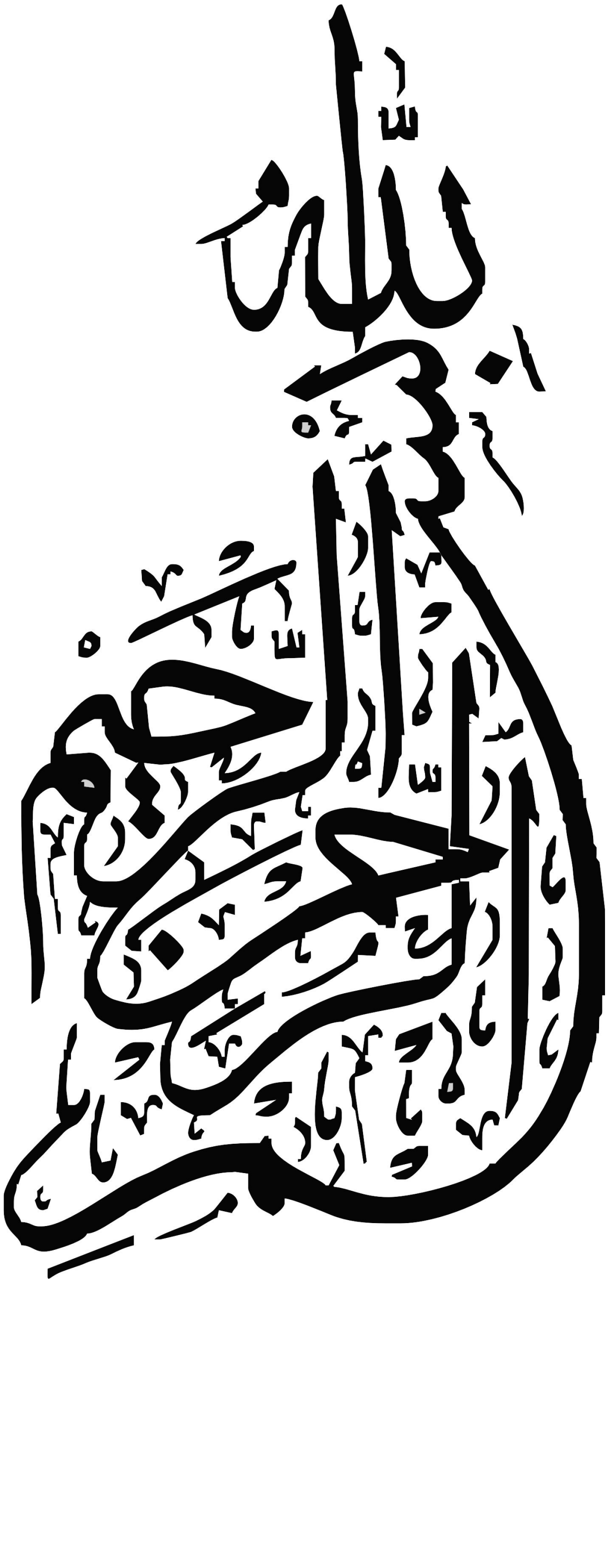
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی
(گرایش محض)

عنوان :

کوهمولوژی روی گروه های موضعی توپولوژیک

از:

آرزو حسینی

استاد راهنما:

دکتر حسین سهله

بهمن ماه ۱۳۹۱

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک...

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را پیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می‌باید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اوّل آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هرآینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته‌ای خواهد که در و اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته‌ای که در خور او بود توان شناخت.

پس دانش ناگزیر آمد بر جوینده‌ی رستگاری. [1]

---

[1] مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

تقدیم به آنکس که بداند و بداند که بداند

و آنکس که نداند و بداند که نداند و بخواهد که بداند

سپاس‌گزاری...

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که تفکر را فطرتاً در وجود آدمی نهاد.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات آقای دکتر حسین سهله در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه قدردانی نمایم.

