بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

بررسی شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای مسائل بهینه سازی با ضرایب تابع هدف فازی و بازه‌ای مقدار

استاد راهنما:

دکتر محمد علی یعقوبی

مؤلف:

سید غلامحسین حسینی

شهریور ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

آنان که راستی قامتم، در شکستی قامتشان تجلی یافت.

تشکر و قدردانی:

با تشکر از استاد گرانقدر

جناب آقای دکتر محمد علی یعقوبی

که تلاش‌ها و مساعدت‌های ایشان همواره پشتیبان راهم بود و

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر ماشین‌چی و جناب آقای دکتر محسنی مقدم

کمال تشکر را دارم.

نویسنده از حمایت مالی جزئی قطب سیستم‌های فازی و کاربردهای آن در دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر می‌نماید.

چکیده:

در این پایان نامه شرایط بهینگی کروش–کان–تاکر، برای آن دسته از مسائلی که دارای ضرایب تابع هدف فازی مقدار و یا، بازه ای مقدار هستند مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور ابتدا با استفاده از خواص α– برش‌های یک مجموعه فازی، مفاهیمی نظیر پیوستگی، مشتق پذیری و تحدب برای توابع فازی مقدار بیان می‌شوند و سپس با تعریف مترهای جداگانه روی مجموعه اعداد فازی و مجموعه بازه‌های بسته در اعداد حقیقی، مفهوم جواب برای یک مسأله بهینه سازی با ضرایب تابع هدف فازی مقدار و بازه‌ای مقدار تفسیر می گردد. در پایان شرایط بهینگی کروش–کان– تاکر با استفاده از این مفاهیم برای مسائل بهینه سازی با ضرایب تابع هدف فازی مقدار و بازه‌ای مقدار بیان می‌شوند.

کلید واژه: شرایط بهینگی کروش– کان– تاکر– تفاضل هاکوهارا– متر هاسدورف– پیوستگی سطح به سطح– مشتق پذیر سطح به سطح– مشتق پذیر ضعیف

فهرست مطالب:

فصل اول: مقدمات و پیش نیازهای اولیه

فصل دوم: استفاده از شرایط بهینگی KKT برای مسائل بهینه سازی با ضرایب تابع هدف فازی

فصل سوم: استفاده از شرایط بهینگی KKT برای مسائل برنامه ریزی با ضرایب تابع هدف بازه‌ای

فصل اول

مقدمات و پیش نیازهای اولیه

۱-۱ مقدمه

در ریاضیات کلاسیک، در تعریف یک مجموعه مانند **A**، هر عضو ازمجموعه مرجع مانند x یا به مجموعه **A** تعلق دارد یا ندارد. اما بسیاری از مسائل روزمره را نمی‌توان به این صورت بیان کرد. بعنوان مثال، فرض کنید که **A** مجموعه تمام انسان‌های بلندقد باشد. از آنجا که تعریف دقیقی از بلند قد بودن وجود ندارد، لذا با اطمینان نمی‌توان گفت که یک عضو به مجموعه **A** تعلق دارد یا ندارد. مثلاً شخصی با قد ۱۷۰ سانتیمتر از دیدگاه فردی، بلند قد و از دیدگاه فردی دیگر ممکن است کوتاه قد باشد. بنابراین مجموعه **A** خوش تعریف نمی‌باشد.

زاده در سال ۱۹۶۵ [۲۱] برای اولین بار بحثی تحت عنوان مجموعه‌های فازی را به دنیای علم معرفی کرد. هدف زاده از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی، برطرف کردن نواقص موجود در ریاضیات کلاسیک در توضیح مسائل روزمره بود. همچنین بعد از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی محققان زیادی در ارتباط با این موضوع جدید کار کردند و نتایج چشمگیری هم بدست آوردند.

بعنوان مثال، در کشور ژاپن برای اولین مرتبه از مجموعه‌های فازی در بخش‌های مختلفی از صنعت مانند تولید لوازم خانگی از قبیل یخچال، ماشین لباس‌شویی و... استفاده کردند و به سود بسیاری نیز دست یافتند.

در ریاضیات فازی به هر عضو از مجموعه مرجع مانند x یک عدد در بازه **[۰,۱]** نسبت داده می‌شود. بنابراین در ریاضیات فازی، عضویت یک عضو به مجموعه‌ای مانند $\tilde{\mathbf{A}}$ براساس درجه عضویتی بین ۰ و ۱ مشخص می‌شود، بطوری‌که برای مجموعه $\tilde{\mathbf{A}}$ در حقیقت $\tilde{\mathbf{A}}(x)$ میزان عضویت x در مجموعه $\tilde{\mathbf{A}}$ است.

بعنوان مثال، فرض کنید که {همه انسانها}=X و {انسانهای بلند قد}=**A** . در این صورت تابع عضویت برای مجموعه **A** را می‌توان بصورت زیر نشان داد:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x})=\begin{cases} ۰ & \mathbf{x}<۱۶۵ \\ \dfrac{\mathbf{x}-۱۶۵}{۲۵} & ۱۶۵\le \mathbf{x}\le ۱۹۰ \\ ۱ & \mathbf{x}>۱۹۰ \end{cases}$$

بطوری‌که میزان قد افراد x برحسب سانتیمتر است.

بر اساس تابع عضویت فوق برای مجموعه **A**، اگر شخصی دارای قد کمتر از ۱۶۵ سانتیمتر باشد بطور قطع به مجموعه **A** تعلق نخواهد داشت. اما شخص با قد بیش از ۱۹۰ سانتیمتر بطور قطع به مجموعه **A** تعلق دارد و شخص با قد ۱۸۰ سانتیمتر با درجه عضویت ۰/۶ به مجموعه **A** تعلق دارد.

