بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

توپولوژیکال انتروپی روی نگاشت های پیوسته خط حقیقی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مولایی

مؤلف:

محمدعلی کاویانی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : محمد علی کاویانی

استاد راهنما : دکتر محمد رضا مولایی

داور ۱ : دکتر اکبر نظری

داور ۲ : دکتر نصرالله گرامی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به پدر ومادر عزیزم

با تشکر از جناب آقای دکتر مولایی استاد عزیزم که راهنمایی پایان نامه اینجانب را به عهـده داشـتند و همچنین از آقای دکتر گرامی و دکتر نظری داوران محترم و از آقـای دکتـر رجبعلـی پـور کـه دعـوت اینجانب را پذیرفتند و در جلسه دفاع شرکت نمودند سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه آنتروپی توپولوژیک روی نگاشت‌های پیوسته- به طوری که دست کم خواص عمومی آنتروپی توپولوژیک روی نگاشت‌های پیوسته ی حقیقی حفظ شود- تعریف می‌شود.
همچنین سعی می‌شود این تعریف ویژگی‌های آنتروپی توپولوژیک معرفی شده برای مجموعه‌های فشرده را نیز دارا باشد.

مقدمه

در این پایان نامه نخست تعریفی از سیستم دینامیکی ارائه می دهیم سپس مدار وابسته به یک نقطه، مجموعه پایا واکیداً پایا، مجموعه سرگردان، نقاط سرگردان و غیر سرگردان را معرفی می کنیم. در فصل اول انتروپی توپولوژیکی روی فضاهای متریک فشرده را معرفی می کنیم. در فصل دوم همین تعریف را روی فضاهای متریک غیر فشرده بررسی می کنیم؛ و در پایان در فصل سوم، توپولوژیکال انتروپی روی نگاشت های پیوسته خط حقیقی بررسی می کنیم.

فهرست

فصل صفر

تعریف ۰ . ۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $f: X \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. زوج (X, f) را یک سیستم دینامیکی می نامیم. اگر $n \in \aleph$ آنگاه $f^1 := f, f^n := fof^{n-1}$ و f° را نگاشت همانی روی X در نظر می گیریم.

تعریف ۰ . ۲.برای $x \in X$ دنباله $\{f^n(x) : n \in \aleph\}$ را مدار x می نامیم و با $orb_f(x)$ نمایش می دهیم. اگر f همیومورفیسم باشد دنباله $\{f^n(x) : n \in Z\}$ را مدار کامل x گوییم و با $Full\, orb_f(x)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۰ . ۳.زیر مجموعه $K \subseteq X$ را پایا (بوسیله f) می نامیم هر گاه $f(K) \subseteq K$ و هر گاه $f(K) = K$ آن را اکیداً پایا گوییم.

تعریف ۰. ۴.فرض کنیم f یک نگاشت از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد. گوییم f بر X به طور یکنواخت پیوسته است هر گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، δ ی مثبتی باشد به طوری که به ازای هر p و هر q در X که $d_X(P,q) < \delta$ داشته باشیم $d_Y(f(P), f(q)) < \varepsilon$.

تعریف ۰. ۵.فرض $f: X \to X$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده X باشد. یک مجموعه باز $U \subseteq X$ سرگردان نامیده می شود هر گاه $U \cap f^i(U) = \phi$ برای هر $i \geq 1$.

نقطه $x \in X$ را یک نقطه سرگردان گوییم اگر متعلق به حداقل یک مجموعه سرگردان باشد. درغیر این صورت آن را نقطه غیر سرگردان گوییم. مجموعه همه نقاط غیر سرگردان

نگاشت f را با $\Omega(f)$ نمایش می دهیم. $\Omega(f)$ متمم اجتماعی از مجموعه های باز است بنابراین بسته می باشد. در لم بعدی نشان می دهیم $\Omega(f)$ یاپاست.

لم ۰. ۶. هر گاه $x \in \Omega(f)$ آنگاه $f(x) \in \Omega(f)$.

برهان. بوسیله برهان خلف فرض می کنیم $x \in \Omega(f)$ اما $f(x) \notin \Omega(f)$. دراین صورت مجموعه سرگردان U شامل $f(x)$ موجود است. مجموعه $f^{-1}(U)$ باز است و شامل x است. چون x یک نقطه غیر سرگردان است، $f^{-1}(U)$ نمی تواند یک مجموعه سر گردان باشد. درنتیجه برای بعضی از $i \geq 1$ داریم:

$$f^{-1}(U) \bigcap f^{i}(f^{-1}(U)) \neq \phi$$

اما

$$f^{i}(f^{-1}(U)) = f^{i-1}(U)$$

و بنابراین

$$U \bigcap f^{i}(U) \supset f(f^{-1}(U)) \bigcap f^{i}(f^{-1}(U)) \neq \phi$$

و این با این فرض که U مجموعه ای سرگردان است در تناقض است.