همچنین از آقایان دکتر تومانیان، دکتر انصاری و دکتر عباس سهله به خاطر نظرات سازنده ایشان برای ارائه هر چه بهتر این پایان نامه و نیز از خانم دکتر آیت ا... زاده شیرازی و تمامی اساتیدی که بر پیشرفت علمی اینجانب تأثیرگذار بودند سپاسگزارم.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر خویش.

چکیده:

کوهمولوژی روی گروه موضعی توپولوژیک

آرزو حسینی

در این رساله، ابتدا گروه های موضعی توپولوژیک را تعریف نموده و خواصی از آن را شناسایی و قضیه های مرتبط با آن را ثابت می‌کنیم.

سپس با استفاده از توپولوژی انتقال ، یک زیرگروه موضعی توپولوژیک از یک گروه را به کل آن گروه گسترش داده و آن را تبدیل به یک گروه توپولوژیک می‌کنیم.

در حالت کلی ، ثابت می‌کنیم که یک گروه موضعی توپولوژیک با خاصیت شرکت پذیری کلی قابل گسترش به یک گروه توپولوژیک است.

در ادامه توسیع موضعی از گروه های موضعی توپولوژیک را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم مجموعه رده هم ارزی از این توسیع ها ، روی گروه موضعی توپولوژیک یک گروه آبلی است.

در آخر با معرفی کوهمولوژی گروه های موضعی توپولوژیک، نشان می‌دهیم که مجموعه کلاس های هم ارزی از این توسیع ها تناظر یک به یک با دومین مرتبه کوهمولوژی گروه های موضعی توپولوژیک دارد.

کلید واژه:

گروه های موضعی توپولوژیک ، کوهمولوژی گروه موضعی توپولوژیک، توسیع موضعی روی گروه های موضعی توپولوژیک ، همریختی موضعی، همریختی قوی، شرکت پذیر کلی.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
زیرگروه (زیرگروه موضعی)	$\leq$
نرمال	$\trianglelefteq$
هم ارزی	$\sim$
یکریختی	$\simeq$
حاصلضرب	$\prod$
نیم ضرب	$\ltimes$
هر چه باشد	$\forall$
درون مجموعه F	F°
درون مجموعه F	$intF$
بستار F	clF
بستار F	$\overline{F}$
مجموعه عناصر قابل ضرب روی گروه موضعی	$D = \{(x, y) : x, y \in X, x * y \in X\}$
φ تابع پیوسته تعریف شده روی D	$\varphi : D \to X$
تولید کردن	$< . >$

پیشگفتار:

در فصل ۱ ابتدا تعاریف مقدماتی فضای توپولوژیک ، گروه توپولوژیک و توسیع گروه های توپولوژیک و همچنین کوهمولوژی گروه های توپولوژیک بیان شده است. این مباحث از [۱۴] ، [۱۹، ۳۲] و [۱۶، ۲۰] آورده شده اند.

در فصل ۲ ، گروه موضعی جبری و خواص و قضایایی از آن عنوان شده و سپس در ادامه گروه موضعی توپولوژیک معرفی شده و ویژگی هایی از آن و قضایای اساسی در آن ثابت گردیده است [۲۲] .

در فصل دوم ، پیش نیازهای کار اصلی را اثبات کردیم و در فصل های بعد گروه موضعی توپولوژیک را به گروه توپولوژیک گسترش می‌دهیم . این گسترش را ساختیم برای این سوال که آیا می‌توان از روی کوهمولوژی گروه توپولوژیک گسترش یافته از یک گروه موضعی توپولوژیک به کوهمولوژی گروه موضعی توپولوژیک پایه و بالعکس دست یافت ؟ به همین منظورکوهمولوژی و توسیع گروه های موضعی توپولوژیک و بعلاوه رابطه بین آنها را معرفی کردیم تا ابزار لازم برای ادامه کار را فراهم کنیم. در این رساله بدلیل گستردگی موضوع و کوتاهی زمان دوره ، تنها به پایه های اولیه سوال پرداختیم.