یکی از مهمترین موارد مطالعه برای نظریه مجموعه‌های فازی، مسائل بهینه سازی می‌باشد. اهمیت این موضوع برای محققین به‌اندازه‌ای می‌باشد که از بدو ابداع نظریه فازی تا به حال، سعی و تلاش بسیاری بمنظور وارد کردن تعاریف فازی در بحث بهینه سازی شده است.

بهینه سازی بخشی جداناپذیر از زندگی روزمره انسان‌ها و حتی جامعه حیوانات محسوب می‌شود، به طوری که بسیاری از شاخه‌های علمی از قبیل اقتصاد، مهندسی، علوم پایه و حتی برخی از گرایش‌های علوم اجتماعی، برای رسیدن به اهداف خود، مجبور به استفاده از روش‌های جستجو و بهینه سازی می‌باشند.

مسایل بهینه سازی به آن دسته از مسایلی گفته می‌شود که در آنها هدف، کمینه یا بیشینه کردن یک یا چند تابع هدف، تحت یک دسته از قیود می‌باشد. همچنین یک مسأله بیشینه‌سازی برای تابع هدف $f(x)$ دقیقاً معادل با یک مسأله کمینه‌سازی برای تابع $-f(x)$ می‌باشد. در حالت کلی، یک مسأله بهینه سازی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

بطوری‌که $\mathbf{X}$ مجموعه شدنی مسأله فوق نام دارد.

یک مسأله بهینه سازی بر حسب تعریف تابع هدف و نوع محدودیت‌های استفاده شده در آن، به دو دسته مسائل بهینه سازی خطی یا غیرخطی تقسیم می‌شود. در یک مسأله بهینه سازی خطی، تابع هدف و قیود مسأله توابعی خطی هستند و بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) = c_۱x_۱ + c_۲x_۲ + \ldots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \ldots + a_{۱n}x_n \le b_۱ \\ & a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \ldots + a_{۲n}x_n \le b_۲ \\ & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_۱, x_۲, \ldots, x_n \ge ۰, \end{aligned}$$

بطوری‌که $c_j\ (j = ۱,۲,\ldots,n)$ ضرایب تابع هدف، $b_i\ (i = ۱,۲,\ldots,m)$ سمت راست محدودیت‌ها و $a_{ij}\ (i = ۱,۲,\ldots,m,\ j = ۱,۲,\ldots,n)$ ضرایب تکنولوژیکی نامیده می‌شوند.

نمایش یک مسأله بهینه سازی بصورت فوق را یک مدل برنامه ریزی خطی می‌نامند که در این مسائل، چهار فرض اصلی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

۱. متناسب بودن[1]: این فرض به معنای این است که اگر سهم متغیر مفروض x_j $(j = 1,2,...,n)$ تغییر کند، میزان سهم آن در تابع هدف و در هر یک از محدودیت‌ها نیز به همان نسبت تغییر می کند.

۲. جمع پذیری[2]: این فرض بیان می‌کند که هزینه یا سود کل برابر با مجموع هزینه‌ها یا سودها می‌باشد. همچنین این فرض ایجاب می کند که در سمت چپ هر محدودیت بصورت مجموع عبارات $a_{ij}x_{ij}$ $(i = 1,...,m; j = 1,...,n)$ باشد.

۳. تقسیم پذیری[3]: این فرض به معنای این است که متغیرها می‌توانند به هر اندازه که لازم باشد، تقسیم شوند و بنابراین مجاز هستند هر مقدار صحیح یا اعشاری را داشته باشند.

۴. معین بودن[4]: این فرض به معنای این است که ضرایب c_j، b_i و a_{ij} $(i = 1,...,m; j = 1,...,n)$ همگی کاملاً معین و مشخص هستند.

در این پایان نامه، هدف بررسی شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر[5] برای مسأله بهینه سازی با تابع هدف فازی و بازه‌ای می‌باشد. یک مسأله بهینه سازی با تابع هدف فازی مقدار، به مسأله‌ای گفته می‌شود که ضرایب تابع هدف در آن، اعداد فازی هستند و در حالت کلی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

همچنین یک مسأله بهینه سازی با تابع هدف بازه‌ای مقدار، به مسأله‌ای گفته می‌شود که در آن ضرایب تابع هدف، بازه‌های بسته هستند و در حالت کلی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) = [c_1^L, c_1^U]x_1 + [c_2^L, c_2^U]x_2 + \dots + [c_n^L, c_n^U]x_n \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

در مسائل بهینه سازی با تابع هدف فازی یا بازه‌ای، ضرایب تابع هدف نادقیق هستند، لذا شرط معین بودن ضرایب تابع هدف نقض می‌شود. بنابراین، نمی‌توان از روش‌های معمول در بهینه سازی مانند روش سیمپلکس، سیمپلکس دوگان و دیگر روش‌ها استفاده کرد.

در فصل‌های دو و سه با تعریف ترتیب جزیی روی مجموعه اعداد فازی و بازه‌ها، ابتدا مفهوم جواب غیر تسلطی برای مسائل بهینه سازی با تابع هدف فازی و بازه‌ای را بیان

---

[1]- Proporionality
[2] -Additivity
[3]- Divisibility
[4]- Deterministic
[5]- Karush-Kuhn-Tucker

کرده و سپس با استفاده از تعریف‌های ارائه شده برای جواب این نوع مسائل بهینه سازی، شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر مورد بررسی قرار گرفته شده است.