لم ۰. ۷. مجموعه نقاط غیر سرگردان f درمجموعه $Y = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^{i}(X)$ قرار می گیرد.

اثبات. نقطه $x \in X - Y$ رادر نظر می گیریم. فرض می کنیم m کوچکترین عددی باشد به طوری که $x \notin f^{m}(X)$. از آنجا که X فشرده است و f نگاشت پیوسته ای است که فشرده را به فشرده

می برد لذا $f^m(X)$ نیز فشرده است. بنابراین مجموعه های جدا از هم U و V موجود است به طوری که

$x \in U, f^m(X) \subset V$

با توجه به کوچکترین بودن m برای $i=1,\dots,m$ داریم $x \in f^{m-i}(X)$ پس

$f^i(x) \in f^m(X) \subset V.$

بنابراین $W = U \cap (\bigcap_{i=1}^{m} f^i(V))$ یک همسایگی باز x است.

و داریم $f^i(W) \subset V$ برای هر $i \geq 1$. (برای $i \leq m$ این نتیجه تعریف W است. برای $i>m$ داریم

$f^i(W) \subset f^i(X) = f^m\left(f^{i-m}(X)\right) \subset f^m(X) \subset V$ چون U از V جداست این نتیجه می دهد

که W یک مجموعه سرگردان است. این ثابت می کند که $x \notin \Omega(f)$.

تعریف ۰. ۸ فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی باشد. گردایه A از زیر مجموعه های X را که در شرایط زیر صدق کند را یک $\sigma-$ جبر گوییم.

۱- $X \in \mathrm{A}$.

۲- هر گاه $B \in \mathrm{A}$ آنگاه $X - B \in \mathrm{A}$.

۳- هر گاه $B_n \in \mathrm{A}$ برای $n \geq 1$ آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathrm{A}$.

تعریف ۰. ۹. یک مجموعه بورل برای فضای توپولوژیکی X عبارتست از کوچکترین $\sigma-$ جبر B در X که شامل مجموعه های باز X است.

تعریف ۰. ۱۰. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. مجموعه S از زیر مجموعه های X را که در شرایط زیر صدق کند یک نیم حلقه گوییم.

الف) $\phi \in S$

ب) اگر $A, B \in S$ آنگاه $A \bigcap B \in S$.

ج) برای هر دو عضو A و B از S اعضای $C_1,...C_n \in S$ یافت شوند به گونه ای که $C_i \bigcap C_j = \phi, A-B=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ هر گاه $i \neq j$.

تعریف ۰. ۱۱. فرض کنیم S یک نیم حلقه از زیر مجموعه های مجموعه X باشد. یک تابع $\mu : S \to [0,\infty]$ را که در شرایط زیر صدق کند را اندازه روی S گوییم.

۱) $\mu(\phi)=0$

۲) هر گاه $\{A_n\}$ دنباله ای از مجموعه های از هم جدای S باشد به طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ داشته باشیم $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

تعریف ۰. ۱۲. سه تایی (X,S,μ) که X یک مجموعه ناتهی است، S یک نیم حلقه از زیر مجموعه های X است و μ اندازه روی S می باشد را فضای اندازه گوییم.

تعریف ۰. ۱۳. هر گاه در سه تایی $(X,S,\ m)$ - که X مجموعه ای ناتهی است، S نیم حلقه و m یک اندازه روی $\int$ می باشد – داشته باشیم $m(X)=1$ گوییم m یک اندازه آماری روی S است.

تعریف ۰. ۱۴. فرض کنید $(X_1,\beta_2,m_1),(X_2,\beta_2,m_2)$ دو فضای آماری باشد نگاشت $T:X_1\to X_2$ اندازه پذیر است اگر $T^{-1}(\beta_2)\subset\beta_1$.

تعریف ۰. ۱۵.

الف) هر گاه M یک $\sigma-$ جبر در X آنگاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای M را مجموعه های اندازه پذیر در X گوییم.

ب) هر گاه X یک فضای اندازه پذیر و Y فضای توپولوژیکی و f نگاشتی از X به توی Y باشد آنگاه گوییم f اندازه پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه اندازه پذیر در X باشد.

