مباحثی در ابر (شبه) BCK - جبرها

توسط

آفاق رضازاده

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

دکتری ریاضیات محض

زیر نظر

دکتر رجبعلی برزویی
دکتر رضا عامری

۲۷ آبان ۱۳۹۱

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه پیام نور تهران

تهران

قدردانی

...

مباحثی در ابر (شبه) BCK - جبرها

چکیده

در این رساله ابتدا به معرفی BCK - جبرها و شبه BCK - جبرها پرداخته و بعضی از خواص آنها که در سایر فصول مورد نیاز هستند، خواهیم پرداخت. در ادامه ابر BCK - جبرها که توسیعی از BCK - جبرها می باشند را مورد بررسی قرار می دهیم و انواع ایده آلها را در این ساختار جبری معرفی و ارتباط بین آنها را بدست خواهیم آورد. در فصل چهارم مفاهیم ابر BCK - ایده آلهای ماکسیمال، اول و تحویل ناپذیر را تعریف و مثالهایی از این ایده آلها ارائه و روابط بین آنها و سایر ایده آلها را ارائه خواهیم کرد. به ویژه نشان خواهیم داد که ایده آلهای اول و ایده آلهای تحویل ناپذیر در ابر BCK - جبرها با هم معادلند. در پایان مفهوم ابر شبه BCK - جبرها را که تعمیمی از ابر BCK - جبرها و شبه BCK - جبرهاست، در فصل پنجم بیان و نشان خواهیم داد حداقل یک ابر شبه BCK - جبر از هر مرتبه ای وجود دارد. در ادامه انواع ابر شبه BCK - ایده آل ها را در این ساختار معرفی و روابط بین تمام این ایده آلها را بررسی و بلاخص عناصر ایده آل نوع ۴ تولید شده توسط یک مجموعه ناتهی را شناسایی خواهیم کرد. در پایان در فصل ششم، به معرفی تمام ابر شبه BCK - جبرهای از مرتبه ۳ می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: (شبه) BCK - جبرها ، ابر BCK - جبرها، ابر شبه BCK - جبرها، ابر ایده آل ها، ابر شبه BCK - ایده آل ها.

فهرست مطالب

مقدمه

ایزاکی [۱] و ایمای [۲] [۱۶] در سال ۱۹۶۶ مفهوم BCK-جبرها را که دربرگیرنده تعمیمی از خواص تفاضل مجموعه ای است، ارائه نمودند. سپس جورجیس [۳] و ایورگولیس [۴] [۱۲] در سال ۲۰۰۱ به منظور توسیع BCK-جبرها در یک فرم ناجابجایی، مفهوم شبه BCK-جبرها را معرفی و خواص آنها را مورد مطالعه قرار دادند. چون BCK-جبرهای جابجایی و کراندار معادل با MV-جبرها هستند، شبه BCK-جبرها بعنوان تعمیمی از BCK-جبرها به منظور ساختاری معادل با شبه MV-جبرها ارائه شدند. از طرفی نظریه ابرساختارها توسط مارتی [۵] [۳۲] در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی معرفی شد. بعدها محققان زیادی روی ابرساختارهای جبری کار کردند و این مفاهیم را گسترش دادند. کرسینی [۶] و لئورینو [۷] در [۱۰] به معرفی کاربردهای متعددی از ابرساختارهای جبری در پانزده سال اخیر پرداخته اند، که از این مفاهیم می توان به: ابرگرافها، روابط دوتایی، مشبکه ها، مجموعه های فازی و مجموعه های سخت، اتوماتها، کدگذاری ها، هوش مصنوعی و ... اشاره کرد.