قرارداد: در سراسر پایان‌نامه، بردارها با حروف کوچک و پررنگ لاتین نظیر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{a}$ نشان داده شده اند. همچنین مجموعه‌ها با حروف بزرگ و پررنگ نظیر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{R}$ و تمام اسکالرها با حروف کوچک و معمولی لاتین مانند ε، r و c نشان داده شده اند. همچنین در صورت لزوم، (a,b) به عنوان فاصله باز $a < x < b$ و $[a,b]$ به عنوان فاصله بسته $a \le x \le b$ به کار برده شده اند. علاوه بر این، نماد استاندارد مجموعه‌ها $\subseteq$ و $\in$ به ترتیب برای زیرمجموعه و تعلق به کار رفته اند.

۱-۲ مروری بر نظریه مجموعه‌های فازی

تعریف ۱-۲-۱: هر زیر مجموعه فازی از مجموعه $\mathbf{U}$، توسط یک تابع $\tilde{a}:\mathbf{U}\rightarrow[۰,۱]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in \mathbf{U}$، $\tilde{a}(x)$ میزان عضویت x در آن مجموعه فازی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱-۲-۲: برای زیر مجموعه فازی $\tilde{a}$ از $\mathbf{U}$، α-برش‌های (مجموعه‌های تراز ضعیف) $\tilde{a}$ را به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{a}_\alpha = \{x \in \mathbf{U} : \tilde{a}(x) \ge \alpha\} \qquad \forall \alpha \in (۰,۱];$$

$$\tilde{a}_۰ = cl\{x \in \mathbf{U} : \tilde{a}(x) > ۰\},$$

که $\mathbf{cl}$ به معنی بستار می‌باشد.

- مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی از $\mathbf{U}$ با $\mathbf{F(U)}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۳: به هر زیرمجموعه فازی از $\mathbf{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) یک کمیت فازی گویند.

اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ کمیت‌های فازی باشند و $o:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ یک عملگر دوتایی روی $\mathbf{R}$ باشد آنگاه:

$$(\tilde{a}o\tilde{b})(x) = \sup_{yoz=x}\{\mathrm{Min}\,(\tilde{a}(y),\tilde{b}(z))\}$$

اگر بجای عملگر دوتایی o، ازعملگر جمع یا ضرب استفاده شود، خواهیم‌داشت:

$$(\tilde{a}\oplus\tilde{b})(x) = \sup_{y+z=x}\{\mathrm{Min}\,(\tilde{a}(y),\tilde{b}(z))\}$$

$$(\tilde{a}\otimes\tilde{b})(x) = \sup_{y.z=x}\{\mathrm{Min}\,(\tilde{a}(y),\tilde{b}(z))\}$$

تعریف ۱-۲-۴: کمیت فازی $\tilde{a}$ رامحدب گویند هرگاه α-برش‌های آن محدب باشند، یعنی $\tilde{a}_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ بازه باشد (توجه شود که مجموعه‌های محدب در $\mathbf{R}$، بازه هستند).

قضیه ۱-۲-۵: کمیت فازی $\tilde{a}$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x \le y \le z$، $\tilde{a}(y) \ge \mathrm{Min}\{\tilde{a}(x), \tilde{a}(z)\}$.

اثبات: به [13] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-٦: عدد فازی، کمیت فازی است مانند $\tilde{a}$ که در شرایط زیرصدق کند:

۱. $\tilde{a}$ نرمال باشد، یعنی: $\exists x \in \mathbf{R} \ni \tilde{a}(x) = ۱$.

۲. α-برش‌های $\tilde{a}$ بازه های بسته باشند.

۳. $\mathrm{Supp}(\tilde{a}) = \{x : \tilde{a}(x) > ۰\}$ (تکیه‌گاه $\tilde{a}$) کراندار باشد.

- مجموعه تمام اعداد فازی با $\mathbf{F(R)}$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱-۲-۷: حالات زیر برقرارند:

۱. هر عدد حقیقی، یک عدد فازی است.

۲. هر عدد فازی، یک کمیت فازی محدب است.

۳. اگر $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد که $\tilde{a}(r) = ۱$ آنگاه $\tilde{a}$ بر بازه $(-\infty, r]$ نانزولی و بر بازه $[r, +\infty)$ ناصعودی است.

اثبات: به [13] مراجعه شود.

اگر $\tilde{a} \in \mathbf{F(R)}$ آنگاه، برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $\tilde{a}_\alpha$ را می‌توان بصورت یک بازه بسته مانند $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U]$ نشان‌داد. همچنین اگر $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد آنگاه $\tilde{a}_\alpha^L \le \tilde{a}_\alpha^U$ برای هر $\alpha \in [۰,۱]$.

تعریف ۱-۲-۸: $\tilde{a} \in \mathbf{F(R)}$ را نامنفی گویند اگر $\tilde{a}_\alpha^L \ge ۰$ برای هر $\alpha \in [۰,۱]$.

گزاره ۱-۲-۹: اگر $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbf{F(R)}$ آنگاه:

۱. $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \in \mathbf{F(R)}$ و

$$(\tilde{a} \oplus \tilde{b})_\alpha = \tilde{a}_\alpha + \tilde{b}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha^L + \tilde{b}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U + \tilde{b}_\alpha^U]$$

۲. $(\tilde{a} \otimes \tilde{b}) \in \mathbf{F(R)}$ و

$$(\tilde{a} \otimes \tilde{b})_\alpha = [\mathrm{Min}\{\tilde{a}_\alpha^L.\tilde{b}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^L.\tilde{b}_\alpha^U, \tilde{a}_\alpha^U.\tilde{b}_\alpha^U, \tilde{a}_\alpha^U.\tilde{b}_\alpha^L\}, \mathrm{Max}\{\tilde{a}_\alpha^L.\tilde{b}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^L.\tilde{b}_\alpha^U, \tilde{a}_\alpha^U.\tilde{b}_\alpha^U, \tilde{a}_\alpha^U.\tilde{b}_\alpha^L\}]$$

اثبات: به [13] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۱۰: کمیت فازی $\tilde{a}$ یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود هرگاه تابع عضویت آن بصورت زیر باشد:

$$\tilde{a}(x)=\begin{cases} 0 & x<a^L \\ \dfrac{x-a^L}{a-a^L} & a^L\le x\le a \\ \dfrac{x-a^U}{a-a^U} & a<x\le a^U \\ 0 & x>a^U \end{cases}$$

هر عدد فازی مثلثی با سه تایی (a^L,a,a^U) نشان داده می‌شود.

