دانشکده علوم پایه
گروه رياضي
پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

# بررسی برخی ایده‌آل‌های خاص در BCI - جبرها

نگارش

رضا مرادی

استاد راهنما

دکتر محمد علی نصرآزادانی

دی ماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر عزیز و مادر مهربانم . . .

# سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که سخن‌وران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.
همچنین از استاد گرامیم جناب آقای دکتر محمد علی نصر آزادانی بسیار سپاس‌گزارم چرا که بدون راهنمایی‌های ایشان تدوین این پایان‌نامه بسیار مشکل می‌نمود.
و در پایان سپاس‌گزار پدر و مادر عزیزم هستم. پروردگارا، نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم؛ پس توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

رضا مرادی
دی‌ماه ۱۳۹۲

# چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی و بررسی $BCI/BCK$ - ایده‌آل‌های جابه‌جایی، استلزامی مثبت و استلزامی می‌پردازیم.
همچنین زیر - ایده آل‌های جابه‌جایی و استلزامی، $p$ - ایده‌آل‌ها، $q$ - ایده‌آل‌ها و $a$ - ایده‌آل‌ها، در $BCI$ - جبرها را معرفی و مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر ایده‌آل، یک $a$ - ایده‌آل است اگر و فقط اگر $p$ و $q$ - ایده‌آل باشد و هر $p$ - ایده‌آل، یک ایده‌آل استلزامی و زیر - ایده‌آل استلزامی می‌باشد و هر ایده‌آل، یک زیر - ایده‌آل استلزامی است اگر و فقط اگر زیر - ایده‌آل جابه‌جایی و استلزامی مثبت باشد.
به‌علاوه ثابت کردیم که هر ایده‌آل $BCK$ - جبر $(P(X); -, \phi)$ یک ایده‌آل اصلی است و به صورت $P(A)$ می‌باشد که $A \subseteq X$.

واژگان کلیدی: $BCI/BCK$ - جبر، $BCI/BCK$ - ایده‌آل جابه‌جایی، $BCI/BCK$ - ایده‌آل استلزامی مثبت، $BCI/BCK$ - ایده‌آل استلزامی، زیر - ایده‌آل استلزامی، زیر - ایده‌آل جابه‌جایی، $p$ - ایده‌آل، $q$ - ایده‌آل و $a$ - ایده‌آل.

# فهرست مطالب

# مقدمه

$BCI/BCK$-جبرها دو کلاس از جبر منطقی هستند که توسط ایمای [1] و ایزکی [2] معرفی شدند[۴، ۳] و توسط محققان دیگر توسعه داده شدند. $BCI$-جبر، تعمیم $BCK$-جبر است. بیشتر جبرهاي منطقي مثل $MTL, BL, hoop, MV$ و جبرهای بولی [3]، توسیع $BCK$-جبر هستند[۹]. این مطلب نشان می‌دهد که $BCI/BCK$-جبرها ساختار عمومی‌تری دارند. [۵]. سه کلاس مهم در $BCI/BCK$-جبرها عبارتند از: $BCI/BCK$-جبرهای جابه‌جایی، $BCI/BCK$-جبرهای استلزامی مثبت و $BCI/BCK$-جبرهای استلزامی.

یکی از مهم‌ترین روش‌ها برای مطالعه و تحقیق درباره‌ی جبرها، مطالعه روی ایده‌آل‌های آن‌هاست. اولین بار ایزکی و تاناکا [4] از ایده‌آل‌ها برای شرح کامل‌تر $BCI/BCK$-جبرها استفاده کردند. منگ [5] بـــرای تکمیل $BCI$-جبرهای جابه‌جایی، $BCI$-ایده‌آل‌های جابه‌جایی را معرفی کرد[۱۲]. لیو [6]، ژان [7] [۱۰]،وی [8] و جون [9] [۷] به طور مستقل برای تکمیل $BCI$-جبرهای استلزامی مثبت، $BCI$-ایده‌آل‌های استلزامی مثبت را معرفی کردند و لیو، یانگ [10] و منگ برای تکمیل $BCI$-جبرهای استلزامی $BCI$-ایده‌آل‌های استلزامی را معرفی کردند[۹]. همچنین لیو و منگ در مقاله‌ای به معرفی زیر-ایده‌آل‌های استلزامی و جابه‌جایی در $BCI$-جبرها پرداختند[۸].

