بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

عمق استنلی برای ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای

استاد راهنما:
دکتر احد رحیمی

نگارش:
نسرین عبدلی حسین‌آبادی

اسفند ۹۱

بار الهی

غشاوه غفلت از بصر بصیرت ما بگشای و هر چیز را چنان‌که هست به ما بنمای، نیستی را بر ما در صورت هستی جلوه مده، از نیستی بر جمال هستی پرده منه، این صور خیال را آیینه تجلیات خود گردان، نه علت حجاب و دوری و این نقوش وهمی را سرمایه دانایی و بینایی ما گردان، نه آلت جهالت و محرومی و محجوری همه از ماست، ما را به ما مگذار، ما را از ما رهایی کرامت کن و با خود آشنایی دار.

الهی از پیش خطر و از پس راهم نیست دستم گیر که جز فضل تو پناهم نیست

الهی ترسانم از بدی خود، بیامرز مرا به خوبی خود

الهی بنیاد توحید ما خراب مکن و باغ امید ما بی آب مکن

الهی هر کس از آنچه ندارد مفلس است و من از آنچه دارم

الهی کدام درد از این بیش باشد که معشوق توانگر بود و عاشق درویش...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمت‌های بی‌دریغ استاد راهنمای خوبم، جناب آقای دکتر احد رحیمی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین، از اساتید گرانقدر جناب آقایان دکتر امیر مافی و دکتر سیروس رسولیار که زحمت داوری پایان‌نامه را بر عهده داشتند، سپاس‌گذاری می‌کنم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که بهترین پشتیبانان من هستند.

نسرین عبدلی حسین‌آبادی

اسفند ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر فداکارم

چکیده

در این پایان‌نامه یک نگاه کلی به تجزیه‌های استنلی و رابطه آن‌ها با عمق یک مدول داریم. همچنین حدس استنلی که به این رابطه اشاره می‌کند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $J \subseteq I$ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای باشند. نشان می‌دهیم عمق استنلی I/J با تعداد متناهی مرحله محاسبه می‌شود. همچنین عمق صافی یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای را معرفی می‌کنیم که به‌وسیله صافی اول تعریف می‌شود و نشان می‌دهیم عمق صافی یک ایده‌آل نیز با تعداد متناهی مرحله محاسبه می‌شود. در هر دو مورد نشان داده می‌شود که این متغیرها به‌وسیله در نظر گرفتن افرازهایی مناسب و متناهی روی مجموعه‌های جزئا مرتب از بازه‌ها مشخص می‌شوند.

کلمات کلیدی:

مجتمع سادکی، عمق استنلی، ایده‌آل تک‌جمله‌ای، تجزیه استنلی، حدس استنلی، عمق.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سراسر این پایان‌نامه منظور از K یک میدان و $S = K[x_۱, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان K و M یک S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج متناهی مولد می‌باشد.

فرض کنید $m \in M$ عنصری همگن و $Z \subseteq \{x_۱, \dots, x_n\}$ باشد. K-زیر فضایی از M که توسط همه‌ی عنصرهای mv تولید می‌شود، به‌طوری‌که v یک تک‌جمله‌ای در $K[Z]$ است، را با $mK[Z]$ نشان می‌دهند. K-زیر فضای $\mathbb{Z}^n$-مدرج $mK[Z]$ یک فضای استنلی از بعد $|Z|$ نامیده می‌شود، اگر $mK[Z]$ یک $K[Z]$-مدول آزاد باشد. یک تجزیه استنلی $\mathcal{D}$ نمایشی است از K-فضای برداری M به شکل یک جمع مستقیم متناهی از فضاهای استنلی به‌صورت

$$\mathcal{D} : M = \bigoplus_{j=۱}^{r} m_j K[Z_j]$$

که در آن هر $m_j K[Z_j]$ یک فضای استنلی M است. قرار دهید

$$\operatorname{sdepth}(\mathcal{D}) = \min\{|Z_j| : \ j = ۱, \dots, r\}.$$

در این‌صورت

$$\operatorname{sdepth}(M) = \max\{\operatorname{sdepth}(\mathcal{D}) : \text{است. } M \text{ یک تجزیه استنلی } \mathcal{D}\}$$

عمق استنلی M نامیده می‌شود. ریچارد استنلی[۱] در مقاله مشهور خود، معادله‌های سیاله خطی و کوهومولوژی موضعی (مرجع [۲۸]) که در سال ۱۹۸۲ به چاپ رسید، حدسی بیان کرد. این حدس برای بسیاری از مدول‌ها هنوز یک مساله باز است و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

(حدس استنلی): اگر M یک S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج باشد، آنگاه $\operatorname{depth}(M) \leq \operatorname{sdepth}(M)$.