قضیه ۱-۲-۱۱: اگر $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ اعداد فازی مثلثی باشند آنگاه:

$$\tilde{a}\oplus\tilde{b}=(a^L,a,a^U)\oplus(b^L,b,b^U)=(a^L+b^L,a+b,a^U+b^U);$$
$$\tilde{a}\Theta\tilde{b}=(a^L,a,a^U)\Theta(b^L,b,b^U)=(a^L-b^U,a-b,a^U-b^L).$$

اثبات: به [13] مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۱۲ (اصل تجزیه): اگر $\tilde{a}\in \mathbf{F(U)}$ باشد آنگاه:

$$\tilde{a}(x)=\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\operatorname{Min}(\alpha,\chi_{\tilde{a}_\alpha}(x))=\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\alpha\chi_{\tilde{a}_\alpha}(x) \qquad \text{s.t.} \qquad \chi_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}1 & x\in\tilde{a}_\alpha \\ 0 & x\notin\tilde{a}_\alpha\end{cases}$$

اثبات: به [۲۱] مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۱۳ (قضیه نمایش): فرض کنید که $\{\mathbf{B}_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ یک دسته از زیر مجموعه‌های $\mathbf{U}$ باشد. شرط لازم و کافی برای آن که مجموعه فازی $\tilde{a}\in\mathbf{F(U)}$ موجود باشد، بطوری‌که برای هر $\alpha\in[0,1]$ داشته باشیم $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha=\mathbf{B}_\alpha$، این است که برای هر $\alpha,\beta\in[0,1]$ که $\alpha<\beta$، $\mathbf{B}_\beta\subseteq\mathbf{B}_\alpha$.

اثبات: به [۲۱] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۱٤: فرض کنید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ زیر مجموعه‌های محدب و فشرده در $\mathbf{R^n}$ باشند. اگر زیر مجموعه فشرده و محدبی مانند $\mathbf{C}$ از $\mathbf{R^n}$ موجودباشد، بطوری‌که $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$ آنگاه زیر مجموعه $\mathbf{C}$ تفاضل هاکوهارای[۱] $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نامیده می‌شود. که در آن منظور از $\mathbf{R^n}$ فضای $\mathbf{n}$ بعدی اقلیدسی با متر معمولی می‌باشد.

توجه کنید که برای دو مجموعه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\{x+y:x\in\mathbf{A},y\in\mathbf{B}\}$.

قضیه ۱-۲-۱۵: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ دو مجموعه فازی روی $\mathbf{U}$ باشند. در این صورت $\tilde{a}=\tilde{b}$ اگر و تنها اگر $\tilde{a}_\alpha=\tilde{b}_\alpha$ $\forall\alpha\in[0,1]$.

[۱] – Hukuhara difference

اثبات: به [13] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۱۶ [15]: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ دو عدد فازی باشند. اگر عدد فازی $\tilde{c}$ وجود داشته باشد، بطوری‌که $\tilde{a} = \tilde{b} \oplus \tilde{c}$، دراینصورت $\tilde{c}$ تفاضل هاکوهارای بین $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ نامیده شده و بصورت $\tilde{c} = \tilde{a}\,\Theta_H \tilde{b}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱-۲-۱۷: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ اعداد فازی مثلثی زیر باشند:

$$\tilde{a} = (-۲,۲,۶) \quad \text{و} \quad \tilde{b} = (-۲,۰,۲)$$
$$\tilde{c} = \tilde{a}\,\Theta_H\,\tilde{b} \quad \text{و} \quad \tilde{a} = \tilde{c} \oplus \tilde{b}$$

طبق قضیه ۱-۲-۱۱ نتیجه می شود:

$$(-۲,۲,۶) = (c^L, c, c^U) \oplus (-۲,۰,۲) = (c^L - ۲, c + ۰, c^U + ۲)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c^L - ۲ = -۲ \Rightarrow c^L = ۰ \\ c + ۰ = ۰ \quad \Rightarrow c = ۲ \\ c^U + ۲ = ۶ \Rightarrow c^U = ۴ \end{cases}$$

بنابراین تفاضل هاکوهارای $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ عبارت است از $\tilde{c} = (۰,۲,۴)$.

گزاره ۱-۲-۱۸: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ اعداد فازی باشند، اگرتفاضل هاکوهارای $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ موجود باشد آنگاه این تفاضل هاکوهارا یکتاست و $\tilde{c}_\alpha$ بصورت زیر می باشد:

$$\tilde{c}_\alpha = [\tilde{c}_\alpha^L, \tilde{c}_\alpha^U] = [\tilde{a}_\alpha^L - \tilde{b}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U - \tilde{b}_\alpha^U]$$

اثبات: طبق تعریف ۱-۲-۱۶ نتیجه می شود:

$$\exists \tilde{c} \in \mathbf{F(R)} \quad \text{s.t.} \quad \tilde{c} = \tilde{a}\,\Theta_H \tilde{b}$$

