بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

روش تعمیم یافته حداقل مانده (GMRES)برای حل دستگاه های معادلات خطی

استاد راهنما:

پرفسور محمدتقی درویشی

نگارش:

سمیه رضایی

اسفند ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

روان پاک پدرم

پاکی قدومش

صفای وجودش

سنگینی سکوتش

نجابت وغرورش

وبازمزمه کلامش

در جذبه محراب

گستره وسیع جنت بود

ومن فقط پدر می خواندمش

تشکر و قدردانی

منت خدای را عزوجل، که طاعتش، موجب قرب است و به شکر اندرش، مزید نعمت.

از استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر محمدتقی درویشی که در طی مراحل تحقیق و تدوین پایان‌نامه همواره مشاور و راهنمای من بوده‌اند، سپاسگزارم.

از همه دوستان خوبم از جمله خانم‌ها: مریم امیری، فاطمه چراغی، سمیه بهرامی، شادی امیری، سمیه دایی‌چین و مریم معطرپور و آقایان، محمد نجفی و نورالله درویشی صمیمانه تشکر می‌کنم و موفقیت روزافزون را برای آن‌ها از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

حل دستگاه‌های معادلات خطی از اهمیت ویژه‌ای در مسایل فنی و مهندسی برخوردار است. ولی در بعضی موارد با دستگاه‌های غیرخطی مواجه می‌شویم، برای حل این گونه دستگاه‌ها می‌توان از روش‌های تکراری مانند روش نیوتن، در هر تکرار، حل آن را به حل یک دستگاه معادلات خطی منوط کرد.

روش تعمیم یافته مانده‌ها یا $GMRES$ یکی از روش‌هایی است که اخیراً به منظور حل دستگاه‌های معادلات خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش در مقایسه با روش‌های تکراری مانند گاوس- سایدل یا ژاکوبی از دقت بیشتر و سرعت همگرایی بالاتری برخوردار می‌باشد. روش‌های تکراری موجود و جدید برای بهبود زمان حل مسایل و کاهش خطا ابداع می‌گردد. کاهش زمان اجرا یکی از مسایل مهمی است که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می گیرد، در این پایان نامه برآنیم که به معرفی روش $GMRES$ به منظور تسریع همگرایی روش‌های موجود بپردازیم.

این پایان‌نامه به شرح زیر تدوین شده است:

فصل اول را با بیان برخی تعریف‌های مورد نیاز در فصل‌های بعدی آغاز می‌کنیم و در ادامه آن، روش تکراری نیوتن، مفهوم همگرایی و هم چنین مرتبه همگرایی آن را برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی شرح می‌دهیم و پایان این فصل یکی از روش‌های مرتبه‌های بالاتر شبه- نیوتن را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم روش تعمیم یافته حداقل مانده را برای حل دستگاه خطی $Ax=b$ ارائه می‌دهیم. در فصل سوم و چهارم به تحلیل همگرایی روش $GMRES$ توسط چند جمله‌ای‌های چبی‌شف نوع اول و نوع دوم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی $Ax=b$ که ماتریس A ماتریسی سه قطری است، می پردازیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف و مقدمات

در ابتدای این فصل برای آشنایی بیشتر خوانندگان، بعضی از مفاهیم و تعاریف به کار گرفته شده در فصل های بعدی این پایان‌نامه را آورده‌ایم.

۱-۱ تعاریف

تعریف ۱-۱-۱ گوییم ماتریس غیر صفر A دارای رتبهٔ r است هرگاه حداقل یکی از زیر دترمینان‌های مربع مرتبهٔ r آن مخالف صفر بوده در حالی که هر زیر دترمینان مربع مرتبهٔ $(r+1)$ام آن (در صورت وجود) صفر باشد.

رتبهٔ ماتریس A را با $rank(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۲ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ هرمیتی است اگر $A^H = A$ به طوری که $A^H = (A^*)^T$ و A^* مزدوج ماتریس A است.

و هنگامی که $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $A = A^T$ در این صورت A را متقارن می‌گویند.

تعریف ۱-۱-۳ ماتریس A را نرمال می‌گوییم هرگاه $A^H A = AA^H$.