ابرساختارها کاربردهای زیادی در شاخه های مختلف علوم کاربردی و محض دارند. برزویی و همکاران در مقالات [۲۸] و [۶] در سال ۲۰۰۰ مفهوم ابرساختارها را به BCK-جبرها افزوده و مفاهیم ابر BCK-جبرها و ابر K-جبرها را معرفی نمودند که تعمیمی از BCK-جبرهاست. قربانی و همکاران در مقاله [۱۱] مفهوم ابر MV-جبرها را معرفی و تحت شرایطی نشان دادند ابر MV-جبرها و ابر K-جبرها معادلند. حال در این پایان نامه مفهوم ابرساختارها را به شبه BCK-جبرها افزوده و ابر شبه BCK-جبرها را معرفی و به

[۱] K. Iseki

[۲] Y. Imai

[۳] G. Georgescu

[۴] A. Iorgulescu

[۵] F. Marty

[۶] P. Corsini

[۷] V. Leoreanu

بررسی این نوع ابرجبرها، همان گونه که در چکیده بیان شد می پردازیم.

فصل ۱

BCK - جبرها

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی BCK - جبرها

در این فصل به معرفی BCK - جبرها پرداخته و با مفاهیم مقدماتی BCK - جبرها که برای فصل های بعدی نیاز می باشد، آشنا می شویم. لازم به ذکر است که مطالب این فصل از مرجع [۳۳] انتخاب شده است.

تعریف ۱.۱.۱. یک BCK-جبر عبارت است از یک مجموعهٔ غیرخالی X همراه با عمل دوتایی "$*$" و یک عضو ثابت صفر که برای هر $x, y, z \in X$، در اصول زیر صدق می کند:

$(BCK - ۱)$: $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = ۰$،

$(BCK - ۲)$: $(x * (x * y)) * y = ۰$،

$(BCK - ۳)$: $x * x = ۰$،

$(BCK - ۴)$: اگر $x * y = ۰$ و $y * x = ۰$، آنگاه $x = y$،

$(BCK - ۵)$: $۰ * x = ۰$.

تبصره. در BCK-جبر X، اگر رابطهٔ دو تایی $\leq$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$x \leq y \text{ اگر و فقط اگر } x * y = 0$$

آنگاه "$\leq$" یک رابطهٔ مرتب جزئی روی X است که BCK-ترتیب نامیده می شود.

در این صورت X یک BCK-جبر است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند. برای هر $x, y, z \in X$، داشته باشیم:

(۱) $(x * y) * (x * z) \leq z * y$،

(۲) $x * (x * y) \leq y$،

(۳) $x \leq x$،

(۴) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$،

(۵) $0 \leq x$.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. برای هر $x, y \in X$، عمل دو تایی "$*$" را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x * y = \begin{cases} 0, & x \leq y \text{ اگر }, \\ 1, & y < x \text{ و } y \neq 0 \text{ اگر }, \\ x, & y < x \text{ و } y = 0 \text{ اگر }. \end{cases}$$

در این صورت $(X; *, 0)$ یك BCK-جبر است.

قضیه ۳.۱.۱. اگر $(X; *, 0)$ یک BCK-جبر باشد، آنگاه به ازای هر $x, y, z \in X$، خواص ذیل برقرار است:

(a) اگر $x \leq y$، آنگاه $z * y \leq z * x$،

(b) $(x * y) * z = (x * z) * y$،

(c) اگر $x * y \leq z$، آنگاه $x * z \leq y$،

(d) $(x * z) * (y * z) \leq x * y$،

(e) اگر $x \leq y$، آنگاه $x * z \leq y * z$،

(f) $x * y \leq x$،

(g) $x * 0 = x$.