در [۱] مفهوم $p$-ایده آل توسط ژان [11] معرفی شد و در مطالعه‌ی $BCI$-جبرهای $p$-نیم‌ساده مورد استفاده قرار گرفت. همچنین در [۱۱]، مفهوم $q$-ایده آل و $a$-ایده آل توسط لیو، منگ و ژان معرفی شد.

در این پایان‌نامه به بررسی این ایده‌آل‌ها به شرح زیر پرداخته ایم.
فصل۱: مفاهیم اولیه، که جهت مطالعه‌ی مطالب فصل‌های بعدی مورد نیاز است.
فصل۲: معرفی و بررسی $BCK$-ایده‌آل‌های جابه‌جایی، استلزامی مثبت و استلزامی. همچنین معرفی و بررسی $BCI$-ایده‌آل‌های جابه‌جایی، استلزامی مثبت و استلزامی.

[1] Imai
[2] Iseki
[3] Boolean algebra
[4] Tanaka
[5] Meng
[6] Liu
[7] Zhang
[8] Wei
[9] Jun
[10] Yang
[11] Zhang

فصل۳: معرفی و بررسی زیر-ایده‌آل‌های استلزامی، زیر-ایده‌آل‌های جابه‌جایی، $p$-ایده‌آل‌ها، $q$-ایده‌آل‌ها و $a$-ایده‌آل‌ها.

شایان ذکر است که در فصل اول قضیه‌ی "فرض کنید $X$ یک مجموعه و $P(X)$، مجموعه‌ی توانی $X$ باشد. $I$ یک ایده آل $BCK$-جبر $(P(X); -, \phi)$ است اگر و فقط اگر $I = P(A)$ برای $A \subseteq X$. " را اثبات کردیم. این قضیه ما را در مطالعه‌ی ساختارهای کلی ایده‌آل‌های $BCK$-جبر $(P(X); -, \phi)$، یاری کرد.

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه

مسائلی که بدلیل سطح فعلی تفکر ما بوجود می‌آیند، نمی‌توانند با همان سطح تفکر حـل گردند.

Albert Einstein ( ۱۸۲۶ –۱۸۶۶)

در این فصل به تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول دیگر پرداخته می‌شود. اکثر قضایای این فصل از کتاب **BCI - جبر** [۱۴] است(به جز چند قضیه و مثال که حاصل پژوهش پژوهش‌گر است)، به همین جهت از ذکر منبع پرهیز شده است.

## ۱.۱ $BCI$ - جبرها

**تعریف ۱.۱.۱.** یک سیستم، شامل مجموعه‌ی ناتهی $A$، همراه با یک یا چند عمل روی $A$ را یک **جبر** گویند.

این عمل‌های روی $A$، معمولا به صورت **نوع** این جبرها بیان می‌شوند. مثلا گروه $(G, ., \circ)$، یک جبر از نوع (۲، ۰) است. همچنین حلقه‌ی $R$، یک جبر از نوع (۲،۲،۰) است.

**تعریف ۲.۱.۱.** جبر $(X, *, \circ)$ از نوع (۲، ۰) را $BCI$- جبر [۱] گویند هرگاه به ازای هر $X$ $x, y, z \in$، در شرایط زیر صدق کند.

[۱] BCI-algebra

$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$ ( $BCI$-۱
$(x*(x*y))*y=0$ ($BCI$-۲
$x*x=0$ ($BCI$-۳
$x*y=0, y*x=0 \Longrightarrow x=y$ ($BCI$-۴

**مثال ۳.۱.۱.** فرض کنید $S$ یک مجموعه باشد و $P$ مجموعه توانی[۲] $S$ باشد، در این صورت $(P,-,\phi)$ یک $BCI$-جبر است.

**مثال ۴.۱.۱.** فرض کنید $(G,.,e)$ یک گروه آبلی[۳] با همانی $e$ باشد. عمل دوتایی $*$ را روی $G$ به صورت $x*y=xy^{-1}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $(G,*,e)$ یک $BCI$-جبر است.

$(G,*,e)$ در مثال بالا را **BCI - جبر الحاقی** [۴] گروه آبلی $(G,.,e)$ گویند.