تعریف ۱-۱-٤ فرض کنید λ_1، λ_2،...، λ_n مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ باشند، شعاع طیفی ماتریس $A_{n\times n}$ را با $\rho(A)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت $\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۵ مجموعه کلیه مقادیر ویژه ماتریس مربعی A را طیف A می‌گویند.

تعریف ۱-۱-٦ ماتریس متقارن A را معین مثبت می‌گویند، اگر داشته باشیم:

$$x^T Ax > 0, \quad \forall x \neq 0$$

اگر برای هر x، $x^T Ax \geq 0$ آن گاه A یک ماتریس معین نامنفی (نیمه معین مثبت) است.

از جمله خواص یک ماتریس معین مثبت به شرح زیر است:

(1) همواره مؤلفه‌های روی قطر اصلی مثبت می‌باشند. $(a_{ii} > 0)$

(2) مقادیر ویژه A مثبت هستند.

تعریف ۱-۱-۷ نامساوی $\alpha \le \beta$ را تند یا شارپ می‌گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ کوچک، داشته باشیم: $\beta - \varepsilon < \alpha$.

تعریف ۱-۱-۸ منظور از یک تابع با مقدار ماتریسی تابعی است که برد آن مجموعه‌ای از ماتریس هاست. مثلاً $f(\alpha) = A$ که A یک ماتریس است.

تعریف ۱-۱-۹ ماتریس مربع A را نامنفرد گویند، هرگاه وارون‌پذیر باشد در غیر این صورت A را منفرد می‌نامند.

تعریف ۱-۱-۱۰ نرم برداری روی یک فضای برداری v تابعی است مانند $\|\bullet\| : v \to \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ که دارای خواص زیر باشد:

$$1)\ \forall x \in v\ ,\ \|x\| \ge 0\ ,\ \|x\| = 0 \iff x = 0$$
$$2)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ , \forall x \in v\ ,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
$$3)\ \forall x, y \in v\ ,\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$$

بنابراین هرگاه چنین تابعی روی v وجود داشته باشد v را یک فضای برداری نرم دار می گویند.

نرم‌های معروف در $\mathbb{R}^n$ عبارتند از:

الف) نرم- یک که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ب) نرم- دو که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

ج) نرم- p که حالت کلی نرم- یک ونرم-دو می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

د) نرم-بی نهایت که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

تعریف ۱-۱-۱۱ مشابه نرم برداری، نرم ماتریسی نیز تابعی مانند $\|\bullet\|$، از $\mathbb{R}^{m \times n}$ به مجموعهٔ اعداد حقیقی نا منفی است، به طوری که در خواص زیر صدق می کند:

برای هر ماتریس A داریم: $\|A\| \ge 0$ و $\|A\| = 0$ اگر وتنها اگر $A = 0$.

برای هر عدد حقیقی a داریم: $\|aA\| = |a|\|A\|$.

برای هر دو ماتریس هم مرتبه A و B داریم: $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

برای ماتریس $A_{m \times n}$ و ماتریس $B_{n \times r}$ داریم: $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

نرم برداری $\|\bullet\|$ و نرم ماتریسی $\|\bullet\|'$ سازگار نامیده می‌شود، هرگاه برای هر بردار x و ماتریس A داشته باشیم:

$$\|Ax\| \le \|A\|' \|x\|$$

هم چنین نرم های معروف ماتریسی به صورت زیر هستند:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

تعریف ۱-۱-۱۲ اگر $A_{n \times n}$ یک ماتریس نا منفرد باشد آن گاه عدد حالت آن عبارت است از:

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

و چون،

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\|$$

بنابراین همواره، $K(A) \ge 1$.

هدف از ارائه پایان‌نامه حل دستگاه‌های معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از روش تعمیم یافته حداقل مانده است، یکی از کاربردهای حل دستگاه‌های خطی، زمانی است که با حل دستگاه معادلات غیرخطی سر و کار داریم. لذا مقدمه مطالب را با دستگاه‌های غیرخطی شروع نموده‌ایم. در این فصل روش‌هایی تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی $F(X)=0$ را ارائه می‌دهیم که مهم‌ترین آن‌ها روش تکراری نیوتن است. قبل از بیان روش نیوتن، مفاهیم نقطه ثابت و روش تکرار ساده را معرفی می‌کنیم.(ر.ک.[۱])

۱-۲ مقدمه

f را تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. نقاط ثابت توابع بر تغییر معادله $f(x)=0$ به $g(x)=x$ استوار می باشد. یک روند تعریف $g(x)$ به صورت $x-f(x)$ است. دراین حالت $\bar{x}$ در $f(\bar{x})=0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $g(\bar{x})=\bar{x}$. اگر بتوان برای حل مسئله‌ای به شکل $g(x)=x$ یک روش کلی یافت، با تعریف تابع $g(x)=x-f(x)$ می‌توان جوابی از $f(x)=0$ را به دست آورد.