فصل ۳ ، در بخش اول ما زیر گروه موضعی توپولوژیک از یک گروه را با استفاده از توپولوژی انتقال به کل گروه گسترش داده و آن تبدیل به یک گروه توپولوژیک می‌شود [۲۳]. در همین فصل در بخش بعد ثابت می‌کنیم که هر گروه موضعی توپولوژیک با خاصیت شرکت پذیری کلی (Global assocative) قابل گسترش به یک گروه توپولوژیک خواهد بود [۲۴].

در فصل ۴، در بخش نخست ، توسیع های گروه های موضعی توپولوژیک معرفی کرده، سپس نشان می‌دهیم مجموعه رده های هم ارزی از توسیع های گروه های موضعی توپولوژیک ، یک گروه آبلی است [۲۵].

فصل ۵، ثابت می‌کنیم که این رده های هم ارزی از توسیع های گروه های موضعی توپولوژیک تناظر یک به یک با دومین مرتبه از کوهمولوژی از گروه های موضعی توپولوژیک دارد [۲۶].

مقدمه

کارتان [۲][۲] در سال ۱۹۳۶ گروه لی موضعی را تعریف کرده است . او نشان داده ، در هر گروه لی موضعی ، یک همسایگی حول همانی وجود دارد به طوری که همیومورفیک با یک همسایگی حول همانی از یک گروه لی می‌باشد. از طرفی پنتراگین [۳] ،گروه لی موضعی را بعنوان پایه ی گروه های لی بیان کرده است [۱۹] . اولور [۴] سعی کرده ، گروه لی موضعی با خاصیت شرکت پذیری کلی را به گروه لی گسترش دهد [۱۷] و اخیرا گلدبرینگ [۵] پنچمین مسئله هیلبرت را برای گروه لی موضعی با روش آنالیز نااستاندارد اثبات کرده است [۷] .

بعضی از خواص روی گروه لی موضعی توسط ژاکوبی [۶] و اسمیت[۷] مورد بررسی قرار گرفته اند[۲۸، ۲۹]. بعنوان مثال ، اگر X یک گروه موضعی توپولوژیک و موضعا فشرده باشد بدون زیر گروه کوچک آن گاه X یک گروه موضعی لی است [۱۰] .

اگر X یک فضای گروه لی موضعی و موضعا فشرده متریک پذیر از بعد متناهی باشد آن گاه X به طور موضعی ایزومورفیسم با ضرب مستقیم یک گروه کلا ناهمبند [۸] و یک گروه لی است [۱۰] .

اگر A و B گروه های لی موضعی و A باز باشد آن گاه AB باز است [۲۷، ۲۸، ۲۹] .

گروه های موضعی توپولوژیک (یا گروه های توپولوژیک موضعی) ، گروه های لی موضعی بدون خاصیت منیفلدی هستند بدین معنی که عمل بسته بودن گروه و وارون برای عناصری که بقدر کافی نزدیک به همانی باشند تعریف شده است.

در این رساله فضای X یک گروه موضعی توپولوژیک می‌باشد، که تمام شرایط یک گروه توپولوژیک را دارد به غیر از خاصیت بسته بودن برای بعضی عناصر. پس در یک گروه موضعی توپولوژیک تمام عناصر روی هم عمل نمی‌کنند و همچنین خاصیت شرکت پذیری را برای عناصر قابل عمل روی هم، تا سه عنصر داریم.

در این رساله بعضی از ویژگی های گروه های موضعی توپولوژیک بررسی شده و قضیه های اساسی ثابت می‌شود.