**مثال ۵.۱.۱.** $(\mathbb{Q}^*,\div,1)$ یک $BCI$-جبر است. که در آن $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\}$.

در واقع $(\mathbb{Q}^*,\div,1)$، $BCI$-جبر الحاقی گروه آبلی $(\mathbb{Q}^*,.,1)$ است.

**مثال ۶.۱.۱.** $(\mathbb{Z},-,0)$ یک $BCI$-جبر است.

**تعریف ۷.۱.۱.** مجموعه $X$ با رابطه $\leq$ را یك **مجموعه مرتب جزیی**[۵]گویند اگر براي هر $x,y,z\in X$، در شرایط زیر صدق کند.

۱) $x\leq x$؛

۲)اگر $y\leq x$ و $x\leq y$ آنگاه $x=y$؛

۳) اگر $x\leq y$ و $y\leq z$ آنگاه $x\leq z$.

**گزاره ۸.۱.۱.** فرض کنید $(X,*,0)$ یک $BCI$-جبر باشد. به ازای هر $x,y\in X$، رابطه‌ی دوتایی $\leq$ را به صورت $y\leq x$ اگر و فقط اگر $x*y=0$ تعریف می‌کنیم. آن‌گاه $(X,\leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزیی است.

**تعریف ۹.۱.۱.** در مجموعه‌ی مرتب جزیی $(X,\leqslant)$، عنصر $a$ را یک عنصر **مینیمال** [۶]نامیم، اگر $x\leqslant a$ آن‌گاه $x=a$. برای هر $x\in X$.

با توجه به تعریف فوق در $BCI$-جبر $(X,*,0)$، اگر $x\leq 0$ آن‌گاه $0=x*0$ ، لذا $x=0$ و این یعنی این‌که $0$ ، عضو مینیمال است.

[۲] Power set
[۳] Abelian group
[۴] Adjoint BCI-algebra
[۵] Partial order set
[۶] Minimal

**گزاره ۱۰.۱.۱.** در هر $BCI$ - جبر $X$ احکام زیر برقرارند.
۱) $(x*y)*z=(x*z)*y$؛
۲) $x*(x*(x*y))=x*y$؛
۳) $((x*z)*(y*z))*(x*y)=0$؛
۴) $x*0=x$؛
۵) $0*(x*y)=(0*x)*(0*y)$؛
۶) $x\leq y\Longrightarrow x*z\leq x*y$؛
۷) $x\leq y\Longrightarrow z*y\leq z*x$.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرض کنید $(X,*,0)$ یک $BCI$ - جبـــر باشد. زیـــر مجموعه‌ی $Y$ از $X$ را یک **زیرجبر** [۷] $X$ گویند اگر $(Y,*,0)$ خودش یک $BCI$-جبر باشد.

**گزاره ۱۲.۱.۱.** فرض کنید $(X,*,0)$ یک $BCI$ - جبر باشد. زیـــر مجموعه‌ی $Y$ از $X$ یک زیرجبر است، اگر به ازای هر $y_1,y_2\in Y$، $y_1*y_2\in Y$.

**مثال ۱۳.۱.۱.** $(2\mathbb{Z},-,0)$ یک زیرجبر $(\mathbb{Z},-,0)$ است.
زیرا تفاضل هر دو عدد زوج، یک عدد زوج است.

**تعریف ۱۴.۱.۱.** اگر $X$ یک $BCI$-جبر باشد، مجموعه‌ی $P=\{x\in X\mid 0*(0*x)=x\}$ را بخش **p - نیم‌ساده‌ی** [۸] $X$ نامیم .

**گزاره ۱۵.۱.۱.** هر عضو مجموعه‌ی $P$ مینیمال است.

**مثال ۱۶.۱.۱.** اگر $(X;.,e)$ یک گروه آبلی باشد، آن‌گاه $BCI$-جبر الحاقی $(X;*,0)$، $p$-نیم‌ساده است. جایی‌که $x*y=x.y^{-1}$ . زیرا به ازای هر $x\in X$، داریم

$$e*(e*x)=e.(e.x^{-1})^{-1}=x$$

**مثال ۱۷.۱.۱.** فرض کنید $(X;*,0)$ یک $p$-نیم‌ساده باشد. عمل دوتایی . را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x.y=y*(0*x)$$

آن‌گاه $(X;.,0)$، یک گروه آبلی با همانی ۰ است. گروه $(X;.,0)$ را گروه آبلی الحاقی [۹] $(X;*,0)$ می‌نامند.