تعریف ۱-۲-۱ $\alpha\in\mathbb{R}$ را نقطه ثابت تابع $g(x)$ گویند هرگاه $g(\alpha)=\alpha$.

مثال ۱-۲-۱ فرض کنید هدف یافتن یک جواب $f(x)=0$ بر بازه [۰,۲] باشد که در آن $f(x)=x^2-x-1$. بنابراین یک نقطه ثابت تابع $x=g(x)=1-x^2$ یک جواب $f(x)=0$ می باشد.

حال به بررسی وجود جواب‌های مسائلی به شکل $g(x)=x$ که ممکن است تبدیلات معادله $f(x)=0$ باشند، می‌پردازیم. بنابراین روش تکراری برای حل معادله $g(x)=x$ را ارائه می‌دهیم. برای حل معادله $g(x)=x$ تقریب اولیه x_0 را اختیار نموده و دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را با فرض $x_{n+1}=g(x_n)$ به ازای هر $n\geq 0$ تولید می‌کنیم. این روش، روش تکراری دیگری برای حل معادله $g(\alpha)=\alpha$ است که تکرار نقطه ثابت (تکرار ساده) نام دارد. اگر این دنباله به α همگرا باشد و تابع g پیوسته باشد آن گاه α نقطه ثابت g خواهد بود، زیرا

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} g(x_{n-1})=g(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=g(\alpha)$$

بنابراین روش تکرار نقطه ثابت اگر همگرا باشد آن‌گاه چون $\alpha=\lim_{n\to\infty} x_n$، α نقطه ثابت g است پس به ازای nهای بزرگ می‌توان قرار داد $x_n\cong\alpha$.

۱-۳ روش نیوتن[۱]

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است و آن‌را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n\geq 0$$

یا

$$x_{n+1}=g(x_n)$$

تعریف ۱-۳-۱ فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ به α همگرا باشد. اگر عددی مانند k و ثابتی غیر صفر مانند c وجود داشته باشد به طوری که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^k}=c \tag{۱-۳-۱}$$

آن‌گاه k را مرتبه همگرایی آن دنباله گوییم، هرگاه $k=1$ همگرایی را خطی گویند.

می‌دانیم مرتبه همگرایی روش تکرار ساده وقتی $g'(\alpha)\neq 0$ یک است و روش تکراری نیوتن وقتی $f'(\alpha)\neq 0$ حداقل دو است، برای کسب اطلاعات بیشتر به [۱] رجوع کنید.

حال روش نیوتن را برای حل دستگاه $F(X)=0$ که یک دستگاه معادلات غیرخطی شامل n معادله و n - مجهول می‌باشد، به کار می‌بریم. یعنی در حالت کلی روش نیوتن را برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی تعمیم می‌دهیم.

۱-٤ تعمیم روش نیوتن برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \end{cases} \tag{۱-۴-۱}$$

---

۱. Newton method .

که شکل یک دستگاه از معادلات غیرخطی است، و $f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. اغلب مطلوب است که دستگاه را به-گونه ای دیگر با تعریف یک تابع F نمایش داد که $F:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ،

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(f_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ...,\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \right)^t$$

با استفاده از نماد بردار به منظور نمایش متغیرهای $x_1, x_2, ..., x_n$ ، می نویسیم $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$. لذا دستگاه معادلات (۱-۴-۱) شکل زیر را پیدا می کند:

$$F(X) = 0 \qquad (۱-۴-۲)$$

می‌خواهیم یک ریشه برای معادله غیرخطی (۱-۴-۲) بیابیم. در نظر بگیرید یک دستگاه با n معادله و n مجهول داریم، که با استفاده از روش نیوتن آن‌را حل می کنیم. هدف یافتن یک ریشهٔ تابع $F:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است که $\overline{X}$ جواب واقعی آن است، این جواب می‌تواند به عنوان یک نقطه ثابت بعضی از توابع $G:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر گرفته شود، که به وسیله روش تکرار نقطه ثابت به دست آید. داریم:

$$X^{(k+1)} = G(X^{(k)}) \qquad \mathrm{k} = 0,1,2,. \qquad (۱-۴-۳)$$

که $X^{(o)}$ را تخمین اولیه (۱-۴-۳) می‌گیریم.