حدس استنلی، کران بالایی را برای عمق یک مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج پیش‌بینی می‌کرد. این کران بالا، عمق استنلی یک مدول نامیده می‌شود. عمق استنلی مدول یک مفهوم ترکیبیاتی است، در حالی‌که عمق یک مدول، ثابت همولوژیکی است. از گذشته تاکنون حدس استنلی مورد توجه بوده، زیرا این حدس دو ثابت یک مدول با ماهیت بسیار متفاوت را با هم مقایسه می‌کند. اگرچه، در نگاه اول هیچ ارتباطی بین این دو ثابت دیده نمی‌شود.

اپل[۲] اولین کسی بود که این حدس را مورد مطالعه قرار داد و حالت‌های خاصی از آن را در [۲] و [۳] اثبات کرد، این مقاله‌ها در سال ۲۰۰۳ به چاپ رسیدند. در سال ۲۰۰۶ هرزوگ[۳] و پوپسکو[۴] در

---

[۱] Richard Stanley

[۲] Apel

[۳] Herzog

[۴] Popescu

[۱۴] بار دیگر، موضوع تجزیه‌های استنلی را مورد بررسی قرار دادند و از آن زمان به بعد این موضوع مورد توجه محققین قرار گرفت. اگرچه، تلاش‌های زیادی برای اثبات و یا رد حدس استنلی صورت گرفته است اما این حدس هنوز یک مساله باز است.

هدف از این پایان‌نامه، مطالعه حدس استنلی و بررسی برخی از حالت‌هایی است که این حدس برقرار است.

فصل اول این پایان‌نامه به بیان تعاریف، مفاهیم و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، با بیان چند مثال متنوع مفاهیم فضای استنلی، تجزیه استنلی و عمق استنلی و همچنین حدس استنلی، به‌طور کامل معرفی می‌شوند. در ادامه این فصل، به معرفی الگوریتمی پرداخته می‌شود که به ماوریس جانت[۱] ریاضیدان فرانسوی نسبت داده شده است. این الگوریتم روی ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای اعمال می‌شود و یک تجزیه استنلی از این ایده‌آل‌ها می‌دهد. به تجزیه استنلی که از این راه به‌دست می‌آید، تجزیه جانت ایده‌آل تک‌جمله‌ای گفته می‌شود.

در فصل سوم، مفهوم صافی اول برای یک S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج معرفی می‌شود. قضیه ۱.۱.۳ نشان می‌دهد که برای هر S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج یک صافی اول وجود دارد. سپس، قضیه ۱.۲.۳ نشان می‌دهد از هر صافی اول، یک تجزیه استنلی به‌دست می‌آید. از این‌رو، ثابت می‌شود برای هر S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج یک تجزیه استنلی وجود دارد. در گزاره ۴.۲.۳ شرط لازم و کافی برای این‌که یک تجزیه استنلی از یک صافی اول القا شود، بیان می‌شود. پس از آن، مفهوم عمق صافی برای یک S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج مطرح و با نماد $\mathrm{fdepth}(M)$ نشان داده می‌شود.

در فصل چهارم، در قضیه ۱.۱.۴ کران‌های بالا و پایینی برای عمق استنلی یک S-مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج بیان و اثبات می‌شود. همچنین، در این فصل به معرفی مدول‌های شبه کوهن-مکالی پرداخته و نیز نشان داده می‌شود، حدس استنلی برای مدول‌های شبه کوهن-مکالی برقرار است.

در فصل پنجم، مدول‌های تمیز و نسبتا تمیز معرفی شده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها بیان می‌شود. سپس نشان داده می‌شود، حدس استنلی برای این مدول‌ها برقرار است. در این فصل ایده‌آل‌های از نوع بورل معرفی می‌شوند. به‌علاوه نشان داده می‌شود، حدس استنلی برای آن‌ها برقرار است.