**گزاره ۱۸.۱.۱.** دو ساختمان جبری زیر معادل هستند:
جبرهای $p$-نیم‌ساده و گروه‌های آبلی.

---
[۷] Sub-algebra
[۸] P-semisimple
[۹] Adjoint abelian group

**مثال ۱۹.۱.۱.** $(\mathbb{Z}, -, ۰)$ به عنوان یک جبر $p$-نیم‌ساده و $(\mathbb{Z}, +, ۰)$ به عنوان یک گروه آبلی با یک‌دیگر معادل هستند.

**مثال ۲۰.۱.۱.** $(\mathbb{Q}^*, \div, ۱)$ به عنوان یک جبر $p$-نیم‌ساده و $(\mathbb{Q}^*, ., ۱)$ به عنوان یک گروه آبلی با یک‌دیگر معادل هستند.

**گزاره ۲۱.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $BCI$-جبر باشد، مجموعه‌ی $P$، شامل همه‌ی عناصر مینیمال را **بخش p - نیم‌ساده‌ی** [۱۰] $X$ می‌گویند.

**تعریف ۲۲.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $BCI$-جبر باشد، عنصر $x \in X$ را **مثبت** [۱۱] گویند، هرگاه $۰ * x = ۰$.

**گزاره ۲۳.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $BCI$-جبر باشد، آن‌گاه به ازای هر $x, y \in X$ داریم

۱) $۰ * x$ مینیمال است؛

۲) اگر $y \leq x$ آن‌گاه $۰ * y = ۰ * x$ .

***برهان.*** فرض کنید $y \leq ۰ * x$، در این صورت داریم $y * (۰ * x) = ۰$ و

$$\begin{aligned}(۰ * x) * y &= (۰ * y) * x \\ &= ((y * (۰ * x)) * y) * x \\ &= ((y * y) * (۰ * x)) * x \\ &= (۰ * (۰ * x)) * x = ۰.\end{aligned}$$

یعنی $۰ * x \leq y$، بنابراین $y = ۰ * x$ . پس $۰ * x$ مینیمال است.

اگر $y \leq x$، آن‌گاه طبق ۱۰.۱.۱ (۷)، داریم

$$۰ * y \leq ۰ * x.$$

طبق (۱)، $۰ * x$ مینیمال است، پس $۰ * y = ۰ * x$. □

**گزاره ۲۴.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $BCI$-جبر باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) $X$، $p$-نیم‌ساده است؛

۲) $a * (a * x) = x$ به ازای هر $a, x \in X$ ؛

۳) $X = \{a * x | x \in X\}$ به ازای هر $a \in X$.

[۱۰] P-semisimple part

[۱۱] Positive

## ۲.۱ $BCK$ - جبرها

$BCK$ - جبرها کلاس ویژه‌ای از $BCI$ - جبرها هستند که نقش مهمی در نظریه‌ی $BCI$ - جبرها ایفا می‌کنند. در واقع، از لحاظ تاریخی $BCK$ - جبرها قبل از $BCI$ - جبرها معرفی و مطالعه شده‌اند.

**تعریف ۱.۲.۱.** $BCI$ - جبر $X$ را **BCK - جبر** [۱۲] گویند، هرگاه $0 * x = 0$. به ازای هر $x \in X$.

در واقع همه‌ی عناصر یک $BCK$ - جبر مثبت هستند. واضح است که اگر $X$ یک $BCK$ - جبر باشد، آن‌گاه $0$ تنها عنصر مینیمال $X$ است. به عبارت دیگر $0$ کوچک‌ترین عنصر $X$ است. همچنین واضح است که اگر $Y$ یک زیرجبر از $BCK$ - جبر $X$ باشد، آن‌گاه $Y$ خودش یک $BCK$ - جبر است.

**مثال ۲.۲.۱.** فرض کنید $S$ یک مجموعه باشد و $P$ مجموعه توانی $S$ باشد، در این صورت $(P, -, \phi)$ یک $BCK$ - جبر است.

**مثال ۳.۲.۱.** $(\mathbb{N}, *, 1)$ که در آن $a*b = \dfrac{a}{(a,b)}$ یک $BCK$ - جبر است که $(a,b)$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک [۱۳] $a$ و $b$ است.