شارما [۲۱][۹] نشان داده، که هر توپولوژی که مرکز یک گروه را به یک گروه توپولوژیک تبدیل کند قابل گسترش به تمام آن گروه است و آن را تبدیل به یک گروه توپولوژیک می‌کند. همچنین کلارک و دولی [۴][۱۰]

[۲] É. Cartan
[۳] S. Pontryagin
[۴] J. Olver
[۵] I. Goldbring
[۶] R. Jacoby
[۷] P.A. Smith
[۸] totally disconnected
[۹] P.L. Sharma
[۱۰] B. Clark, M. Dooley

توانسته اند در سال ۱۹۸۵ ، ثابت کنند: اگر یک گروه شامل زیرگروه توپولوژیک باشد، توپولوژی آن قابل گسترش به گروه مورد نظر است و آن یک گروه توپولوژیک خواهد بود.

یکی از اهداف این رساله گسترش گروه موضعی توپولوژیک به یک گروه توپولوژیک است. با قرار دادن خاصیت هایی روی گروه موضعی توپولوژیک توانسته ایم آن را گسترش دهیم.

یکی از این روش ها کمک گرفتن از روش شارما و کلارک می‌باشد. اگر در مرکز یک گروه، گروه موضعی توپولوژیک داشته باشیم ، توپولوژی آنرا به گروه گسترش می‌دهیم و تبدیل به یک گروه توپولوژیک خواهد شد.

توجه داشته باشیم که هر گروه لی موضعی قابل نشاندن در یک گروه لی نمی‌باشد [۱۷] . مثالهایی آورده شده که هر گروه موضعی توپولوژیک نیز قابل نشاندن در یک گروه توپولوژیک نیست.

ثابت می‌کنیم اگر خاصیت شرکت پذیری کلی (Global associative) را برای عناصر قابل عمل روی هم در گروه موضعی توپولوژیک داشته باشیم، آن گاه گروه موضعی توپولوژیک قابل گسترش به یک گروه توپولوژیک است.

اگر G و H دو گروه توپولوژیک باشند و H آبلی. آن گاه توسیع H توسط G عبارت است از دنباله دقیق کوتاه :

$$\varepsilon : 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

به طوری که π یک همانریختی پیوسته باز و H زیر گروه نرمال بسته در E است. تابع پیوسته $u : G \to E$ که $\pi u(x) = x$ را یک برش [۱۱] گویند.

مجموعه تمام توسیع [۱۲] های H توسط G با برش پیوسته را با $Ext_c(G, H)$ نمایش می‌دهند.

مکلن در سال ۱۹۶۳ [۱۶] نشان داده است ، مجموعه $Ext_c(G, H)$ با جمع بیر [۱۳] تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد.

همچنین هو در [۹] ، ثابت کرد که مجموعه تمام توسیع های H توسط G با برش پیوسته، $Ext_c(G, H)$ ، تناظر ۱ - ۱ با کوهومولوژی مرتبه دوم G با مضرب H دارد.

اگر فرض کنیم X و Y گروه های موضعی توپولوژیک باشند. توسیع Y توسط X توسط هو [۱۴] [۹] تعریف شده است.

ما مجموعه تمام توسیع های Y توسط X با برش موضعی پیوسته [۱۵] را با $Ext_{c_L}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌کنیم $Ext_{c_L}(X, Y)$ با جمع تعریف شده ، یک گروه آبلی است.

---

[۱۱] cross- section
[۱۲] Extension
[۱۳] bair-sum
[۱۴] Hu
[۱۵] local cross-section

و همچنین کوهمولوژی مرتبه pام X با مضرب Y را معرفی و با $H_L^p(X,Y)$ نمایش داده و نشان می‌دهیم که تناظر دوسویی بین $Ext_{c_L}(X,Y)$ و $H_L^2(X,Y)$ وجود دارد.

فصل ۱

پیش نیازها

فصل اول شامل چهار بخش است. در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی آنها را برای گروه های موضعی توپولوژیک تعریف خواهیم کرد.

۱-۱ فضای توپولوژیک

در این بخش تعاریف اولیه را از منبع [۱۴] ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید X یک مجموعه و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، یعنی $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. τ را توپولوژی در X می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$؛

۲. به ازای هر زیرگردایه از τ مانند $\mathcal{A}$ ، $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$؛

۳. همواره اگر A و B در τ باشند، آن گاه $A \cap B \in \tau$.

اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامند و مجموعه X که برای آن توپولوژی τ تعریف شده است، *فضای توپولوژیک* یا به طور خلاصه *فضا* نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد.

۱. زیر مجموعه $A \subseteq X$ را بسته گوییم هرگاه $X \setminus A$ باز باشد.

۲. زیر مجموعه $U \subset X$ را یک همسایگی نقطه $x \in X$ گوییم، هرگاه یک مجموعه باز V موجود باشد به طوری که $x \in V \subset U$.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنید (X, τ) فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد، مجموعه

$$\tau|_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$$

؛ را توپولوژی زیر فضایی و فضای توپولوژیک $(A, \tau|_A)$ را یک *زیر فضای توپولوژیک* (X, τ) می‌خوانند.

تعریف ۱-۱-۴. فضای X و Y فضاهای توپولوژیک باشند نگاشت $f : X \to Y$ را *پیوسته* گوییم هرگاه تصویر وارون مجموعه های باز Y ، در X باز باشد.

تعریف ۱-۱-۵. فضای X و Y فضاهای توپولوژیک باشند نگاشت یک به یک و پوشای $f : X \to Y$ را *همانریختی*[۱] گوییم هرگاه f و f^{-1} پیوسته باشند.

[۱] Homeomorphism

تعریف ۱-۱-۶. یک فضای توپولوژیک را *همبند* گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت اجتماع دو زیر مجموعه ناتهی باز و جدا از هم نوشت.

تعریف ۱-۱-۷. فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. رابطه هم ارزی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x \sim y$ هرگاه زیر مجموعه همبندی وجود داشته باشد که شامل هر دوی x و y باشد. رده هم ارزی حاصل از آن را مولفه های X می‌نامند ، که با $\frac{X}{\sim}$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱-۱-۸. فرض کنیم فضای X یک مجموعه و $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی X باشد. نگاشت $\pi : X \to \frac{X}{\sim}$ که $\pi(x) := [x]$ *نگاشت تصویر کانونیک* گویند.

تعریف ۱-۱-۹. فضای X یک *فضای* T_0 است. هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز x و y از X یک مجموعه باز مانند U موجود باشد به طوریکه شامل یکی از آن ها باشد.

تعریف ۱-۱-۱۰. یک فضای توپولوژیک را فضای *هاسدورف* [۲] گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز آن، همسایگی های جدا از هم حول آنها وجود داشته باشند.

تعریف ۱-۱-۱۱. فضای X نرمال [۳] است هرگاه به ازای هر x و هر مجموعه بسته F به طوریکه $x \notin F$، دو مجموعه باز و جدا از هم مانند U و V موجود باشند به طوریکه $x \in U$ و $F \subseteq V$.

تعریف ۱-۱-۱۲. زیرمجموعه بسته F از فضای X بسته - منظم [۴] است، هرگاه $F = cl_X int_X F$.
یا $(F = \overline{F^o})$

به طور مثال $\mathbb{R}$ و $[0,1]$ فضاهایی بسته - منظم هستند.

قضیه ۱-۱-۱۳. فرض کنید X یک فضا و Y زیرفضایی از آن باشد و $A \subseteq Y \subseteq X$. اگر Y در X باز (بسته) باشد، آن گاه A در فضای X باز (بسته) است اگر و تنها اگر A در فضای Y باز (بسته) باشد.

تعریف ۱-۱-۱۴. فضای X *کاملاً منظم* [۵] است هر گاه به ازای هر x و هر مجموعه بسته F که $x \notin F$، نگاشتی پیوسته مانند $f : X \to \mathbb{R}$ موجود باشد به طوریکه $f(x) = 0$ و به ازای هر $y \in F$، $f(y) = 1$ باشد.

تعریف ۱-۱-۱۵. فضای X *تیخونوف* [۶] است هرگاه هاسدورف و کاملاً منظم باشد.