در فصل ششم، در قضیه ۱.۱.۶ که در مرجع [۲۳] توسط آسیه رئوف[۲] ثابت شده است. نشان داده می‌شود اگر x_k عنصری منظم در M باشد، آنگاه

$$\mathrm{sdepth}(M) \geq \mathrm{sdepth}(M/x_kM) + ۱.$$

---

[۱] Maurice Janet

[۲] Asia Rauf

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، اگر حدس استنلی برای M/x_kM برقرار باشد، آنگاه این حدس برای M نیز برقرار است.
در لم ۳.۱.۶ نشان داده می‌شود اگر

$$o \to U \to M \to N \to o$$

یک دنباله دقیق از S-مدول‌های $\mathbb{Z}^n$-مدرج متناهی مولد باشد، آنگاه

$$\operatorname{sdepth}(M) \geq \min\{\operatorname{sdepth}(U), \operatorname{sdepth}(N)\}.$$

برای محاسبه عمق استنلی یک مدول لازم است، تمام حالت‌های ممکن برای تجزیه استنلی آن مدول بررسی شود که البته تعداد این حالت‌ها نامتناهی است. بنابراین، سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا عمق استنلی یک مدول به‌طور دقیق، قابل محاسبه است. تاکنون، هیچ الگوریتمی برای محاسبه عمق استنلی یک مدول $\mathbb{Z}^n$-مدرج شناخته نشده است. فصل هفتم این پایان‌نامه به شرح الگوریتمی اختصاص داده شده که در [۱۸] به‌طور کامل معرفی شده است. این الگوریتم برای محاسبه عمق استنلی S-مدول‌های $\mathbb{Z}^n$-مدرجی به‌شکل I/J به‌کار می‌رود، که در آن $J \subseteq I$ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای از S هستند. یکی از اهداف این فصل، این است که نشان داده شود $\operatorname{sdepth}(I/J)$ طی تعداد متناهی مرحله محاسبه می‌شود.
برای این منظور، ابتدا مفهوم مشخصه مجموعه جزئا مرتب نسبت به g به‌صورت زیر تعریف می‌شود.
فرض کنید $I = (x^{a_1}, \ldots, x^{a_r})$ و $J = (x^{b_1}, \ldots, x^{b_s})$. عنصر $g \in \mathbb{N}^n$ را طوری انتخاب کنید که برای هر i, j $a_i \leq g$ و $b_j \leq g$. قرار دهید

$$\mathrm{P}^g_{I/J} = \{c \in \mathbb{N}^n : \ c \leq g \text{ و برای } i\text{ای } a_i \leq c \text{ و } c \not\geq b_j \text{ ، برای هر } j\}.$$

به‌طور معادل، $\mathrm{P}^g_{I/J} = \{c \in \mathbb{N}^n : \ c \leq g, \ x^c \in I \setminus J\}$. مجموعه‌ی $\mathrm{P}^g_{I/J}$ مشخصه مجموعه جزئا مرتب I/J نسبت به g نامیده می‌شود. در قضیه ۳.۲.۷ نشان داده می‌شود، هر افراز از $\mathrm{P}^g_{I/J}$ به بازه‌های مجزا یک تجزیه استنلی از I/J القا می‌کند. پس از آن ثابت می‌شود، عمق استنلی I/J را می‌توان با بررسی تعداد حالت‌های متناهی ممکن تجزیه‌های استنلی القا شده از افرازهای $\mathrm{P}^g_{I/J}$ به‌دست آورد.
در ادامه این فصل، با استفاده از قضیه‌های بیان شده، با ارائه‌ی چند مثال، عمق استنلی در حالت‌هایی خاص محاسبه می‌شود.
توجه کنید که سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن پایان‌نامه به شیوه نگارش فارسی است. به‌عنوان مثال برای ملاحظه قضیه ۳.۲.۱ باید به فصل اول، بخش دوم رجوع کرد. اما شیوه ارجاع به مراجع لاتین به سبک همان کتاب ارجاع داده شده است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز R-مدول M
$\mathrm{Ass}_R(M)$	مجموعه ایده‌آل‌های وابسته به R-مدول M
$\mathrm{Char}\, K$	مشخصه میدان K
$\deg(x)$	درجه‌ی عنصر همگن x
$\mathrm{depth}_R(M)$	طول M-رشته منظم ماکسیمال در ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$
$\dim R$	بعد حلقه R
$\dim_R(M)$	بعد کرول R-مدول M
$\dim(\Delta)$	بعد مجتمع سادکی Δ
$\mathrm{fdepth}(M)$	عمق صافی M
$\mathcal{F}(\Delta)$	مجموعه رویه‌های مجتمع سادکی Δ
$\mathrm{grade}_R(I, M)$	طول M-رشته منظم ماکسیمال در I
$H^i_{\mathfrak{m}}(-)$	i-امین کوهمولوژی موضعی
I_Δ	ایده‌آل استنلی-رایزنر مجتمع سادکی Δ
$K[\Delta]$	حلقه استنلی-رایزنر مجتمع سادکی Δ
$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R
$\mathrm{Min}(M)$	مجموعه ایده‌آل‌های می‌نیمال مدول M
$\mathrm{Mon}(S)$	مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌های S
$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$	ایده‌آل همگن ماکسیمال حلقه چندجمله‌ای S
$S = R[x_1, \ldots, x_n]$	حلقه چندجمله‌ای روی حلقه R
$\mathrm{sdepth}(M)$	عمق استنلی M
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه R
$\mathrm{Supp}_R(M)$	تکیه‌گاه R-مدول M
$\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$	تکیه‌گاه صافی $\mathcal{F}$
$\mathrm{Z}_R(M)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R-مدول M