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض کنید $X$ یک $BCI$ - جبر باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $B = \{x \in X \mid 0 * x = 0\}$ را **BCK - بخش** [۱۴] $X$ می‌نامیم.

**گزاره ۵.۲.۱.** فرض کنید $X$ یک $BCI$ - جبر باشد، اگر به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم $x * (x * y) = y * (y * x)$ آن‌گاه $X$ یک $BCK$ - جبر است.

***برهان.*** فرض کنید $X$ یک $BCI$ - جبر باشد، و به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$x * (x * y) = y * (y * x).$$

در این صورت به ازای هر $x \in X$، داریم

$$0 * (0 * x) = x * (x * 0) = x * x = 0.$$

و این یعنی

$$0 \leq 0 * x.$$

از طرفی طبق ۲۳.۱.۱، می‌دانیم که $x * 0$ مینیمال است، بنابراین $0 * x = 0$. □

[۱۲] BCK-algebra
[۱۳] Greatest common divisor
[۱۴] BCK-part

## ۳.۱ ایده‌آل‌ها

**تعریف ۱.۳.۱.** زیر مجموعه ناتهی $I$ از $BCI$-جبر $X$ را یک **ایده‌آل** [۱۵] $X$ گویند اگر داشته باشیم

۱) $0 \in I$؛

۲) برای هر $x, y \in X$ اگر $x * y \in I$ و $y \in I$ آن‌گاه $x \in I$.

$X$ و $\{0\}$ ایده‌آل‌های $X$ هستند که به آنها **ایده‌آل‌های بدیهی** [۱۶] می‌گویند.

**مثال ۲.۳.۱.** فرض کنید $(\mathbb{Q}^*, \div, 1)$، $BCI$-جبر مثال ۵.۱.۱، باشد. در این صورت $\mathbb{Z}^*$، یک ایده آل $\mathbb{Q}^*$ است.که در آن $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

$1 \in \mathbb{Z}^*$ و به ازای هر $a, b \in \mathbb{Z}^*$، اگر $a \div b \in \mathbb{Z}^*$ و $b \in \mathbb{Z}^*$، نشان می‌دهیم $a \in \mathbb{Z}^*$. فرض کنید $a \div b = k \in \mathbb{Z}^*$ . در این صورت $a = kb$.از آنجایی‌که $k, b \in \mathbb{Z}^*$، بنابراین $a \in \mathbb{Z}^*$.

**مثال ۳.۳.۱.** فرض کنید $(\mathbb{Z}, -, 0)$، $BCI$-جبر مثال ۶.۱.۱، باشد. در این صورت $\mathbb{N}^*$، یک ایده آل $\mathbb{Z}$ است. که در آن $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$0 \in \mathbb{N}^*$ و به ازای هر $a, b \in \mathbb{N}^*$، اگر $a - b \in \mathbb{N}^*$ و $b \in \mathbb{N}^*$، نشان می‌دهیم $a \in \mathbb{N}^*$. فرض کنید $a - b = k \in \mathbb{N}^*$ . در این صورت $a = k + b$.از آنجایی‌که $k, b \in \mathbb{N}^*$، بنابراین $a \in \mathbb{N}^*$.

**گزاره ۴.۳.۱.** اگر $X$ یک $BCI$-جبر باشد در این صورت

الف) $BCK$ - بخش $B$ از $X$ یک ایده آل $X$ است؛

ب) بخش $p$-نیم‌ساده ی $P$ از $X$ ایده آل $X$ است اگر و فقط اگر $x * a \in P$ آن‌گاه $x = 0$. به ازای هر $a \in P$ و $x \in X$ .

**مثال ۵.۳.۱.** فرض کنید $X = \{0, 1, 2\}$ و عملگر $*$ به صورت جدول زیر باشد.

| $*$ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۲ | ۲ | ۰ |

در نتیجه $(X, *, 0)$ یک $BCK$ - جبر است و $\{0\}$ ، X ، $\{0, 1\}$ و $\{0, 2\}$ ایده‌آل‌های آن هستند.

