بسم الله الرحمن الرحیم

۳۲۱۲۱

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد کرمان

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: محض

موضوع:

عملگرهای استلزام و خواص ویژه

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

نگارش:

مجتبی مهذب

سال تحصیلی: ۱۳۷۹

۱۶ /۹/ ۱۳۷۹

موضوع:

عملگرهای استلزام و خواص ویژه

توسط:

مجتبی مهذب

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته و گرایش: ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۱۳۷۹/۵/۱ در مقابل هیئت داوران دفاع به عمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران:

استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی

داور: دکتر رضا نکوئی

داور: دکتر نصرالله گرامی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد:

دکتر اسفندیار اسلامی

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:

دکتر محمد حسین متقی

معاون آموزشی دانشگاه:

آقای مجید غلامحسین پور

رئیس دانشگاه:

دکتر محمد حسین متقی

این رساله را

به اعضای خانواده

بویژه مادرم

تقدیم می‌کنم

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندی را سزاست که به من توانایی تحصیل علم و دانش عطا فرمود. امید آنکه بتوانم اندوخته‌های خود را در راه پیشرفت جامعه بکار گیرم.

لازم می‌دانم از استاد فاضل جناب آقای دکتر اسفندیار اسلامی که در تدوین این پایان‌نامه از راهنمایی‌های ایشان بهره وافی برده‌ام صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

همچنین از آقایان دکتر رضا نکویی و دکتر نصراله گرامی که زحمت مطالعه این پایان‌نامه را بر خود هموار کرده و در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت نموده‌اند کمال تشکر را دارم.

ضمناً از کلیه اعضای خانواده‌ام که در راه کسب دانش همواره مشوق من بوده و با تحمل تمام سختیها برای خود راه تحصیل مرا همواره فراهم نمودند تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

مجتبی مهذب

تیرماه ۱۳۷۹

چکیده

در این پایان‌نامه خاصیتهایی را که بطور نسبی مهم بوده و در مقاله‌های متعدد از آنها نام برده شده است، در مورد عملگرهای مشهور ارزیابی می‌نمائیم.

در فصل اول به معرفی جبرهای استلزامی، استلزام مثبت و استلزام می‌پردازیم. این بررسی تنها از آن جهت صورت می‌گیرد که این خواص را طبقه‌بندی کرده و در کلاسهای ویژه از اثبات خاصیتهای دیگر مربوط به آن کلاس خودداری نمائیم.

در فصل دوم، عملگرهای لوکاسیویچ، گودل، گوگن، دینز، رشر و رشن‌باخ مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این فصل با اصلاح عملگر گودل تعداد خاصیتهای آن را افزایش می‌دهیم. در پایان این فصل عملگری ارائه می‌دهیم که بر حسب متغیر t دارای فیلتر بیشینهٔ $[t, 1)$ است.

در فصل سوم خاصیت یکنوایی را مورد بررسی قرار داده و همچنین مشبکهٔ عملگرهای ذکر شده را تشکیل می‌دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفهومهای مقدماتی

۱_۱ مقدمه

در این فصل تعاریف جبر، جبرهای استلزامی، استلزام مثبت و استلزام ارائه می‌شود و خواص آنها در قالب قضیه‌هایی اثبات می‌شود. همچنین به مرور تعاریف فیلتر و عملگر استلزام می‌پردازیم.

۱_۲ جبر

تعریف ۱_۲_۱: نگاشت $o : A^n \to A$ که در آن n یک عدد نامنفی است، یک عملگر n_تایی روی مجموعهٔ A نامیده می‌شود. بویژه هرگاه $n = ۰$، عملگر n_تایی روی A را با تعریف $A^۰ = \{\emptyset\}$ یک عضو ثابت از A در نظر می‌گیریم.

مثال: در مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ عملگرهای صفرتایی، یکتایی و دوتایی را می‌توانیم بصورت زیر تعریف کنیم.

$$O_۱ : \mathbf{Z}^۰ \to \mathbf{Z} \quad ; \quad O_۱(\emptyset) = ۰$$

$$O_۲ : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad ; \quad O_۲(n) = -n$$

$$O_۳ : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad ; \quad O_۳(n, m) = n + m.$$

تعریف ۱_۲_۲: یک جبر مجرد یا مختصراً یک جبر زوج $(A, (o_t)_{t\in T})$ می‌باشد، بطوریکه T و A مجموعه‌های غیرتهی و o_t یک عملگر m_تایی روی مجموعهٔ A است. هرگاه $T = \{۱, ۲, \ldots, m\}$، آنگاه یک جبر اغلب بصورت $(A, o_۱, \ldots, o_m)$ نشان داده می‌شود.

با توجه به مثال قبل $(\mathbf{Z}, o_۱, o_۲, o_۳)$ یک جبر می‌باشد.