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل، تعاریف و قضایایی آورده می‌شود که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند. فرض ما بر این است که، خواننده با مفاهیم جبر پیشرفته آشنایی دارد. در سرتاسر این پایان‌نامه، منظور ازحلقه‌ی R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

۱.۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابه‌جایی

تعریف ۱.۱.۱ (میدان کسرها[۱]). فرض کنید R یک حوزه صحیح و $\{o\}$ $S = R \setminus \{o\}$ باشد (S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است). در این‌صورت $S^{-1}R$ میدان کسرهای R نامیده می‌شود.
اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و $S = R \setminus \mathfrak{p}$ باشد، در این‌صورت $S^{-1}R$ را با $R_\mathfrak{p}$ نمایش می‌دهند.
به‌علاوه S^{-1} یک فانکتور دقیق روی کتگوری R- مدول‌هاست.

تعریف ۲.۱.۱ (تکیه‌گاه[۲]). فرض کنید M یک R-مدول باشد. نماد $\operatorname{Supp}(M)$ نشان دهنده تکیه‌گاه M است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) :\ M_\mathfrak{p} \neq o\}.$$

لم ۳.۱.۱. *فرض کنید M یک R- مدول باشد، در این‌صورت شرایط زیر معادل‌اند.*

۱. $M = o$،

۲. *به‌ازای هر* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$، $M_\mathfrak{p} = o$. *یعنی* $\operatorname{Supp}(M) = \emptyset$،

۳. *به‌ازای هر* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$، $M_\mathfrak{m} = o$.

برهان. رجوع شود به لم ۹.۱۵ در [۲۵]. □

تعریف ۴.۱.۱ (ایده‌آل‌های اول وابسته[۳]). فرض کنید M یک R- مدول باشد. مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با علامت $\operatorname{Ass}(M)$ نشان داده و عبارت است از

$$\operatorname{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) :\ \mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(x) \text{ ،} x \in M \text{ به‌ازای عنصر ناصفری مانند}\}.$$

[۱] Field of fractions

[۲] Support

[۳] Associated prime ideal

لم ۵.۱.۱. *فرض کنید M یک R-مدول باشد، در این‌صورت*

۱. $\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) :\ \mathrm{Ann}_R(x) \subseteq \mathfrak{p}$ ،$x \in M$ *به‌ازای عنصر ناصفری مانند* $\}$.

۲. $M \neq o$ *اگر و تنها اگر* $\mathrm{Supp}_R(M) \neq \emptyset$.

برهان. رجوع شود به لم ۹.۲۰ در [۲۷] و تمرین ۱۹ از فصل ۳ در [۴]. □

نکته ۶.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M و N دو R-مدول باشند، در این‌صورت*

۱. *اگر* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ *آنگاه* $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

۲. $M = o \iff \mathrm{Ass}(M) = \emptyset$.

۳. *اگر* $M \cong N$ *آنگاه* $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(N)$.