تعریف ۱-۱-۱۶. فضای X *لیندولف* [۷] است هرگاه هر پوشش باز آن دارای یک زیر پوشش باز شمارا باشد.

[۲] Hausdorff
[۳] Normal
[۴] Regular - closed
[۵] Completely regular
[۶] Tychonoff
[۷] Lindelof

تعریف ۱-۱-۱۷. فضای X $\sigma-$*فشرده* [۸] است هرگاه اجتماع شمارایی از خانواده ای از زیرمجموعه های فشرده باشد.

تعریف ۱-۱-۱۸. فرض کنیدX فضای توپولوژیک و $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی X و نگاشت کانونیک $\pi : X \to \frac{X}{\sim}$ باشد . یک مجموعه U ، $U \subseteq \frac{X}{\sim}$ باز گوییم اگر $\pi^{-1}(U)$ در X باز باشد. مجموعه $\frac{X}{\sim}$ همراه با این توپولوژی *فضای خارج قسمتی* X بر $\sim$ نامیده می‌شود.

۱-۲ گروه های توپولوژیک

نظریه عمومی گروه های توپولوژیک یکی از جدیدترین نظریه های آنالیز است ، از مدت ها پیش، گروه های توپولوژیک را می‌شناختند و نیمه قرن نوزدهم، لی [۹] نظریه گروه های توپولوژیک را با نام "گروه های پیوسته" عنوان کرده بود، که امروزه آن را گروه لی می‌نامند. بررسی گروه های توپولوژیک عمومی با کار شریر [۱۰] در سال ۱۹۲۶ آغاز شد. در این بخش تعاریف اولیه را از منابع [۸، ۱۹، ۱۴، ۳۲] ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۱. یک *گروه توپولوژیک*، مجموعه‌ای مانند G است با دو ساختار زیر:

۱. G یک گروه با عنصر همانی e است؛

۲. G یک فضای توپولوژیک است.

به طوریکه این دو ساختار با هم سازگارند. یعنی نگاشت حاصلضرب $\mathcal{M} : G \times G \longrightarrow G$ به طوریکه $(x,y) \to xy$ و نگاشت معکوس $\mathcal{V} : G \longrightarrow G$ به طوریکه $x \to x^{-1}$ پیوسته‌اند.

در تعریف فوق $G \times G$ دارای توپولوژی حاصلضربی است.

مثال ۱-۲-۲. فرض کنید $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط و $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid = 1\} \subset \mathbb{C}$ همان دایره واحد باشد. S^1 همراه با عمل ضرب و توپولوژی اقلیدسی یک گروه توپولوژیک است.

تعریف ۱-۲-۳. یک *گروه لی*، مجموعه‌ای مانند G است با دو ساختار زیر:

۱. G یک گروه با عنصر همانی e است؛

۲. G یک منیفلد هموار است.

به طوریکه این دو ساختار با هم سازگارند. یعنی نگاشت حاصلضرب $\mathcal{M} : G \times G \longrightarrow G$ به طوریکه $(x,y) \to xy$ و نگاشت وارون $\mathcal{V} : G \longrightarrow G$ به طوریکه $x \to x^{-1}$ پیوسته و هموار (مشتقپذیر) هستند.

[۸] $\sigma-$compact [۹] Lie [۱۰] Schreier

تعریف ۱-۲-۴. یک سیستم کامل از همسایگی های x در G ، گردایه ای مانند $\mathcal{A}$ از همسایگی x است به طوری که هر همسایگی x، شامل یک عضو از $\mathcal{A}$ باشد. اگر هر عضو $\mathcal{A}$ باز باشند آن گاه سیستم حاصل را یک سیستم اساسی همسایگی های باز x گویند.