نکته. اگر X یک BCK-جبر باشد، آنگاه برای هر $x, y \in X$، $x \wedge y = y * (y * x)$ یک کران پایین x و y می باشد و بعلاوه

$$x \wedge x = x,$$

$$x \wedge 0 = 0 = 0 \wedge x,$$

$$x \wedge y \neq y \wedge x,$$

$$x * (y \wedge x) = x * y.$$

تعریف ۴.۱.۱. زیرمجموعهٔ غیرخالی X_0 از BCK-جبر $(X; *, 0)$ را یک زیرجبر X گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X_0$، $x * y \in X_0$.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم X_0 یک زیرجبر از BCK-جبر $(X; *, 0)$ باشد. در این صورت

(a) $0 \in X_0$،

(b) $(X_0; *, 0)$ یک BCK-جبر است،

(c) X یک زیرجبر از X است،

(d) $\{0\}$ یک زیرجبر از X است.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه مرتب جزئی $(L, \leq)$ را یک نیم مشبکه پایینی گوییم هرگاه هر جفت از اعضا در L بزرگترین کران پایین داشته باشند یعنی به ازای هر $a, b \in L$، $a \wedge b$ در L موجود باشد. همچنین مجموعهٔ مرتب جزئی $(L, \leq)$ را یک نیم مشبکه بالایی گوییم هرگاه هر جفت از اعضا در L دارای کوچکترین کران بالا باشند یعنی به ازای هر $a, b \in L$، $a \vee b$ در L موجود باشد.

اگر $(L, \leq)$ هم نیم مشبکه پایینی و هم نیم مشبکه بالایی باشد، آنگاه آن را یک مشبکه گوییم.

تعریف ۷.۱.۱. مشبکهٔ L را توزیع پذیر نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$،

(D۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$،

(D۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

تعریف ۸.۱.۱. مشبکهٔ $(L, \leq)$ را کراندار گوییم هرگاه عضوهای ۰ و ۱ در L وجود داشته باشند به طوری که برای هر x در L، $0 \leq x \leq 1$. در این صورت $x \wedge 0 = 0$ و $x \vee 1 = 1$. دو عضو a و b از یک مشبکهٔ کراندار، متمم هم هستند هرگاه $a \vee b = 1$ و $a \wedge b = 0$.

تعریف ۹.۱.۱. BCK-جبر $(X; *, 0)$ را یک BCK-جبر جابجایی نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$،

$$x * (x * y) = y * (y * x).$$

نکته. در BCK-جبرهای جابجایی براحتی ثابت می شود که $x * (x * y)$ بزرگترین کران پایین x و y است.

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنیم $X = \{0, 1, 2, 3\}$. عمل "$*$" را با جدول زیر در نظر می گیریم:

$*$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۲	۲	۱	۰	۰
۳	۳	۲	۱	۰

در این صورت $(X;*,0)$ یک BCK-جبر جابجایی است.

قضیه ۱.۱.۱۱. BCK-جبر $(X;*,0)$ جابجایی است اگر و تنها اگر آن یک نیم مشبکه پایینی نسبت به BCK-ترتیب $\leq$ باشد.

قضیه ۱.۱.۱۲. در یک BCK-جبر X به ازای هر $x,y,z \in X$، عبارات زیر معادلند:

(C۱) اگر $x \leq z$ و $z * x \leq z * y$، آنگاه $x \leq y$،

(C) اگر $x,y \leq z$ و $z * x \leq z * y$، آنگاه $x \leq y$،

(i) اگر $x \leq y$، آنگاه $x = y * (y * x)$،

(ii) X جابجایی است،

(iii) اگر $x * y = 0$، آنگاه $x * (y * (y * x)) = 0$.

تعریف ۱.۱.۱۳. عضو ۱ از BCK-جبر X را یک عنصر یکه گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $x \leq 1$. BCK-جبر X با عنصر یکه را یک BCK-جبر کراندار نامیم. در BCK-جبر کراندار $1 * x$ را با Nx نشان می دهیم.

مثال ۱.۱.۱۴. فرض کنیم $(X;*,0)$ یک BCK-جبر و $1 \notin X$. عمل $*'$ روی

$\overline{X} = X \cup \{۱\}$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$x *' y = \begin{cases} x * y, & x, y \in X \text{ اگر } , \\ ۰, & x \in X \text{ و } y = ۱ \text{ اگر } , \\ ۱, & x = ۱ \text{ و } y \in X \text{ اگر } , \\ ۰, & x = y = ۱ \text{ اگر } . \end{cases}$$

در این صورت $(\overline{X}; *', ۰)$ یک BCK-جبر کراندار با عنصر یکه ۱ است.