به طور کلی فرض کنید بردار α جواب دستگاه (۱-۴-۱) و $X^{(m)}$ تقریب α در مرحلهٔ m ام باشد، در این صورت

$$\alpha = X^{(m)} + h \qquad \mathrm{h}, \alpha \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

با توجه اینکه $f_i(\alpha) = 0$ ، بنابراین داریم

$$0 = f_i(X^{(m)} + h) = f_i(\mathrm{X}^{(m)}) + \mathrm{h}_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + ... + h_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

$$+ h_i h_j \text{ جملات شامل } + ... \qquad (۱-۴-۴)$$

در صورتی که $X^{(m)}$ به اندازه کافی به α نزدیک باشد می‌توان از جملات شامل $h_i h_j$ صرف نظر کرد. بنابراین از (۱-۴-۴) داریم:

$$h_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + ... + h_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = -f_i(X^{(m)}) \qquad \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{n} \qquad (۱-۴-۵)$$

ماتریس ژاکوبین $F(X)$ را در $X^{(m)}$ با $J_F(X^{(m)})$ یا $F'(X^{(m)})$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می-کنیم:

$$J_F(X)=\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

بنابراین هرگاه J ماتریس ژاکوبین دستگاه (۱-۴-۱) باشد، یعنی $J=(J_{ij})$ که $J_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ در این صورت (۱-۴-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$J_m\, h=-F(X^{(m)}) \tag{۱-۴-۶}$$

که در آن J_m ماتریس ژاکوبین در نقطهٔ $X^{(m)}$ است. (۱-۴-۶) را می‌توان به صورت $h=-J_m^{-1}\,F(X^{(m)})$ بازنویسی کرد، البته هرگز J_m^{-1} را محاسبه نمی‌کنیم بلکه از رابطه (۱-۴-۶) و مثلاً از روش حذفی گاوس h را تعیین می‌نمائیم. دقت کنید که (۱-۴-۶) یک دستگاه معادلات خطی است و دیگر غیرخطی نیست به این دلیل است که می‌توان مثلاً روش حذفی گاوس را برای تعیین h به کار ببریم. قرار می‌دهیم : $X^{(m+1)}=X^{(m)}+h$ و روند را تکرار می‌ کنیم.

مثال ۱-٤-۱ با $X^{(0)}=\begin{bmatrix}1.5\\1.0\end{bmatrix}$ تقریبی برای جواب دستگاه غیرخطی زیر بیابید.

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3=0\\2x_1^2+x_2^2-5=0\end{cases}$$

حل:

$$J=\begin{bmatrix}1 & 2\\4x_1 & 2x_2\end{bmatrix}$$

$$J_0=J(X^{(0)})=\begin{bmatrix}1 & 2\\6 & 2\end{bmatrix}$$

$$J_0h=-F(X^{(0)})\quad\Rightarrow\begin{cases}h_1+2h_2=-0.5\\6h_1+2h_2=-0.5\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}h_1=0\\h_2=-0.25\end{cases}$$

بنابراین :

$$X^{(1)}=X^{(0)}+h=\begin{bmatrix}1.5\\1.0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5\\0.75\end{bmatrix}$$

$$J(X^{(1)})=\begin{bmatrix}1 & 2\\4x_1^{(1)} & 2x_2^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\6 & 1.5\end{bmatrix}$$

$$J_1h=-F(X^{(1)})\Rightarrow\begin{cases}h_1+2h_2=0\\6h_1+1.5h_2=-0.0625\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h_1=-0.00119\\h_2=0.000595\end{cases}$$

و از آن داریم:

$$X^{(2)}=X^{(1)}+h=\begin{bmatrix}1.486111112\\0.75694444\end{bmatrix}$$

با ادامه روند، جدول زیر را داریم:

جدول ۱. جواب های تقریبی مثال۱-۴-۱

x_1	x_2
۱/۵	۱/۰
۱/۵	۰/۷۵
۱/٤۸٦۱۱۱۱۱۲	۰/۷٥٦۹٤٤٤٤
۱/٤۸۸۰۳٥٤۷٥	۰/۷٥٥۹۸۲۲٦۲
۱/٤۸۸۰۳۳۸۷۱	۷٥٥۹۸۳۰٦٤ ۰/
۱/٤۸۸۰۳۳۸۷۱	۰/۷٥٥۹۸۳۰٦٤

همان طور که می بینید، جدول همگرایی مرتبه دوم را نشان می دهد.