قضیه ۱-۲-۵. اگر $\mathcal{A}$ یک خانواده از همسایگی‌های باز حول همانی e در گروه توپولوژیک G باشد. یک سیستم اساسی در گروه توپولوژیک G وجود دارد که دارای خواص زیر است:

۱. برای هر $U,V \in \mathcal{A}$ و جود دارد $W \in \mathcal{A}$ به طوریکه $W \subseteq U \cap V$؛

۲. برای هر $a \in U \in \mathcal{A}$ وجود دارد $V \in \mathcal{A}$به طوریکه $Va = \{xa; x \in V\} \subseteq U$؛

۳. برای هر $U \in \mathcal{A}$ وجود دارد $V \in \mathcal{A}$به طوریکه $V^{-۱}V = \{x^{-۱}y; x,y \in V\} \subseteq U$؛

۴. برای هر $U \in \mathcal{A}$ و $x \in G$وجود دارد $V \in \mathcal{A}$به طوریکه $x^{-۱}Vx = \{x^{-۱}yx; y \in V\} \subseteq U$؛

قضیه ۱-۲-۶. [۱۹] $\mathcal{A}$ یک خانواده ای از همسایگی های حول همانی e در گروه G که دارای خواص تعریف ۱-۲-۵ است آن گاه $\mathcal{A}$ یک توپولوژیِ یکتا روی G ایجاد می‌کند که G یک گروه توپولوژیک خواهد شد.

بنابراین به دو روش یک گروه می‌تواند تبدیل به یک گروه توپولوژیک شود. ثابت شده است که این دو روش معادل هستند.

مثال ۱-۲-۷. هر گروه با توپولوژی گسسته ، همچنین $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ و $\mathbb{T}$ گروه های توپولوژیک هستند.

قضیه ۱-۲-۸. اگر G یک گروه توپولوژیک و H یک زیرگروه از G باشد، در اینصورت H با توپولوژی زیرفضایی یک گروه توپولوژیک است.

قضیه ۱-۲-۹. [۱۹] فرض کنید G یک گروه توپولوژیک هاسدورف باشد. برای هر همسایگی باز U حول همانی e ، همسایگی باز V حول e وجود دارد به طوریکه $\bar{V} \subset U$.

قضیه ۱-۲-۱۰. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و U یک همسایگی باز از همانی e و F یک زیرمجموعه فشرده از G باشد. در اینصورت، همسایگی باز V از e وجود دارد به طوریکه به ازای هر $x \in F$، $xVx^{-۱} \subset U$.

قضیه ۱-۲-۱۱. [۳۲] فرض کنید G یک گروه توپولوژیک $T_۰$ و H یک زیرگروه فشرده موضعی از G باشد. در اینصورت H بسته است.

قضیه ۱-۲-۱۲. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H یک زیرگروه آن باشد. دراینصورت، نگاشت طبیعی $\Phi : G \longrightarrow G/H$ باز است.

در قضیه ۱-۲-۱۲ اگر G یک گروه فشرده و H یک زیرگروه بسته از G باشد و یا اگر H یک زیرگروه فشرده از G باشد، نگاشت Φ بسته نیز می‌باشد.

قضیه ۱-۲-۱۳. [۳۲] فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H زیرگروهی از آن باشد. در اینصورت H در G باز است اگر و تنها اگر فضای G/H گسسته باشد.

قضیه ۱-۲-۱۴. فرض کنید G یک گروه فشرده (فشرده موضعی) و H یک زیرگروه از G باشد. در اینصورت فضایG/H فشرده (فشرده موضعی) است.

قضیه ۱-۲-۱۵. زیرگروه H از گروه توپولوژیک G باز است اگر و تنها اگر $int_G H \neq \varnothing$.

هر زیرگروه باز هر زیرگروه باز از یک گروه توپولوژیک، بسته است.

تعریف ۱-۲-۱۶. فرض کنید G و G' دو گروه توپولوژیکی باشند. آن گاه نگاشت $f : G \to G'$ را یکریختی توپولوژیکی گوییم ، هرگاه f یکریختی گروهی و همانریختی (همیومورفیسم) از فضای توپولوژیک G به فضای توپولوژیک G' باشد.