برهان. رجوع شود به تمرین ۹.۴۱ در [۲۷]. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر باشد. نماد $\mathrm{Min}(M)$ نشان دهنده عناصر می‌نیمال $\mathrm{Ass}(M)$ است که مجموعه اول‌های می‌نیمال M نامیده می‌شود. مجموعه ایده‌آل‌های اول نشانده شده[۱] R-مدول M ایده‌آل‌هایی در $\mathrm{Ass}(M)$ هستند که متعلق به $\mathrm{Min}(M)$ نیستند.

گزاره ۸.۱.۱. *اگر R یک حلقه نوتری و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R به‌طوری‌که $o \notin S$ و M یک R-مدول باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{q} :\ \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M), \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}.$$

در حالت خاص، اگر $S = R \setminus \mathfrak{p}$ *به‌طوری‌که* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ *باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} :\ \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

به‌علاوه

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \iff \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}).$$

برهان. رجوع شود به تمرین ۹.۲۴ در [۲۷]. □

---

[۱] Embedded prime

تذکر ۹.۱.۱. *فرض کنید M یک R-مدول و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ باشد. $\mathfrak{p}$ یک اول وابسته به M است اگر و تنها اگر R-همریختی یک به یک $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ وجود داشته باشد. به‌عبارت دیگر $\mathfrak{p}$ اول وابسته به M است اگر و تنها اگر M زیر مدولی مانند $N \cong R/\mathfrak{p}$ داشته باشد.*

گزاره ۱۰.۱.۱. *فرض کنید $o \to M' \to M \to M'' \to o$ دنباله‌ای دقیق از R-مدول‌ها و R حلقه‌ای نوتری باشد، در این‌صورت*

۱. $\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Supp}_R(M') \cup \mathrm{Supp}_R(M'')$.

۲. $\mathrm{Ass}_R(M') \subseteq \mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M') \cup \mathrm{Ass}_R(M'')$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۲.۱۳ در [۲۶]. □

تعریف ۱۱.۱.۱ (واریته[۱]). فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه R باشد. $V(I)$ نشان دهنده واریته ایده‌آل I است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) :\ I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ (ارتفاع[۲]). فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی اول از R باشد. ارتفاع $\mathfrak{p}$ طول بلندترین زنجیر از ایده‌آل‌های اول R به‌صورت $\mathfrak{p}_o \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ است و با نماد $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$ نمایش داده می‌شود. همچنین، اگر R نوتری باشد برای ایده‌آل دلخواه I

$$\mathrm{ht}\, I = \min\{\,\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} :\ \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۱ (بعد[۳] حلقه). بعد حلقه R با $\dim(R)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dim(R) = \sup\{n \in \mathbb{N}_o :\ \mathfrak{p}_o \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)\ ,\ i = o, \ldots, n\}.$$

تعریف ۱۴.۱.۱ (بعد کرول مدول[۴]). فرض کنید M یک R-مدول باشد. بعد کرول M را با $\dim_R(M)$ نشان داده و عبارت است از

$$\dim_R(M) = \sup\{n \in \mathbb{N}_o :\ \mathfrak{p}_o \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)\}.$$

---

[۱] Variety

[۲] Height

[۳] Dimension

[۴] Krull dimension of module

همچنین، می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}\dim_R(M) &= \sup\left\{\dim(R/\mathfrak{p}):\ \mathfrak{p}\in \mathrm{Supp}(M)\right\} \qquad (۱.۱)\\ &= \sup\left\{\dim(R/\mathfrak{p}):\ \mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(M)\right\}\\ &= \sup\left\{\dim(R/\mathfrak{p}):\ \mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(M)\right\}.\end{aligned}$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۳.۹ از فصل ۵ در [۲۶]. $\square$

قضیه ۱.۱.۱۵. *فرض کنید $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ دنباله‌ای دقیق از R - مدول‌ها باشد، در این‌صورت*

$$\dim_R(M) = \sup\{\dim_R(M'), \dim_R(M'')\}.$$

برهان. رجوع شود به تمرین ۲.۹ از فصل ۷ در [۲۶]. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید M یک R - مدول باشد. نماد $\mathrm{Z}(M)$ نشان دهنده مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R نسبت به M است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{Z}(M) = \{x \in R:\ xm = 0\ \text{ ،}m \in M \text{ به‌ازای عنصر ناصفری مانند}\}.$$

اگر R یک حلقه نوتری باشد، آنگاه

$$\mathrm{Z}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۹.۳۶ در [۲۷]. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R - مدول باشد. عنصر $r \in R$، M - منظم[1] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر عنصر غیر صفر x متعلق به M، $rx \neq 0$ باشد. به‌عبارت دیگر $r \notin \mathrm{Z}(M)$.