قضیه ۱۵.۱.۱. در هر BCK-جبر جابجایی و کراندار X به ازای هر $x, y \in X$، $N(Nx \wedge Ny)$ کوچکترین کران بالای x و y است. یعنی $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$.

قضیه ۱۶.۱.۱. در هر BCK-جبر جابجایی و کراندار X به ازای هر $x, y, z \in X$، شرایط زیر برقرارند:

(a) $NNx = x$،

(b) $Nx \vee Ny = N(x \wedge y)$ و $Nx \wedge Ny = N(x \vee y)$،

(c) $Nx * Ny = y * x$،

(d) $x * (y \wedge z) = (x * y) \vee (x * z)$،

(e) $(x \vee y) * z = (x * z) \vee (y * z)$،

(f) $(x \vee y) * y = x * y$،

(g) $(x * y) \wedge (y * x) = ۰$،

(h) $x * (y \vee z) = (x * y) \wedge (x * z)$.

قضیه ۱۷.۱.۱. هر BCK-جبر جابجایی و کراندار $(X; *, ۰)$ نسبت به BCK-ترتیب $\leq$ یک مشبکه است.

قضیه ۱.۱.۱۸. هر BCK-جبر جابجایی و کراندار $(X;*,0)$ یک مشبکه توزیع پذیر است.

تعریف ۱.۱.۱۹. BCK-جبر $(X;*,0)$ را یک BCK-جبر استلزامی مثبت نامیم هرگاه برای هر $x,y,z\in X$،

$$(x*z)*(y*z)=(x*y)*z.$$

مثال ۱.۱.۲۰. فرض کنیم $X=\{0,a,b,1\}$. عمل "$*$" را با جدول زیر در نظر می گیریم:

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
1	1	1	1	0

در این صورت $(X;*,0)$ یک BCK-جبر استلزامی مثبت است.

تعریف ۱.۱.۲۱. BCK-جبر $(X;*,0)$ را یک BCK-جبر استلزامی نامیم هرگاه برای هر $x,y\in X$،

$$x=x*(y*x).$$

مثال ۱.۱.۲۲. فرض کنیم X مجموعهٔ غیرخالی، $P(X)$ مجموعهٔ توانی و $\emptyset$ مجموعهٔ تهی است. برای هر $A,B\in P(X)$، عمل دو تایی "$*$" را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A*B=\begin{cases}\emptyset, & A\subseteq B \text{ اگر} \\ \\ A-B, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در این صورت $(P(X);*,\emptyset)$ یک BCK-جبر استلزامی است.

قضیه ۲۳.۱.۱. BCK-جبر X استلزامی است اگر و تنها اگر جابجایی و استلزامی مثبت باشد.

قضیه ۲۴.۱.۱. BCK-جبر استلزامی و کراندار X یک مشبکهٔ توزیع پذیر است و هر عضو x از X دارای متمم منحصر بفرد Nx می باشد. بنابراین هر BCK-جبر استلزامی و کراندار یک جبر بول است.

تعریف ۲۵.۱.۱. گوییم BCK-جبر X در شرط (S) صدق می کند هرگاه برای هر $a,b \in X$، عضو $a \circ b$ در X وجود داشته باشد به قسمی که:

(i) $(a \circ b) * a \leq b$،

(ii) اگر $x * a \leq b$، آنگاه $x \leq a \circ b$.

همچنین اگر $a \circ b$ موجود باشد، آنگاه $b \circ a$ هم موجود است و $a \circ b = b \circ a$.

قضیه ۲۶.۱.۱. هر BCK-جبر X که در شرط (S) صدق می کند، یک نیم گروه جابجایی مرتب با عضو صفر ۰ می باشد.