۱-۳ گروه کوهمولوژی

در تعریف گروه کوهمولوژی روی گروه های توپولوژیک دو دیدگاه همگن و غیر همگن وجود دارد، که هر یک را به اختصار بیان می‌کنیم. مطالب این بخش با توجه به مراجع [۹، ۱۳، ۲۰] ارائه شده است.

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید G و A گروه های توپولوژیک و A آبلی باشد. گوییم G روی A از چپ عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و $a \in A$ عنصر ga متعلق به A باشدو همچنین

الف) نگاشت $(g,a) \mapsto ga$ در g و a پیوسته باشد.

ب) $g(a_۱, a_۲) = ga_۱ + ga_۲$

ج) $۱a = a$.

اگر به ازای هر $g \in G$ و $a \in A$ داشته باشیم $ga = a$ آن گاه گوییم G روی A به طور ساده عمل می‌کند.

همگن: [۱۱]

فرض کنید G و A گروه های توپولوژیک باشند و G روی A از چپ عمل کند. برای $G^{n+۱} = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n+۱}$ ، به ازای هر $n \geq ۰$ نگاشت پیوسته

[۱۱] Homogenous

$$F : G^{n+1} \to A$$

را در نظر می‌گیریم. نگاشت F را $n-$*هم زنجیر*[۱۲]، G روی A با بعد n می‌نامیم اگر به ازای هر $g \in G$ و $(x_0, ..., x_n) \in G^{n+1}$ در شرط زیر صدق کند:

$$F(gx_0, ..., gx_n) = gF(x_0, ..., x_n)$$

مجموعه همه هم زنجیرهای G روی A با بعد n تشکیل یک گروه آبلی جمعی می‌دهد، که آن را با $C^n(G, A)$ نمایش می‌دهیم.

به ازای هر $F \in C^n(G, A)$ ، نگاشت پیوسته $\delta_n F : G^{n+2} \to A$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$\delta_n F(x_0, ..., x_{n+1}) = \Sigma_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_{n+1})$

$= F(x_1, ..., x_{n+1}) + F(x_0, x_2, ..., x_{n+1}) + ... + F(x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) + ... + F(x_0, ..., x_n).$

به سادگی می‌توان نشان داد که عملگر δ_n خواص زیر را دارد:

الف) $\delta_n F$ یک هم زنجیر با بعد $n+1$ است.

ب) $\delta_n(F_1 + F_2) = \delta_n F_1 + \delta_n F_2$

ج) $\delta_{n+1}(\delta_n F) = 0$

عملگر δ را *عملگر هم مرز* گوییم.

فرض کنید F یک $n-$ هم زنجیر دلخواه باشد به طوری که $\delta_n F = 0$. در اینصورت F را $n-$ هم دور گوییم. $n-$ هم دورها [۱۳] تشکیل زیر گروهی از $C^n(G, A)$ می‌دهند که آن را با $Z^n(G, A)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $n > 0$ ، آن گاه $n-$ هم زنجیر هایی که به ازای $F' \in C^{n-1}(G, A)$ به صورت $F = \delta_{n-1} F'$ می‌باشد را $n-$ هم مرز [۱۴] می‌نامیم. مجموعه همه $n-$ هم مرزها را با $B^n(G, A)$ نشان می‌دهیم، که تشکیل یک زیر گروه از $C^n(G, A)$ می‌دهند. با توجه به این خاصیت که $\delta_{n+1}(\delta_n F) = 0$، لذا می‌توان نتیجه گرفت که $B^n(G, A)$ زیر گروهی از $Z^n(G, A)$ می‌باشد.

گروه خارج قسمتی

$$\frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)}$$

را $n-$ امین *گروه کوهمولوژی* [۱۵]، G روی A گوییم و آن را با $H^n(G, A)$ نمایش می‌دهیم.

غیر همگن :

[۱۲] n-Cochain
[۱۳] Cocycle
[۱۴] Coboundary
[۱۵] Cohomology