مثال ۱.۱.۱۸. فرض کنید K یک میدان و $R = K[x]$ باشد، در این‌صورت x روی R منظم است.

تعریف ۱.۱.۱۹ (رشته منظم[2]). فرض کنید R حلقه‌ای نوتری I ایده‌آلی از آن و M یک R - مدول متناهی مولد باشد. دنباله $x_1, \ldots, x_n$ از عناصر I یک M - رشته منظم در I نامیده می‌شود، هرگاه

۱. $M \neq (x_1, \ldots, x_n)M$.

[1] M-regular

[2] Regular sequence

۲. به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $x_i \notin \mathrm{Z}\left(M/(x_1, \dots, x_{i-1})M\right)$.

همچنین، یک M-رشته منظم مانند $x_1, \dots, x_n$ در I ماکسیمال نامیده می‌شود، هرگاه نتوان عنصری چون $x_{n+1} \in I$ پیدا کرد که $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ یک M-رشته منظم باشد.

مثال ۲۰.۱.۱. فرض کنید K یک میدان و $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای مستقل روی K باشد. قرار دهید $R = K[x_1, \dots, x_n]$. در این‌صورت $x_1, \dots, x_n$ یک R-رشته منظم است.

قضیه ۲۱.۱.۱. (***نورسکات- ریس***[1]) *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر و I ایده‌آلی از R باشد که $IM \neq M$. در این‌صورت، هر دو M رشته ماکسیمال در I دارای طول یکسان هستند.*

تعریف ۲۲.۱.۱ (عمق[2]). فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر و I ایده‌آلی از R باشد که $IM \neq M$. طول M رشته ماکسیمال در I عمق Iدر M نامیده و با نماد $\mathrm{grade}(I, M)$ نشان داده می‌شود.

اگر در تعریف فوق $M = R$ باشد، $\mathrm{grade}(I, R)$ با نماد $\mathrm{grade}(I)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد، $\mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M)$ عمق M نامیده و با نماد $\mathrm{depth}(M)$ نشان داده می‌شود. به‌عبارت دیگر، $\mathrm{depth}(M)$ برابر با طول M-رشته‌های ماکسیمال در $\mathfrak{m}$ است.

گزاره ۲۴.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. همچنین، رشته دقیق کوتاهی از R-مدول‌ها به صورت $0 \to U \to M \to N \to 0$ وجود داشته باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{depth}(M) \geq \min\{\mathrm{depth}(U), \mathrm{depth}(N)\},$$

$$\mathrm{depth}(U) \geq \min\{\mathrm{depth}(M), \mathrm{depth}(N) + 1\},$$

$$\mathrm{depth}(N) \geq \min\{\mathrm{depth}(U) - 1, \mathrm{depth}(M)\}.$$

برهان. در گزاره ۱.۲.۹ در [۸] قرار دهید $I = \mathfrak{m}$. □

گزاره ۲۵.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری، I ایده‌آلی از آن و M یک R-مدول متناهی مولد در این‌صورت*

[1] Northcott-Ress

[2] Depth

۱. $\operatorname{depth}(M)=\inf\{\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}):\ \mathfrak{p}\in V(I)\}$.

۲. *اگر* $x=x_1,x_2,\ldots,x_r$ *یک* M*-رشته در* I *باشد، آنگاه*

$$\operatorname{depth}(M/xM)=\operatorname{depth}(M)-r.$$

برهان. در گزاره ۱.۲.۱۰ در [۸] قرار دهید $I=\mathfrak{m}$. □

گزاره ۲۶.۱.۱. *فرض کنید* R *حلقه‌ای نوتری و* M *یک* R*-مدول ناصفر و متناهی مولد باشد. آنگاه* $\operatorname{grade}(I,M)=0$ *اگر و تنها اگر* $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}(M)$*ای وجود داشته باشد که* $I\subseteq\mathfrak{p}$*. در حالت خاص اگر* $(R,\mathfrak{m})$ *حلقه‌ای موضعی باشد، آنگاه* $\operatorname{depth}(M)=0$ *اگر و تنها اگر* $\mathfrak{m}\in\operatorname{Ass}(M)$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۹.۱.۴ در [۸]. □