**قضیه ۶.۳.۱.** فرض کنید $X$ یک مجموعــه و $P(X)$، مجموعــه‌ی توانی $X$ باشد. $I$ یک ایده آل $BCK$-جبر $(P(X); -, \phi)$ است اگر و فقط اگر $I = P(A)$ برای $A \subseteq X$.

[۱۵] Ideal
[۱۶] Trivial ideal

***برهان.*** فرض کنید $I$، یک ایده‌آل $P(X)$ باشد. همچنین فرض کنید $E \in I$. نشان می‌دهیم $P(E) \subseteq I$.
فرض کنید $B \in P(E)$ آن‌گاه $B - E = \phi \in I$ و از این‌که $E \in P(E)$ داریم

$$B \in I.$$

پس

$$P(E) \subseteq I.$$

از طرفی به ازای هر $C, D \in I$

$$(C \cup D) - D = C \in I.$$

بنابراین طبق تعریف ایده آل

$$C \cup D \in I.$$

قرار می‌دهیم $M = \cup I$. بنابراین

$$P(M) \subseteq I.$$

از طرفی اگر $F \in I$، آن‌گاه $F \subseteq M$. در نتیجه $F \in P(M)$. پس

$$I \subseteq P(M).$$

در نتیجه $I = P(M)$.

به عکس فرض کنید $I = P(A)$، یک زیر مجموعه‌ی $P(X)$ باشد. در این صورت به ازای هر $E, F \in P(X)$، اگر $E - F \in I$ و $F \in I$، نشان می‌دهیم $E \in I$. قرار می‌دهیم $E - F = G \in I$. بنابراین

$$G \subseteq A.$$

از طرفی از این‌که $E - F = G$ داریم

$$E = F \cup G.$$

چون $F, G \subseteq A$، پس $E \subseteq A$. یعنی $E \in I$. بنابراین $I$ یک ایده آل $P(X)$ است. □

**مثال ۷.۳.۱.** هر زیرجبر از $BCK$ - جبر $(P, -, \phi)$، مثال ۲.۲.۱، الزاما یک ایده آل نیست. زیرا در صورتی‌که $S = \{۱, ۲, ۳\}$ و $P$ مجموعه‌ی توانی $S$ باشد. آن‌گاه $A = \{\phi, \{۱\}, \{۲\}\}$ یک زیرجبر $P$ است، اما ایده آل $P$ نیست. زیرا $\{۱, ۲\} - \{۲\} = \{۱\} \in A$ و $\{۲\} \in A$، اما $\{۱, ۲\} \notin A$.

**تعریف ۸.۳.۱.** ایده آل $A$ از $BCI$-جبر $X$ را **ایده آل بسته** [۱۷] گویند، اگر تحت عمل $*$ بسته باشد.

**مثال ۹.۳.۱.** $(۲\mathbb{Z}, -, ۰)$ یک ایده آل بسته‌ی $(\mathbb{Z}, -, ۰)$ است.
$۰ \in ۲\mathbb{Z}$ و به ازای هر $a, b \in ۲\mathbb{Z}$، اگر $a - b = ۲k \in ۲\mathbb{Z}$ و $b = ۲l \in ۲\mathbb{Z}$، داریم

[۱۷] Closed ideal

$$a = 2k + 2l = 2(k+l) \in 2\mathbb{Z}.$$

پس $2\mathbb{Z}$، یک ایده آل $\mathbb{Z}$ است. از طرفی در مثال ۱.۱.۱۳، نشان دادیم $2\mathbb{Z}$ یک زیرجبر $\mathbb{Z}$ نیز است.

**گزاره ۱.۳.۱۰.** ایده آل $A$، از $BCI$-جبر $X$، بسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$، $0 * x \in A$.

**مثال ۱.۳.۱۱.** در $BCK$-جبر $(P; -, \phi)$، مثال ۱.۲.۲، هر ایده‌آل بسته است. زیرا اگر $A$، یک ایده‌آل باشد، آن‌گاه به ازای هر $X \in A$،داریم

$$\phi - X = \phi \in A.$$

**تعریف ۱.۳.۱۲.** فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $BCI$-جبر $X$ باشد. کوچک ترین ایده‌آل $X$، شامل $S$، را **ایده‌آل تولید شده** [18] توسط $S$ می‌گوییم و با $< S >$ نمایش می‌دهیم.