قضیه ۱-٤-۱ روش نیوتن برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی همگرایی مرتبه دوم دارد.

اثبات: به [۱] مراجعه شود.

در قسمت بعد روش مرتبه سوم که یکی از روش‌های شبه-نیوتن است را برای یافتن ریشه دستگاه‌های معادله های غیرخطی معرفی می کنیم. ابتدا لازم است با ساختار روش تجزیه آدومین و چند جمله‌ای‌های او آشنا شویم که پایه و اساس روش مرتبه سوم است.

۱-۵ ساختار روش تجزیه‌ی آدومین[۲]

روش تجزیه آدومین برای حل معادلات تابعی به صورت

$$F(u(t)) = g(t) \qquad (۱-۵-۱)$$

است که در آن F یک عملگر تابعی از فضای باناخ B به توی B ، $g(t)$ یک تابع معلوم در فضای B است و هدف پیدا کردن $u \in B$ است که در معادله (۱-۵-۱) صدق کند.

فرض کنیم عملگر F دارای قسمت‌های خطی و غیرخطی باشد. اگر قسمت خطی را با B و بخش غیرخطی را با N نمایش دهیم، داریم:

$$F = B + N$$

قسمت خطی B را می‌توان به صورت $I+R$ تجزیه کرد که در آن I یک عملگر معکوس پذیر و R قسمت باقیمانده عملگر خطی است. بنابراین عملگر F را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$F = I + R + N$$
$$I(u) + R(u) + N(u) = g$$

بنابراین

$$I(u) = g - R(u) - N(u) \qquad (۱-۵-۲)$$

چون I عملگری معکوس پذیر است از (۱-۵-۲) داریم،

$$u = I^{-1}g - I^{-1}R(u) - I^{-1}N(u)$$

یا:

۲. *Adomian's decomposition method*

$$u = f + L(u) + G(u) \qquad (۳-۵-۱)$$

که در آن $f = I^{-1}g$ متعلق به B، $L = I^{-1}R$ یک عملگر خطی و $G = I^{-1}N$ یک عملگر غیرخطی است.

روش تجزیه آدومین عبارت است از نمایش u به صورت سری $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و تجزیه عملگر غیرخطی $G(u)$ به صورت $G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ است، که در آن A_n ها، چند جمله‌ای‌هایی از $u_0, u_1, \ldots, u_n$ هستند و چند جمله‌ای های آدومین نامیده می شوند. این چند جمله‌ای ها توسط آدومین [۲] به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} G\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i\right)\right]_{\lambda=0}$$

چند تا از چند جمله‌ای‌های اولیه آن را به صورت زیر داریم:

$$A_0 = G(u_0)$$
$$A_1 = u_1 G'(u_0)$$
$$A_2 = u_2 G'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 G''(u_0)$$

فرض می کنیم فرم صریحی برای تعیین چند جمله‌ای‌های آدومین داشته باشیم، یعنی با توجه به صورت عملگر غیر خطی N، A_n ها به صورت توابعی از $u_0, u_1, \ldots, u_n$ به دست آمده باشند. در این صورت معادله (۱-۵-۳) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + L\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)$$

لذا،

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + \sum_{n=0}^{\infty} L(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) \qquad (۴-۵-۱)$$

با توجه به رابطه (۱-۵-۴) u_nها را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$u_0 = f$$
$$u_1 = L(u_0) + A_0(u_0)$$
$$u_2 = L(u_1) + A_1(u_0, u_1)$$
$$\vdots$$
$$u_{n+1} = L(u_n) + A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)$$

لذا تا زمانی که A_nها برای $n=0,1,...$ معین باشند تمامی u_nها را می‌توان محاسبه کرد.