تعریف ۱_۲_۳: جبرهای $(A, (o_t)_{t\in T})$ و $(B, (o'_t)_{t\in T'})$ را مشابه گویند هرگاه $T = T'$ و برای هر $t \in T$، عددی نامنفی مانند n وجود داشته باشد بقسمی که o_t و o'_t هر دو عملگرهایی n_تایی باشند. بنابراین جبرهای $(Q^*, \div)$ و $(\mathbb{N}, +)$ و $(\mathbf{Z}, \cdot)$ مثالهایی از جبرهای مشابه هستند.

۱ـ۳ جبر استلزامی

تعریف ۱ـ۳ـ۱: جبر مجرد $(A, 1, \Rightarrow)$ که در آن ۱ یک عملگر صفرتایی و $\Rightarrow$ یک عملگر دوتایی است یک جبر استلزامی گفته می‌شود هرگاه برای هر $a, b, c \in A$ شرایط زیر برقرار باشد:

(i_1) $\quad a \Rightarrow a = 1$

(i_2) $\quad$ اگر $a \Rightarrow b = 1, b \Rightarrow c = 1$ آنگاه $a \Rightarrow c = 1$

(i_3) $\quad$ اگر $a \Rightarrow b = 1, b \Rightarrow a = 1$ آنگاه $a = b$

(i_4) $\quad a \Rightarrow 1 = 1$

قضیه ۱ـ۳ـ۲: در هر جبر استلزامی $(A, 1, \Rightarrow)$ شرایط $a \Rightarrow b = 1$ و $a = 1$ ایجاب می‌کند $b = 1$.

اثبات: طبق (i_4) داریم $b \Rightarrow 1 = 1$ و طبق فرض $1 \Rightarrow b = 1$ حال طبق (i_3) نتیجه مورد نظر یعنی $b = 1$ برقرار است.

مثال: جبر مجرد $([0, 1], 1, \Rightarrow)$ که در آن عملگر $\Rightarrow$ بصورت زیر تعریف می‌شود، یک جبر استلزامی است.

$$a \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ 0 & a > b \end{cases}$$

زیرا برای هر $a, b, c \in [0, 1]$ داریم:

(i_1) $\quad a \Rightarrow a = 1$

(i_2) اگر $a \Rightarrow b = 1$ و $b \Rightarrow c = 1$ آنگاه $a \leq b$ و $b \leq c$ در نتیجه $a \leq c$ لذا $a \Rightarrow c = 1$.

(i_3) اگر $a \Rightarrow b = 1$ و $b \Rightarrow a = 1$ آنگاه $a \leq b$ و $b \leq a$ در نتیجه $a = b$.

(i_4) $\quad a \Rightarrow 1 = 1$

همچنین هرگاه عملگر $\Rightarrow$ را در جبر $([0,1],1,\Rightarrow)$ بصورت

$$\forall a,b\in[0,1]\quad a\Rightarrow b=b\cdot$$

تعریف کنیم. آنگاه جبر مذکور یک جبر استلزامی نیست زیرا شرط (i_1) بوضوح برقرار نمی‌باشد.

۱ـ۴ جبر استلزام مثبت

تعریف ۱ـ۴ـ۱: یک جبر مجرد $(A,1,\Rightarrow)$ همراه با یک عملگر صفرتایی و عملگر دوتایی $\Rightarrow$ یک جبر استلزام مثبت نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $a,b,c\in A$ شرایط زیر برقرار باشد:

$(P_1)\quad a\Rightarrow(b\Rightarrow a)=1$

$(P_2)\quad (a\Rightarrow(b\Rightarrow c))\Rightarrow((a\Rightarrow b)\Rightarrow(a\Rightarrow c))=1$

(P_3) اگر $a\Rightarrow b=1$ و $b\Rightarrow a=1$ آنگاه $a=b$

$(P_4)\quad a\Rightarrow 1=1$

همچنین در هر جبر استلزام مثبت خواص (P_2) و (P_4) نتایج زیر را برقرار می‌سازد.

اگر $a\Rightarrow b=1$ و $a=1$ آنگاه $b=1$ $\qquad(1)$

اگر $a=1$ آنگاه $b\Rightarrow a=1$ $\qquad(2)$

قضیه ۱ـ۴ـ۲: هر جبر استلزام مثبت $(A,1,\Rightarrow)$ یک جبر استلزامی است و هر جبر استلزامی که در (P_1) و (P_2) صدق کند، یک جبر استلزام مثبت است.

اثبات: بوسیلهٔ (P_2) داریم:

$$(a\Rightarrow((a\Rightarrow a)\Rightarrow a)\Rightarrow((a\Rightarrow(a\Rightarrow a))\Rightarrow(a\Rightarrow a))=1$$

و بوسیلهٔ (P_1) داریم:

$$a\Rightarrow((a\Rightarrow a)\Rightarrow a)=1$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۱) بدست می‌آوریم:

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow a)) \Rightarrow (a \Rightarrow a) = ۱$$

با بکارگیری مجدد $(P_۱)$ و (۱) خواهیم داشت $a \Rightarrow a = ۱$ برای هر $a \in A$. بنابراین $(i_۱)$ برقرار است. برای اثبات $(i_۲)$ فرض می‌کنیم $a \Rightarrow b = ۱$ و $b \Rightarrow c = ۱$. با بکارگیری (۲) بدست می‌آوریم $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = ۱$ و چون $a \Rightarrow b = ۱$ از $(P_۲)$ و (۱) داریم $a \Rightarrow c = ۱$. شرایط $(i_۳)$ و $(i_۴)$ به ترتیب $(P_۳)$ و $(P_۴)$ هستند. دومین گزاره بدیهی است.