در نتیجه $\tilde{a} = \tilde{b} \oplus \tilde{c}$. بنابراین طبق قضیه ۱-۲-۱۴ و گزاره ۱-۲-۹ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tilde{a}_\alpha = \tilde{b}_\alpha + \tilde{c}_\alpha \quad \Rightarrow [\tilde{a}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U] = [\tilde{b}_\alpha^L, \tilde{b}_\alpha^U] + [\tilde{c}_\alpha^L, \tilde{c}_\alpha^U]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}_\alpha^L = \tilde{b}_\alpha^L + \tilde{c}_\alpha^L \\ \tilde{a}_\alpha^U = \tilde{b}_\alpha^U + \tilde{c}_\alpha^U \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{c}_\alpha^L = \tilde{a}_\alpha^L - \tilde{b}_\alpha^L \\ \tilde{c}_\alpha^U = \tilde{a}_\alpha^U - \tilde{b}_\alpha^U \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha^L - \tilde{b}_\alpha^L,\ \tilde{a}_\alpha^U - \tilde{b}_\alpha^U].$$

حال فرض کنید $\exists \tilde{\mathbf{d}} \in \mathbf{F(R)}$ بطوریکه $\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{a}}\,\Theta_H \tilde{\mathbf{b}}$ نشان می دهیم که $\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{d}}$.

از قسمت قبل داریم $\tilde{\mathbf{d}}_\alpha = [\tilde{\mathbf{d}}_\alpha^L, \tilde{\mathbf{d}}_\alpha^U] = [\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^L - \tilde{\mathbf{b}}_\alpha^L, \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^U - \tilde{\mathbf{b}}_\alpha^U]$. لذا از آنجاکه $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha = \tilde{\mathbf{d}}_\alpha$ ، از قضیه ۱-۲-۱۵ نتیجه می شود که $\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{d}}$. ∎

تعریف ۱-۲-۱۹: فرض کنید که $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد و $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U]$. آنگاه $\tilde{a}$ را یک عدد فازی متعارف[1] گویند، هرگاه توابع $\Gamma_1(\alpha) = \tilde{a}_\alpha^L$ و $\Gamma_2(\alpha) = \tilde{a}_\alpha^U$ بر بازه بسته $[0,1]$ پیوسته باشند. همچنین مجموعه تمام اعداد فازی متعارف را با $\mathbf{F_C(R)}$ نشان می‌دهند.

مثال ۱-۲-۲۰: عدد فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} & 3 \le x \le 5 \\ \dfrac{7-x}{2} & 5 < x \le 7 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\tilde{a}_\alpha = \{x : \tilde{a}(x) \ge \alpha\} = \{x : \frac{x-3}{2} \ge \alpha \ , \ \frac{7-x}{2} \ge \alpha\}$$
$$= \{x : x \ge 2\alpha+3 \ , \ x \le 7-2\alpha\} = [2\alpha+3, 7-2\alpha]$$

در نتیجه $\Gamma_1(\alpha) = 2\alpha+3$ و $\Gamma_2(\alpha) = 7-2\alpha$. از آنجا که $\Gamma_1(\alpha)$ و $\Gamma_2(\alpha)$ توابعی پیوسته هستند، پس $\tilde{a}$ عدد فازی متعارف است. اکنون عدد فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 1 \le x < 2 \\ \dfrac{x+2}{2x} & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

بنابراین

$$\tilde{b}_\alpha = \{x : \frac{1}{x} \ge \alpha \ , \ \frac{x+2}{2x} \ge \alpha\} = [\frac{1}{\alpha-0/5}, \frac{1}{\alpha}]$$

$$\lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} \Gamma_1(\alpha) = \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha - 0/5}$$

بنابراین حد فوق موجود نیست و لذا $\tilde{b}$ عدد فازی متعارف نیست.

گزاره ۱-۲-۲۱: فرض کنید که $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد، که روی بازه $[\tilde{a}_0^L, \tilde{a}_1^L]$ دارای تابع عضویت صعودی و روی بازه $[\tilde{a}_1^U, \tilde{a}_0^U]$ دارای تابع عضویت نزولی می‌باشد. اگر $x \notin \tilde{a}_0$ آنگاه $\tilde{a}(x) = 0$. همچنین برای هر $x \in \tilde{a}_0$ می‌توان نوشت:

۱. اگر $\tilde{a}_0^L \le x \le \tilde{a}_1^L$ آنگاه $x = \tilde{a}_{\alpha^*}^L$ برای بعضی $\alpha^* \in (0,1]$.

۲. اگر $\tilde{a}_1^U \le x \le \tilde{a}_0^U$ آنگاه $x = \tilde{a}_{\alpha^*}^U$ برای بعضی $\alpha^* \in (0,1]$.

---

[1] – Canonical fuzzy number

بطوری‌که $\alpha^* = \tilde{a}(x)$.

اثبات: به [17] مراجعه شود.

گزاره ۱-۲-۲۲: فرض کنیدکه $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد که روی بازه بسته $[\tilde{a}_0^L, \tilde{a}_1^L]$ دارای تابع عضویت صعودی اکید و روی بازه بسته $[\tilde{a}_1^U, \tilde{a}_0^U]$ دارای تابع عضویت نزولی اکید می باشد. در این صورت عبارات زیر برقرار می‌باشند:

الف) $\tilde{a}_\alpha^L$ و $\tilde{a}_\alpha^U$ به عنوان توابعی از متغیر α روی بازه $[0,1]$ به‌ترتیب صعودی و نزولی هستند.

ب) $\tilde{a}_\alpha^L$ و $\tilde{a}_\alpha^U$ توابعی پیوسته نسبت به متغیر α روی بازه $[0,1]$ هستند.