به دلیل زیاد بودن تعداد جملات u_n ها، u را می‌توان به صورت مجموع m جمله از سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ تقریب زد. بنابراین تقریب m جمله‌ای φ_mرا برای جواب مسئله به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_m \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{m} u_n \qquad , \qquad \lim_{m\to\infty} \varphi_{\mathrm{m}} = u$$

۱-۵-۱ چند جمله‌ای های آدومین

فرض کنید G یک تابع تحلیلی و $\sum_{n=0}^{m} u_n$ یک سری همگرا در فضای باناخ باشد. با استفاده از پارامتر λ می‌توان $G_\lambda(u)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$G_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,...,u_n)\lambda^n$$

حال اگر از رابطه فوق نسبت به λ مشتق مرتبهٔ nام بگیریم و قرار دهیم، $\lambda=0$ داریم:

$$\left.\frac{d^n}{d\lambda^n} G_\lambda(u)\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,...,u_n)\lambda^n\right|_{\lambda=0} \qquad (۱-۵-۵)$$

از طرفی:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,...,u_n)\lambda^n\right|_{\lambda=0} &= \left.\frac{d^n}{d\lambda^n}(A_0(u_0)+A_1(u_0,u_1)\lambda+...)\right|_{\lambda=0} \\
&= \left[n!A_n\left(u_0,u_1,...,u_n\right)+(n+1)!A_{n+1}\left(u_0,u_1,...,u_{n+1}\right)\lambda+...\right]\Big|_{\lambda=0} \\
&= n!A_n\left(u_0,u_1,...,u_n\right)
\end{aligned}$$

با جایگذاری نتیجه به دست آمده در(۱-۵-۵) خواهیم داشت:

$$\left.\frac{d^n G_\lambda(u)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=0} = n!A_n\left(u_0,u_1,...,u_n\right)$$

ولذا با توجه به $u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n\lambda^n$، داریم:

$$A_n\left(u_0,u_1,...,u_n\right) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} G(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\lambda^i)\right]_{\lambda=0} \qquad (۱-۵-۶)$$

رابطه (۱-۵-۶) تعریفی برای چند جمله‌ای‌های آدومین ارائه می‌دهد. که در ضمن روشی برای محاسبه آن‌ها نیز است. روش‌های محاسباتی مختلفی برای محاسبه چند جمله‌ای‌های آدومین وجود دارد. برای کسب اطلاعات در این مورد به [۳] رجوع کنید.

۱-٦ روش مرتبه‌ی سوم

در این قسمت یک روش تکراری مرتبه‌ی بالا را که روی روش ساختار تجزیه‌ی آدومین بنا شده، برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی ارائه می‌دهیم (این روش توسط درویشی و براتی [۴] در سال ۲۰۰۷ ارائه شده است). در پایان، قضیه مربوط به همگرایی این روش را بیان می‌کنیم.

معادله غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=0 \qquad (۱-۶-۱)$$

فرض می‌کنیم $f(x)$ یک ریشه مثل α دارد و $\bar{x}$ یک حدس اولیه به اندازه کافی نزدیک به α باشد. معادله غیرخطی (۱-۶-۱) را به دو شکل دستگاه زیر بر می‌گردانیم:

$$f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x-\bar{x})+g(x)=0 \qquad (۱-۶-۲)$$

$$g(x)=f(x)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \qquad (۱-۶-۳)$$

معادله (۱-۶-۲) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$x=c+N(x) \qquad (۱-۶-۴)$$

که $c=\bar{x}-\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$ و $N(x)=-\dfrac{g(x)}{f'(\bar{x})}$ که یک تابع غیرخطی است.

روش تجزیه‌ی آدومین عبارت بود از جستجوی یک جواب به شکل سری زیر:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}x_n \qquad (۱-۶-۵)$$

و تابع غیر خطی به صورت زیر تجزیه می‌شود،

$$N(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \qquad (۱-۶-۶)$$

که A_n تابع‌های فراخوانده شدهٔ چند جمله‌ای‌های آدومین وابسته به $x_0,x_1,\ldots,x_n$ هستند که به صورت زیر داده می‌شوند:

$$A_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}N\left(\sum_{i=0}^{\infty}x_i\lambda^i\right)\right]_{\lambda=0} \qquad n=0,1,\ldots$$