۲.۱ ایده آل در BCK-جبرها

مفهوم ایده آلها در BCK-جبرها توسط ایزاکی در سال ۱۹۷۵ معرفی شده است.

تعریف ۱.۲.۱. زیرمجموعهٔ غیرخالی I از BCK-جبر X را یک ایده آل گوییم هرگاه به ازای هر $x,y \in X$،

(i) $0 \in I$،

(ii) اگر $x * y \in I$ و $y \in I$، آنگاه $x \in I$.

ایده آل I را سره گوییم هرگاه $I \neq X$.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $X = \{۰, ۱, ۲\}$. عمل "$*$" را با جدول زیر در نظر می گیریم:

$*$	۰	۱	۲
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱
۲	۲	۲	۰

در این صورت $(X; *, ۰)$ یک BCK-جبر است و $\{۰\}$، X، $\{۰, ۱\}$ و $\{۰, ۲\}$ ایده آلهای X می باشند.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنیم I یک ایده آل از BCK-جبر X بوده و $x \in I$. اگر $y \leq x$، آنگاه $y \in I$.

تعریف ۴.۲.۱. زیرمجموعهٔ غیرخالی I از BCK-جبر X را یک ایده آل استلزامی مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$،

(i) $۰ \in I$،

(ii) اگر $(x * y) * z \in I$ و $y * z \in I$، آنگاه $x * z \in I$.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنیم $X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$. عمل "$*$" را با جدول زیر در نظر می گیریم:

$*$	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۱
۲	۲	۲	۰	۲	۰
۳	۳	۱	۳	۰	۳
۴	۴	۴	۴	۴	۰

در این صورت $(X;*,0)$ یک BCK-جبر است. بعلاوه $\{0,1,3\}$ و $\{0,1,2,3\}$ ایده آلهای استلزامی مثبت X و $\{0\}$، $\{0,2\}$ و $\{0,2,4\}$ ایده آلهای X که ایده آل استلزامی مثبت نمی باشند.

تعریف ۶.۲.۱. زیرمجموعهٔ غیرخالی I از BCK-جبر X را یک ایده آل استلزامی گوییم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in X$،

(i) $0 \in I$،

(ii) اگر $(x*(y*x))*z \in I$ و $z \in I$، آنگاه $x \in I$.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنیم $X=\{0,1,2,3,4\}$. عمل "$*$" را با جدول زیر در نظر می گیریم:

$*$	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۲	۲	۱	۰	۱	۰
۳	۳	۳	۳	۰	۰
۴	۴	۴	۴	۴	۰

در این صورت $(X;*,0)$ یک BCK-جبر بوده و $I=\{0,1,2,3\}$ یک ایده آل استلزامی X می باشد.

تعریف ۸.۲.۱. زیرمجموعهٔ غیرخالی I از BCK-جبر X را یک ایده آل جابجایی گوییم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in X$،

(i) $0 \in I$،

(ii) اگر $(x*y)*z \in I$ و $z \in I$، آنگاه $x*(y*(y*x)) \in I$.

مثال ۹.۲.۱. فرض کنیم $X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$. عمل "$*$" را با جدول زیر در نظر می گیریم:

$*$	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۱
۲	۲	۲	۰	۲	۰
۳	۳	۱	۳	۰	۳
۴	۴	۴	۴	۴	۰

در این صورت $(X; *, ۰)$ یک BCK-جبر بوده و $\{۰, ۲\}$ و$\{۰, ۲, ۴\}$ ایده آلهای جابجایی X هستند.

قضیه ۱۰.۲.۱. زیرمجموعهٔ غیرخالی I از BCK-جبر X یک ایده آل استلزامی است اگر و تنها اگر ایده آل جابجایی و ایده آل استلزامی مثبت باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. ایده آل سرهٔ I از BCK-جبر X را ایده آل ماکسیمال گوییم هرگاه I زیرمجموعهٔ سره از هیچ ایده آل سرهٔ X نباشد.