اثبات:

الف) فرض کنید که $\alpha < \beta$ و $\alpha,\beta \in [0,1]$، آنگاه

$$\tilde{a}_\beta = \{x : \tilde{a}(x) \geq \beta\} \subseteq \{x : \tilde{a}(x) \geq \alpha\} = \tilde{a}_\alpha$$
$$\Rightarrow [\tilde{a}_\beta^L, \tilde{a}_\beta^U] \subseteq [\tilde{a}_\alpha^L, \tilde{a}_\alpha^U]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}_\alpha^L \leq \tilde{a}_\beta^L \\ \tilde{a}_\beta^U \leq \tilde{a}_\alpha^U \end{cases}$$

ب) نشان می‌دهیم که $\tilde{a}_\alpha^L$ پیوسته است، پیوستگی $\tilde{a}_\alpha^U$ بطور مشابه اثبات می‌شود. فرض کنید که $\alpha_0 \in (0,1)$. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول: $\alpha_0 < \alpha$

اگر $\tilde{a}_{\alpha_0}^L = \tilde{a}_1^L$ آنگاه با توجه به صعودی بودن $\tilde{a}_\alpha^L$ واضح است که $\tilde{a}_\alpha^L = \tilde{a}_1^L$ برای هر $\alpha \in [\alpha_0,1]$.
درنتیجه، برای هر $\alpha > \alpha_0$، $\left|\tilde{a}_\alpha^L - \tilde{a}_{\alpha_0}^L\right| = 0$. بنابراین،کافی است فقط حالت $\tilde{a}_{\alpha_0}^L < \tilde{a}_1^L$ را در نظربگیرید. فرض کنید $0 < \varepsilon$ مفروض باشد:

۱. فرض کنید $\tilde{a}_{\alpha_0}^L + \varepsilon \leq \tilde{a}_1^L$. واضح است که $\tilde{a}_{\alpha_0}^L < \tilde{a}_{\alpha_0}^L + \varepsilon$، بنابراین وجود دارد یک $x \in \mathbf{R}$، بطوری‌که $\tilde{a}_{\alpha_0}^L < x < \tilde{a}_0^L + \varepsilon \leq \tilde{a}_{\alpha_1}^L$.

۲. فرض کنید $\tilde{a}_{\alpha_0}^L + \varepsilon > \tilde{a}_1^L$. واضح است که $\tilde{a}_{\alpha_0}^L < \tilde{a}_{\alpha_1}^L$، بنابراین وجود دارد یک $x \in \mathbf{R}$، بطوری‌که $\tilde{a}_{\alpha_0}^L < x < \tilde{a}_1^L < \tilde{a}_{\alpha_0}^L + \varepsilon$.

درنتیجه با توجه به گزاره ۱-۲-۲۱ وجود دارد $\alpha_1^* \in (0,1)$ بطوری‌که $x = \tilde{a}_{\alpha_1^*}^L$.

بنابراین $\tilde{a}_{\alpha_0}^L < \tilde{a}_{\alpha_1^*}^L < \tilde{a}_{\alpha_0}^L + \varepsilon$ و چون $\tilde{a}_\alpha^L$ نسبت به α صعودی است، در نتیجه $\alpha_0 < \alpha_1^*$.

حال قراردهید $\delta_1 = \alpha_1^* - \alpha_0$، بنابراین برای $0 < \alpha - \alpha_0 < \delta_1$ ، داریم که $\alpha < \alpha_1^*$ و با توجه به صعودی بودن $\tilde{a}_\alpha^L$ نتیجه می‌شود که $\tilde{a}_\alpha^L \leq \tilde{a}_{\alpha_1^*}^L < \tilde{a}_{\alpha_0}^L + \varepsilon$. در نتیجه برای $0 < \alpha - \alpha_0 < \delta_1$ داریم $\left|\tilde{a}_\alpha^L - \tilde{a}_{\alpha_0}^L\right| < \varepsilon$.

حالت دوم: $\alpha_{\circ} > \alpha$

اگر $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} = \tilde{a}^L_{\circ}$ آنگاه با توجه به صعودی بودن $\tilde{a}^L_{\alpha}$ واضح است که $\tilde{a}^L_{\alpha} = \tilde{a}^L_{\circ}$ برای هر $\alpha \in [0, \alpha_{\circ}]$.
در نتیجه، برای هر $\alpha < \alpha_{\circ}$، $\left|\tilde{a}^L_{\alpha} - \tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}}\right| = 0$. بنابراین،کافی است فقط حالت $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} > \tilde{a}^L_{\circ}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon > 0$ باشد:

دو حالت زیر را در نظربگیرید:

۱. فرض کنید که $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} - \varepsilon \geq \tilde{a}^L_{\circ}$، لذا وجود دارد یک $x \in \mathbf{R}$ بطوری‌که $\tilde{a}^L_{\circ} \leq \tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} - \varepsilon < x < \tilde{a}^L_{\circ}$.

۲. فرض کنید که $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} - \varepsilon < \tilde{a}^L_{\circ}$، لذا وجود دارد یک $x \in \mathbf{R}$ بطوری‌که $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} - \varepsilon < \tilde{a}^L_{\circ} < x < \tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}}$.

مطابق حالت اول، وجود دارد $\alpha^*_2 \in (0,1)$ بطوری‌که $x = \tilde{a}^L_{\alpha^*_2}$. بنابراین $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} - \varepsilon < \tilde{a}^L_{\alpha^*_2} < \tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}}$ و چون $\tilde{a}^L_{\alpha}$ نسبت به α صعودی است، پس درنتیجه $\alpha_{\circ} > \alpha^*_2$.