نکته ۰. ۱۶. اگر X یک فضای اندازه پذیر و μ یک اندازه بر X باشد و $Y\subset X$ آنگاه همانند توپولوژی زیر فضایی تحدید $\sigma-$ جبر M به μ نیز یک $\sigma-$ جبر است وتحدید μ به Y نیز یک اندازه است.

تعریف ۰. ۱۷. فرض کنیم $f:X\to X$ یک نگاشت پیوسته با فضای متری X باشد. فرض کنیم $M(X,f)$ مجموعه همه اندازه های آماری μ تعریف شده روی بورل $\sigma-$ جبر β باشد به طوری که برای هر $A\in\beta$ و $\mu(A)=\mu(f^{-1}(A))$

همچنین فرض کنیم $\varepsilon(X,f)$ مجموعه همه اندازه های $\mu \in M(X,f)$ باشد که در شرط زیر صدق کند

$$f^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ یا } \mu(A) = 1$$

فصل نخست

توپولوژیکال انتروپی روی فضاهای فشرده

در این فصل ما مفهوم توپولوژیکال انتروپی را روی فضاهای فشرده به طریق زیر تعریف می کنیم. در فصل بعد حالتی که فضا فشرده نباشد این تعریف آمده است. ازنتایج و تعاریف این فصل استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱. ۱. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده باشد. اگر $\beta=\{B_j\}, \alpha=\{A_i\}$ پوشش های متناهی X باشند تعریف می کنیم $\alpha \vee \beta=\{A_i \cap B_j ; A_i \cap B_j \neq \phi\}$ در حالت کلی تر اگر $\{A_1^r,\dots,A_{N_r}^r\} = \alpha^r, K, r=1,2,\dots$ پوشش های متناهی X باشند آنگاه تعریف می کنیم.

$$\underset{r=1}{\overset{K}{V}} \alpha^r=\left\{A_{i_1}^1 \cap A_{i_2}^2 \cap \dots \cap A_{i_K}^K : i_j \in\{1,\dots,N_r\}, j=1,\dots,K\right\}$$

تعریف ۱ .۲. هر گاه X یک فضای فشرده و متریک باشد و نگاشت پیوسته $T: X \rightarrow X$ را در نظر می گیریم. در نظر می گیریم $\alpha=\{A_1,\dots,A_n\}$ یک پوشش باز برای X باشد. آنگاه برای نگاشت پیوسته $T: X \rightarrow X$ تعریف می کنیم.

$$T\alpha^{-1}=\{T^{-1}A_1,\dots,T^{-1}A_n\}$$

برای $K \geq 1$ تعریف می کنیم.

$$\underset{i=0}{\overset{K-1}{V}} T\alpha^{-1}=\alpha V T^{-1} \alpha V \dots V T^{-(k-1)\alpha}=\{A_{i_0} \cap T^{-1} A_{i_1} \cap T^{-(K-1)} A_{i_{k-1}} : 1 \leq i_0, i_1,\dots,i_{k-1} \leq n\}.$$

هر گاه $\alpha=\{A_1,\dots,A_n\}$ یک پوشش برای X باشد توپولوژیکال انتروپی α که با $H(\alpha)$ نمایش می دهیم را با $\log N(\alpha)$ تعریف می کنیم، که در آن $N(\alpha)$ اصلیت کوچکترین زیر پوشش α برای X است.

مثـال۱. ۳. هـر گـاه $X=[0,1]$, $\alpha=\left\{(\frac{1}{4},1),[0,\frac{3}{4}),(\frac{1}{2}))\right] \cup (0,\frac{1}{4}),(\frac{3}{4},1) \cup (0,\frac{1}{2})\right\}$ آنگـاه

بنابراین $N(\alpha)=2$

$$H(\alpha)=\log 2$$

لم بعدی بعضی ازویژگی های اساسی توپولوژیکال انتروپی پوششها را بدست می دهد.

لم ۱. ۴.

i) $H(\alpha)\geq 0$.

ii) اگر $\beta\subset\alpha$ یک زیر پوشش باشد آنگاه $H(\alpha)\leq H(B)$.

iii) هر گاه α و β دو پوشش متناهی برای X باشند آنگاه $H(\alpha\vee\beta)\leq H(\alpha)+H(\beta)$.

iv) اگر $T:X\to X$ پیوسته باشد و $T(X)=X$ آنگاه $H(\alpha)\geq H(T^{-1}\alpha)$.

اگر $T:X\to Y$ همیومورفیسم باشد آنگاه $N(\alpha)=H(T^{-1}\alpha)$.

برهان i). چون $H(\alpha)=\log N(\alpha)$ بنابراین $H(\alpha)\geq 0$.