**گزاره ۱.۳.۱۳.** اشتراک هر خانواده از ایده‌آل‌های $X$، یک ایده‌آل $X$ است.

**گزاره ۱.۳.۱۴.** فرض کنید $S$ زیر مجموعه‌ی ناتهی از $BCI$-جبر $X$ باشد و فرض کنید

$$A = \{x \in X | (...((x * a_1) * a_2) * ...) * a_n)...)) = 0, a_1, a_2, ..., a_n \in S\}$$

آن‌گاه $A \cup \{0\} = < S >$. به ویژه اگر $S$، شامل یک عنصر مثبت از $X$ باشد آن‌گاه $A = < S >$.

معمولا $< \{a_1, a_2, ..., a_n\} >$ را به اختصار به صورت $< a_1, a_2, ..., a_n >$ نمایش می‌دهیم. ایده‌آل $< a >$ ، یک **ایده‌آل اصلی** [19] $X$ می‌گوییم.

**قضیه ۱.۳.۱۵.** فرض کنید $S$ یک مجموعه و $P(S)$، مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های $S$ باشد. آن‌گاه هر ایده‌آل $BCK$-جبر $(P(S); -, \phi)$، یک ایده‌آل اصلی است.

***برهان.*** فرض کنید $S$ یک مجموعه باشد و $A \in P(S)$. طبق گزاره ی ۱.۳.۱۴، داریم

$$< A > = \{X \in P(S) | (...((X - A) - A) - ... - A)...)) = \phi\}.$$

یعنی

$$< A > = \{X \in P(S) | X - A = \phi\}.$$

بنابراین $X \in P(A)$ و $< A > = P(A)$.

از طرفی طبق قضیه ی ۱.۳.۶، هر ایده‌آل $I$ از $P(S)$ به صورت $P(M)$ است که $M \in P(S)$. بنابراین هر ایده‌آل $P(S)$ یک ایده‌آل اصلی است. □

[18] Generated ideal

[19] Principal ideal

## ۴.۱ هم‌نهشتی‌ها و جبرهای خارج قسمتی

**تعریف ۱.۴.۱.** رابطه‌ی هم‌ارزی $\theta$ روی $BCI$-جبر $X$ را **هم‌نهشتی** [20] روی $X$ گوییم، اگر به ازای هر $x, y, u, v \in X$، $x \sim y(\theta)$ و $u \sim v(\theta)$ آن‌گاه $x * u \sim y * v(\theta)$.

کلاس هم‌ارزی $x$ تحت رابطه‌ی $\theta$ روی $BCI$-جبر $X$ با نماد $\theta_x$ نمایش داده می‌شود. یعنی $\theta_x = \{y \in X | y \sim x(\theta)\}$. مجموعه‌ی $\{\theta_x | x \in X\}$ را با $\frac{X}{\theta}$ نمایش می‌دهند و به آن مجموعه‌ی خارج‌قسمتی [21] می‌گویند. بنابراین $x \sim y(\theta)$ اگر و فقط اگر $\theta_x = \theta_y$.

**گزاره ۲.۴.۱.** عمل $*$ روی $\frac{X}{\theta}$ با رابطه‌ی $\theta_x * \theta_y = \theta_{x*y}$ یک عمل دوتایی است(در واقع هم‌نهشتی رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ موجب خوش‌تعریفی عمل دوتایی می‌گردد). همچنین جبر $(\frac{X}{\theta}, *, \theta_0)$ از نوع $(2, 0)$ است.

جبر $(\frac{X}{\theta}, *, \theta_0)$ را جبر خارج قسمتی $X$ القا شده توسط هم‌نهشتی $\theta$ می‌گویند. جبر خارج قسمتی $(\frac{X}{\theta}, *, \theta_0)$ ممکن است یک $BCI$-جبر نباشد[۱۴].

**گزاره ۳.۴.۱.** فرض کنید $A$ یک ایده‌آل از $BCI$-جبر$X$ باشد، رابطه‌ی دوتایی $\theta$ را روی $X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم
$x \sim y(\theta)$ اگر و فقط اگر $x * y \in A$ و $y * x \in A$. به ازای هر $x, y \in X$. در این صورت $\theta$ یک رابطه‌ی هم‌نهشتی روی $X$ است.