حال قرار دهید $\delta_2 = \alpha_{\circ} - \alpha^*_2$، بنابراین برای $0 < \alpha_{\circ} - \alpha < \delta_2$، داریم که $\alpha > \alpha^*_2$ و با توجه به صعودی بودن $\tilde{a}^L_{\alpha}$ نتیجه می‌شود که $\tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}} - \varepsilon < \tilde{a}^L_{\alpha^*_2} \leq \tilde{a}^L_{\alpha}$. در نتیجه برای $0 < \alpha_{\circ} - \alpha < \delta_2$ داریم $\left|\tilde{a}^L_{\alpha} - \tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}}\right| < \varepsilon$.

حال با قراردادن $\delta = \mathrm{Min}\{\delta_1, \delta_2\}$ خواهیم داشت:

$$\left|\alpha - \alpha_{\circ}\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\tilde{a}^L_{\alpha} - \tilde{a}^L_{\alpha_{\circ}}\right| < \varepsilon$$

در نتیجه تابع $\tilde{a}^L_{\alpha}$ روی بازه $(0,1)$ پیوسته می‌باشد.

حال اگر $\alpha_{\circ} = 0$، کافی است حالت $\alpha > \alpha_{\circ} = 0$ را در نظربگیرید و اگر $\alpha_{\circ} = 1$، کافی است حالت $\alpha < \alpha_{\circ} = 1$ را در نظربگیرید. بنابراین تابع $\tilde{a}^L_{\alpha}$ روی بازه $[0,1]$ پیوسته است. ■

نتیجه ۱-۲-۲۳: هر عدد فازی مثلثی یک عدد فازی متعارفی است.

گزاره ۱-۲-۲۴: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ دو عدد فازی باشند، بطوری‌که درشرایط زیر صدق کنند:

۱. $\tilde{a}^L_{\alpha} - \tilde{b}^L_{\alpha} \leq \tilde{a}^U_{\alpha} - \tilde{b}^U_{\alpha} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$؛

۲. $\tilde{a}^L_{\alpha} - \tilde{b}^L_{\alpha} \leq \tilde{a}^L_{\beta} - \tilde{b}^L_{\beta} \quad , \quad \forall \alpha < \beta \ , \ \alpha, \beta \in [0,1]$؛

۳. $\tilde{a}^U_{\beta} - \tilde{b}^U_{\beta} \leq \tilde{a}^U_{\alpha} - \tilde{b}^U_{\alpha} \quad , \quad \forall \alpha < \beta \ , \ \alpha, \beta \in [0,1]$.

آنگاه تفاضل هاکوهارای $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ موجود است. یعنی وجود دارد $\tilde{c} \in \mathbf{F(R)}$ بطوری‌که $\tilde{a}\,\Theta_H\,\tilde{b} = \tilde{c}$ و همچنین $\tilde{c}$ عدد فازی متعارفی است.

اثبات: فرض کنید که $\mathbf{A}_{\alpha} = [\tilde{a}^L_{\alpha} - \tilde{b}^L_{\alpha}, \tilde{a}^U_{\alpha} - \tilde{b}^U_{\alpha}]$. اگر $\alpha < \beta$ آنگاه شرایط (۲) و (۳) گزاره بیان می‌کنند که $\mathbf{A}_{\beta} \subseteq \mathbf{A}_{\alpha}$. از طرف دیگر، اگر α_nها دنباله‌ای صعودی و همگرا به α باشند آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_{\alpha_n} = \mathbf{A}_{\alpha}$.

حال با توجه به قضایای ۱-۲-۱۲ و ۱-۲-۱۳، مجموعه فازی $\tilde{\mathbf{c}}$ را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\tilde{\mathbf{c}}:\mathbf{R}\to[۰,۱],\quad \tilde{\mathbf{c}}(x)=\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[۰,۱]}\alpha\chi_{\mathbf{A}_\alpha}(x)$$

و $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha=\{x:\tilde{\mathbf{c}}(x)\geq\alpha\}=\tilde{\mathbf{A}}_\alpha$، بنابراین $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha=[\tilde{a}^L_\alpha-\tilde{b}^L_\alpha,\tilde{a}^U_\alpha-\tilde{b}^U_\alpha]$. چون $\tilde{a}^L_\alpha-\tilde{b}^L_\alpha$ و $\tilde{a}^U_\alpha-\tilde{b}^U_\alpha$ توابعی پیوسته می‌باشند، در نتیجه $\tilde{\mathbf{c}}$ نیز یک عدد فازی متعارفی است. ∎

تعریف ۱-۲-۲۵: $\tilde{a}$ را یک عدد محض با مقدار M گویند، هرگاه تابع عضویت آن بصورت زیر باشد:

$$\tilde{a}(x)=\begin{cases}۱ & x=M\\ ۰ & \text{else}\end{cases}$$

برای نمایش عدد محض M از نمایش $\tilde{1}_{\{M\}}$ یا $\chi_{\{M\}}$ استفاده می‌شود.

۱-۳ متر هاسدورف

تعریف ۱-۳-۱: تابع $d:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را یک متر روی $\mathbf{R}$ گویند، هرگاه:

۱. $d(x,y)\geq ۰,\quad \forall x,y\in\mathbf{R}$؛

۲. $d(x,x)=۰,\quad \forall x\in\mathbf{R}$؛

۳. $d(x,y)=d(y,x),\quad \forall x,y\in\mathbf{R}$؛

۴. $d(x,y)\leq d(x,y)+d(y,z),\quad \forall x,y,z\in\mathbf{R}$.

تعریف ۱-۳-۲: تابع $\|.\|:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ را یک نرم روی $\mathbf{R^n}$ گویند، هرگاه:

۱. $\|x\|\geq ۰,\quad \forall x\in\mathbf{R^n}$؛

۲. $\|x\|=۰$ اگر $x=۰$؛

۳. $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,\quad \forall x\in\mathbf{R^n},\forall\alpha\in R$؛

۴. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|,\quad \forall x,y\in\mathbf{R^n}$.