گزاره ۲۷.۱.۱. *فرض کنید* $(R,\mathfrak{m})$ *یک حلقه موضعی و نوتری و* M *یک* R*-مدول متناهی مولد و ناصفر باشد، در این‌صورت* $\operatorname{depth}(M)\le\dim(R/\mathfrak{p})$ *برای هر* $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}(M)$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۲.۱۳ در [۸]. □

نکته ۲۸.۱.۱. *با توجه به قضیه قبل و تعریف ۱۴.۱.۱*

$$\operatorname{depth}(M)\le\dim(M).$$

تعریف ۲۹.۱.۱ (مدول کوهن-مکالی[۱]). فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و نوتری M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر باشد. R-مدول M کوهن-مکالی نامیده می‌شود، هرگاه

$$\operatorname{depth}(M)=\dim(M).$$

R یک حلقه کوهن-مکالی نامیده می‌شود، هرگاه به‌عنوان R-مدول کوهن-مکالی باشد.

قضیه ۳۰.۱.۱. *اگر* R *یک حلقه موضعی و کوهن-مکالی و* I *ایده‌آلی سره از آن باشد، آنگاه*

$$\operatorname{ht} I+\dim R/I=\dim R.$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۲.۱.۴ در [۸]. □

تعریف ۳۱.۱.۱ (بعد پروژکتیو). بعد پروژکتیو R-مدول M را با $\operatorname{pd}_R(M)$ نشان داده و برابر است از کمترین $n\in\mathbb{N}_0$ به‌طوری‌که یک تحلیل پروژکتیو به‌صورت

---
[۱] Cohen-Macauly

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \longrightarrow o$$

برای M موجود باشد. در صورتی‌که چنین nای موجود نباشد، قرارداد می‌کنیم $\mathrm{pd}_R(M)=\infty$.

قضیه ۳۲.۱.۱ (اوسلندر-بوکسبام[۱]). *فرض کنید* $(R,\mathfrak{m})$ *حلقه‌ای موضعی و* M *یک* R*-مدول متناهی مولد باشد، به‌طوری‌که* $\mathrm{pd}_R(M)<\infty$. *در این‌صورت*

$$\mathrm{pd}_R(M)+\mathrm{depth}_R(M)=\mathrm{depth}_R(R).$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۱.۳.۳ در [۸]. □

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل از حلقه جابجایی R باشد. $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه[۲] R نامیده می‌شود، هرگاه

۱. $R \subsetneq \mathfrak{q}$.

۲. فرض کنید aو$b\in R$ و $ab\in\mathfrak{q}$ اگر $a\notin\mathfrak{q}$ آنگاه $b\in\sqrt{q}$.

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید $I\subsetneq R$. یک تجزیه اولیه[۳] از I نمایشی از I به‌صورت

$$I=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n$$

است، که در آن $\mathfrak{q}_i$ها ایده‌آل‌های اولیه از R و برای هر $i=1,\ldots,n$ داشته باشیم $\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$.
یک تجزیه اولیه از I یک تجزیه اولیه می‌نیمال نامیده می‌شود، هرگاه

۱. $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اول متفاوتی در R باشند.

۲. برای هر $j=1,\ldots,n$ داشته باشیم $\mathfrak{q}_j\not\supseteq\bigcap_{i=1,j\neq i}^{n}\mathfrak{q}_i$. به‌عبارت دیگر $I=\bigcap_{i=1,j\neq i}^{n}\mathfrak{q}_i$.

گزاره ۳۵.۱.۱. *فرض کنید* R *یک حلقه نوتری و* $I=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ *یک تجزیه اولیه می‌نیمال برای* I *به‌طوری‌که برای* $i=1,\ldots,n$ *داشته باشیم* $\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$. *دراین‌صورت* $\mathrm{Ass}(R/I)=\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۴.۱۷ در [۲۷]. □

---
[۱] Auslander-Buchsbaum

[۲] Primary ideal

[۳] Primary decomposition