مثال: اگر $A = \{a, ۱\}$ و $a \leq ۱$ و $a \neq ۱$ آنگاه $(A, ۱, \Rightarrow)$ همراه با عملگر $\Rightarrow$ تعریف شده بوسیلهٔ معادلات

$$a \Rightarrow a = a \Rightarrow ۱ = ۱ \Rightarrow ۱ = ۱ \quad , \quad ۱ \Rightarrow a = a \qquad (۳)$$

یک مثال برای جبر استلزام مثبت است.

قضیه ۱-۴-۳: در هر جبر استلزام مثبت $(A, ۱, \Rightarrow)$ شرایط زیر برقرارند:

(۴) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = ۱$

(۵) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = ۱$ ایجاب می‌کند $b \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$

(۶) $a \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow b) = ۱$

(۷) $۱ \Rightarrow a = a$

(۸) اگر $b \Rightarrow c = ۱$ آنگاه $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$

(۹) اگر $a \Rightarrow b = ۱$ آنگاه $(b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$

(۱۰) $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b$

(۱۱) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

$$(۱۲) \qquad (a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = ۱$$

$$(۱۳) \qquad (b \Rightarrow c) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = ۱$$

اثبات: خاصیت (۴) معادل ($P_۱$) است. برای (۵) فرض کنیم که $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = ۱$ در نتیجه بوسیلهٔ ($P_۲$) و (۱) داریم:

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطهٔ (۴) داریم:

$$b \Rightarrow (a \Rightarrow b) = ۱$$

بنابراین چون هر جبر استلزام مثبت یک جبر استلزامی است لذا از روابط

$$b \Rightarrow (a \Rightarrow b) = ۱ \quad \text{و} \quad (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱$$

و ($i_۲$) نتیجه می‌گیریم:

$$b \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱ \cdot$$

(۶) طبق (۵) و ($i_۱$) برقرار است.

برای اثبات (۷) طبق رابطهٔ (۶) داریم:

$$۱ \Rightarrow ((۱ \Rightarrow a) \Rightarrow a) = ۱$$

در نتیجه طبق (۱)؛ $(۱ \Rightarrow a) \Rightarrow a = ۱$ از طرف دیگر طبق (۴)؛ $a \Rightarrow (۱ \Rightarrow a) = ۱$ لذا طبق ($i_۳$) $۱ \Rightarrow a = a$.

برای اثبات (۸) چون $b \Rightarrow c = ۱$ لذا طبق (۲)؛ $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = ۱$ در نتیجه با بکارگیری ($P_۲$) و (۱) داریم:

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = ۱ \cdot$$

برای اثبات (۹)، با استفاده از (P_2) داریم:

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = 1$$

با بکارگیری رابطهٔ (۷) و اینکه $a \Rightarrow b = 1$ خواهیم داشت:

$$((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((1 \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = a \Rightarrow c)) = 1$$

با توجه به رابطهٔ (۴) داریم:

$$(b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) = 1$$

و در نتیجه طبق (i_2) داریم:

$$(b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = 1.$$

برای اثبات (۱۰) با استفاده از (P_2) و (i_1) و (۷) داریم:

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow ((a \Rightarrow a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)) = 1$$

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (1 \Rightarrow (a \Rightarrow b)) = 1$$

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (a \Rightarrow b) = 1$$

همچنین با استفاده از (۴) داریم:

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) = 1$$

لذا طبق (i_3)

$$a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b.$$

برای اثبات (۱۱)، با استفاده از $(P_۲)$ داریم:

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = ۱$$

با بکارگیری (۵) خواهیم داشت:

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = ۱$$

بوسیلهٔ (۴)؛ $b \Rightarrow (a \Rightarrow b) = ۱$ و $(i_۲)$ نتیجه می‌گیریم:

$$b \Rightarrow ((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = ۱$$

با استفادهٔ مجدد از (۵) داریم:

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = ۱$$

بهمین ترتیب:

$$(b \Rightarrow (a \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) = ۱$$

در نتیجه طبق $(i_۳)$ حکم برقرار است.

برای اثبات (۱۲)، طبق (۶) داریم:

$$b \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c) = ۱$$

با بکارگیری (۸) نتیجه می‌شود:

$$((a \Rightarrow b) \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c)) = ۱$$

همچنین طبق (۶)؛ $a \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow b) = ۱$ در نتیجه با استفاده از $(i_۲)$ داریم:

$$a \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c)) = ۱$$