می نامیم هرگاه داشته باشیم

$$S = \{a, a^۲, a^۳, ...\}$$

تعریف ۱-۱-۳۷. نیم گروهی که هر عضوش صفر کننده باشد، را **نیم گروه صفر**[۴۱] می نامیم. یعنی برای هر s و t متعلق به S داریم $st = s_۰$ که $s_۰$ عضو صفر S است.

[۳۵] Principal ideal
[۳۶] Left congruense
[۳۷] Right congruense
[۳۸] Congruense
[۳۹] Closure operator
[۴۰] Cyclic
[۴۱] Zero semigroup