برهان ii). چون هر زیر پوشش β یک زیر پوشش α است بنابراین تعـداد زیـر پوشـش هـای α بیـــشتر اســـت. یعنـــی $N(\alpha)\leq N(\beta)$ بنـــابراین از صـــعودی بـــودن تـــابع log داریـــم $\log N(\alpha)\leq\log N(\beta)$ یعنی $H(\alpha)\leq H(\beta)$.

برهان iii). ما زیر پوششهای $\beta \supset \beta' = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}, \alpha \supset \alpha' = \{A_1,\dots,A_n\}$ با کوچکترین

اصلیت را در نظر می گیریم . داریم $\alpha' \vee \beta' = \{A_i \cap B_j; 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ که زیر پوشش

از $\alpha \vee \beta$ با اصلیت حداکثر $n \times m$ می باشد. بنابراین

$$H(\alpha \vee \beta) \le \log(nm) = \log n + \log m = \log H(\alpha) + \log H(\beta) .$$

برهان iv). اگر $\alpha \supset \alpha' = \{A_1,\dots,A_n\}$ زیر مجموعه ای از α با کمترین اصلیت باشد آنگاه

$T^{-1}\alpha = \{T^{-1}A_1,\dots,T^{-1}A_n\}$ زیر پوششی از $T^{-1}\alpha$ با اصلیت n می باشد. بنابراین

$$N(T^{-1}(\alpha)) \le n = N(\alpha) \Rightarrow \log N(T^{-1}\alpha) \le \log(N(\alpha)) \Rightarrow H(T^{-1}\alpha) \le H(\alpha)$$

اگر T پوشش باشد آنگاه برای کوچکترین زیر پوشش $T^{-1}\alpha = \{T^{-1}A_1,\dots,T^{-1}A_m\} \subset T^{-1}\alpha$

داریم که $\alpha' = \{A_1,\dots,A_m\}$ زیر پوشش α است. بنابراین $N(T^{-1}\alpha) = m \ge N(\alpha)$ لذا

$$\log N(T^{-1}\alpha) \ge \log N(\alpha)$$

بنابراین $H(T^{-1}\alpha) \ge H(\alpha)$ این دو نابرابری نتیجه می دهد که $H(\alpha) = H(T^{-1}\alpha)$.

تعریف ۱. ۵. فرض کنید $T: X \to X$ یک نگاشت پیوسته روی X باشد. تعریف می کنیم

توپولوژیکال انتروپی T را نسبت به یک پوشش α بوسیله

$$h(T,\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-1}\alpha)$$

در لم بعدی نشان می دهیم $h(T,\alpha) < +\alpha$.

لم ۱. ۶. برای $n \ge 1$، $\frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-1}\alpha) \le H(\alpha)$.

اثبات. داریم

$$H(\overset{n-1}{\underset{i=0}{V}} T^{-1}\alpha) \underset{*'}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-1}\alpha)_* \leq nH(\alpha)$$

*' از شرط (iii) قضیه قبل بدست می آید و * از شرط (iv) بدست می آید.

حال به تعریف توپولوژیکال انتروپی یک تبدیل می پردازیم.

تعریف ۱. ۷. اگر $T: X \to X$ یک نگاشت پیوسته روی فضای متریک فشرده X باشد آنگاه توپولوژیکالی انتروپی بوسیله زیر تعریف می شود.

$h(T) = \sup\{h(T, \alpha):$ پوشش متناهی برای X است $\alpha\}$

مثال ۱ . ۸. فرض کنیم $T = id: X \to X$ تبدیل همانی روی فضای X باشد. برای هر پوشش α داریم $T^{-1}\alpha = \alpha$ بنابراین $\alpha = \overset{n-1}{\underset{i=0}{V}} T^{-i}\alpha$. این یعنی $H(\alpha) = H(\overset{n-1}{\underset{i=0}{V}} T^{-1}\alpha)$ و بنابراین

$$.h(T,\alpha) = \lim_{h \to +\infty} \sup \frac{1}{n} H(\overset{n-1}{\underset{i=0}{V}} T^{-1}\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \sup \frac{1}{n} H(\alpha) = 0$$

از آنجا که برای هر α داریم $h(T,\alpha) = 0$ بنابراین $h(T)=0$.

تعریف ۱. ۹. گوییم پوشش متناهی α یک مولد برای همیومورفیسم $T: X \to X$ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $N>0$ به طوری که پوشش

$$\overset{N}{\underset{n=-N}{V}} T^{-n}\alpha = \{B_1, \ldots, B_m\}$$

تشکیل شده باشد از مجموعه های بازی که قطر هر کدام از آن حداکثر ε باشد. یعنی