تعریف ۱-۳-۳: فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}\subset\mathbf{R^n}$. متر هاسدورف بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_H(\mathbf{A},\mathbf{B})=\operatorname{Max}\left\{\operatorname*{Sup}_{a\in\mathbf{A}}\inf_{b\in\mathbf{B}}\|a-b\|,\operatorname*{Sup}_{b\in\mathbf{B}}\inf_{a\in\mathbf{A}}\|a-b\|\right\}.$$

تعریف ۱-۳-٤: فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}\in\mathbf{F(R)}$. متر $d_\mathbf{F}$ روی $\mathbf{F(R)}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_F(\tilde{a},\tilde{b})=\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[0,1]}d_H(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha)$$

گزاره ۱-۳-۵: اگر $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ دو عدد فازی باشند، آنگاه:

$$d_H(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha)=\text{Max}\left\{\left|\tilde{a}_\alpha^L-\tilde{b}_\alpha^L\right|,\left|\tilde{a}_\alpha^U-\tilde{b}_\alpha^U\right|\right\}\quad \forall\alpha\in[۰,۱]$$

اثبات: $\tilde{a}_\alpha=[\tilde{a}_\alpha^L,\tilde{a}_\alpha^U]$ و $\tilde{b}_\alpha=[\tilde{b}_\alpha^L,\tilde{b}_\alpha^U]$، بدون کاستن از کلیت فرض کنید $\tilde{a}_\alpha^L\le\tilde{b}_\alpha^L$ آنگاه، یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱. $\tilde{a}_\alpha^U\le\tilde{b}_\alpha^L\quad,\quad\tilde{a}_\alpha^L\le\tilde{b}_\alpha^L$ ؛

۲. $\tilde{b}_\alpha^U\le\tilde{a}_\alpha^U\quad,\quad\tilde{a}_\alpha^L\le\tilde{b}_\alpha^L$ ؛

۳. $\tilde{b}_\alpha^L\le\tilde{a}_\alpha^U\quad,\quad\tilde{a}_\alpha^L\le\tilde{b}_\alpha^L$.

گزاره برای حالت اول اثبات می‌شود. دو حالت دیگر بطور مشابه اثبات می‌شوند.

$$d_H(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha)=\text{Max}\left\{\operatorname*{Sup}_{x\in\tilde{a}_\alpha}\ \operatorname*{inf}_{y\in\tilde{b}_\alpha}|x-y|\ ,\ \operatorname*{Sup}_{y\in\tilde{b}_\alpha}\ \operatorname*{inf}_{x\in\tilde{a}_\alpha}|x-y|\right\}$$

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\tilde{a}_\alpha}\ \operatorname*{inf}_{y\in\tilde{b}_\alpha}|x-y|=\operatorname*{Sup}_{\tilde{a}_\alpha^L\le x\le\tilde{a}_\alpha^U}\ \operatorname*{inf}_{\tilde{b}_\alpha^L\le y\le\tilde{b}_\alpha^U}|x-y|=\operatorname*{Sup}_{\tilde{a}_\alpha^L\le x\le\tilde{a}_\alpha^U}\left|x-\tilde{b}_\alpha^L\right|=\left|\tilde{a}_\alpha^L-\tilde{b}_\alpha^L\right|$$

بطور مشابه بدست می‌آید:

$$\operatorname*{Sup}_{y\in\tilde{b}_\alpha}\ \operatorname*{inf}_{x\in\tilde{a}_\alpha}|x-y|=\left|\tilde{a}_\alpha^U-\tilde{b}_\alpha^U\right|$$

بنابراین:

$$d_H(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha)=\text{Max}\left\{\left|\tilde{a}_\alpha^L-\tilde{b}_\alpha^L\right|,\left|\tilde{a}_\alpha^U-\tilde{b}_\alpha^U\right|\right\}.\ \blacksquare$$

گزاره ۱-۳-٦: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ دو عدد فازی متعارف باشند. اگر $d_F(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha)<\varepsilon$ آنگاه

$$\left|\tilde{a}_\alpha^L-\tilde{b}_\alpha^L\right|<\varepsilon\quad\text{و}\quad\left|\tilde{a}_\alpha^U-\tilde{b}_\alpha^U\right|<\varepsilon\qquad\forall\alpha\in[۰,۱]$$

اثبات: طبق گزاره ۱-۳-۵ واضح است■

گزاره ۱-۳-۷: اگر $\tilde{c}$ تفاضل هاکوهارای $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ باشد، آنگاه:

$$\mathbf{d_F(\tilde{a},\tilde{b})}=\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[۰,۱]}\ \text{Max}\left\{\left|\tilde{c}_\alpha^{\mathbf{L}}\right|,\left|\tilde{c}_\alpha^{\mathbf{U}}\right|\right\}$$

اثبات: طبق گزاره ۱-۳-۵ و گزاره ۱-۲-۱۸ واضح است■

مثال ۱-۳-۸: فرض کنید که $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$ اعداد فازی مثلثی زیر باشند:

$$\tilde{a}=(-۴,۲,۴)\quad\text{و}\quad\tilde{b}=(-۳,۱,۲)$$

$$\tilde{a}\ \Theta_H\ \tilde{b}=\tilde{c}\quad\Rightarrow\tilde{c}=(-۱,۱,۲)$$

$$\tilde{c}_\alpha=[۲\alpha-۱,۲-\alpha]$$

$$d_F(\tilde{a},\tilde{b})=\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[۰,۱]}\ \text{Max}\left\{|۲\alpha-۱|,|۲-\alpha|\right\}=۲.\ \blacksquare$$