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنیم I یک ایده آل از BCK-جبر X باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

(a) I ماکسیمال و استلزامی است.

(b) I ماکسیمال و استلزامی مثبت است.

(c) برای هر $x, y \in X$، اگر $x, y \notin I$، آنگاه $x * y \in I$ و $y * x \in I$.

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر $\{I_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ خانواده ای از ایده آلهای BCK-جبر X باشند، آنگاه $I = \bigcap\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ نیز یک ایده آل از X است.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم A یک زیرمجموعه از BCK-جبر X باشد. در این صورت اشتراک تمامی ایده آلهایی از X که شامل A هستند را ایده آل تولید شده توسط A گوییم و با $(A]$ نشان می دهیم.

قضیه ۱۵.۲.۱. فرض کنیم A زیرمجموعهٔ غیرخالی از BCK-جبر X باشد. در این صورت

$$(A] = \{x \in X : \exists a_۱, a_۲, ..., a_n \in A; \ \ (...((x * a_۱) * a_۲) * ...) * a_n = \{۰\}\}.$$

تعریف ۱۶.۲.۱. BCK-جبر X را یک BCK-نیم مشبکهٔ پایینی گوییم هرگاه X نسبت به BCK-ترتیب $\leq$ یک نیم مشبکهٔ پایینی باشد. در این صورت

$$x \wedge y = glb\{x, y\}.$$

تعریف ۱۷.۲.۱. یک ایده آل سره I از BCK-نیم مشبکهٔ پایینی X را اول گوییم هرگاه به ازای هر $a, b \in X$، اگر $a \wedge b \in I$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۱۸.۲.۱. یک ایده آل سره I از BCK-جبر X را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه به ازای هر $A, B \in \mathbb{I}(X)$، اگر $I = A \cap B$، آنگاه $I = A$ یا $I = B$. به طوری که $\mathbb{I}(X)$ مجموعه ای از ایده آلهای X می باشد.

قضیه ۱۹.۲.۱. در BCK-نیم مشبکه پایینی X،

$$(x] \cap (y] = (x \wedge y].$$

قضیه ۲۰.۲.۱. در BCK-نیم مشبکه پایینی X، عبارات زیر معادلند:

(a) I یک ایده آل تحویل ناپذیر است،

(b) I یک ایده آل اول است،

(c) I یک ایده آل است و به ازای هر $A, B \in \mathbb{I}(X)$، اگر $A \cap B \subseteq I$، آنگاه $A \subseteq I$ یا $B \subseteq I$.

قضیه ۲۱.۲.۱. در BCK-جبر استلزامی X، مفاهیم ایده آلهای ماکسیمال، ایده آلهای اول و ایده آلهای تحویل ناپذیر معادلند.

قضیه ۲۲.۲.۱. فرض کنیم X یک BCK-جبر استلزامی کراندار و A و B ایده آلهایی از X باشند. در این صورت

(a) $A \vee B$ کوچکترین ایده آل شامل A و B است، یعنی $A \vee B = (A \cup B]$.

(b) $A \wedge B$ بزرگترین ایده آل مشمول در A و B است، از اینرو $A \wedge B = A \cap B$.

بنابراین $(\mathbb{I}(X), \vee, \wedge)$ یک مشبکه می باشد.

قضیه ۲۳.۲.۱. فرض کنیم X یک BCK-جبر استلزامی کراندار باشد. در این صورت برای هر a و b در X داریم:

(i) $(a] \vee (b] = (a \vee b]$،

(ii) $(a] \wedge (b] = (a \wedge b]$.

بنابراین $(\mathbb{PI}(X), \vee, \wedge)$ یک زیرمشبکه $(\mathbb{I}(X), \vee, \wedge)$ می باشد. به طوری که

$$\mathbb{PI}(X) = \{(a] \mid a \in X\}.$$