رابطه‌ی هم‌نهشتی $\theta$ در گزاره‌ی بالا را **ایده‌آل هم‌نهشتی** [22] (یا به اختصار $I$-هم‌نهشتی [23]) روی $X$ القا شده توسط ایده‌آل $A$ می‌گویند. برای $I$-هم‌نهشتی $\theta$ روی $X$ القا شده توسط $A$ ، معمولا به جای $x \sim y(\theta)$ از نماد $x \sim y(A)$ ، به جای $\theta_x$ از نماد $A_x$ و به جای $\frac{X}{\theta}$ از نماد $\frac{X}{A}$ استفاده می‌کنیم.

**مثال ۴.۴.۱.** در مثال ۱۰.۳.۱، نشان دادیم که $\mathbb{Z}^*$ یک ایده‌آل $\mathbb{Q}^*$ است. بنابراین جبر خارج قسمتی $\frac{\mathbb{Q}^*}{\mathbb{Z}^*}$ را داریم. کلاس هم‌ارزی ۱ را با $\mathbb{Z}_1^*$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $x \in \mathbb{Z}_1^*$، آن‌گاه $x \sim 1(\mathbb{Z}^*)$، بنابراین $x \div 1 \in \mathbb{Z}^*$ و $1 \div x \in \mathbb{Z}^*$. لذا $x = \pm 1$. از این رو $\mathbb{Z}_1^* = \{-1, 1\}$. همچنین مشاهده می‌شود که $\mathbb{Z}_1^* \neq \mathbb{Z}^*$.

**گزاره ۵.۴.۱.** فرض کنید $A$ یک ایده‌آل از $BCI$-جبر $X$ باشد، آن‌گاه جبر خارج قسمتی $(\frac{X}{A}, *, A_0)$ یک $BCI$-جبر است.

**گزاره ۶.۴.۱.** فرض کنید که $B$، $BCK$ - بخش $BCI$ - جبر $X$ باشد، آن‌گاه جبر خارج قسمتی $\frac{X}{B}$، $p$-نیم‌ساده است.

[20] congruence
[21] Quotient
[22] Ideal congruence
[23] I- congruence

## ۵.۱ $BCK$ - جبرهای جابه‌جایی

**تعریف ۱.۵.۱.** $BCK$ - جبر $X$ را **جابه‌جایی** [۲۴] گویند اگر به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $x * (x * y) = y * (y * x)$.

**مثال ۲.۵.۱.** $BCK$ - جبر $(\mathbb{N}, *, 1)$ در مثال ۳.۲.۱ یک $BCK$ - جبر جابه‌جایی است.
باید نشان دهیم $\frac{y}{(y, \frac{y}{(y,x)})} = \frac{x}{(x, \frac{x}{(x,y)})}$ واضح است که $\frac{x}{(x,y)} = (x, \frac{x}{(x,y)})$ بنابراین $(x,y) = \frac{x}{(x, \frac{x}{(x,y)})}$ و به طور متشابه $(y,x) = \frac{y}{(y, \frac{y}{(y,x)})}$. واضح است که $(x,y) = (y,x)$.
در نتیجه حکم برقرار است.

**مثال ۳.۵.۱.** $BCK$ - جبر $(P, -, \phi)$ در مثال ۲.۲.۱، یک $BCK$ - جبر جابه‌جایی است.
باید نشان دهیم $A - (A - B) = B - (B - A)$. داریم

$$\begin{aligned} A - (A - B) = A - (A \cap B') &= A \cap (A \cap B')' \\ &= A' \cap (A \cup B) \\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B. \end{aligned}$$

به طور مشابه $B - (B - A) = B \cap A$.

**گزاره ۴.۵.۱.** اگر $X$ یک $BCK$ - جبر باشد آن‌گاه به ازای هر $x, y \in X$ گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) $X$ جابه‌جایی است؛
۲) $x * y = x * (y * (y * x))$؛
۳) $x * (x * y) = y * (y * (x * (x * y)))$؛
۴) $x \leqslant y$ آن‌گاه $x = y * (y * x)$.

**گزاره ۵.۵.۱.** جبر $(X; *, 0)$ از نوع $(2, 0)$، یک $BCK$ - جبر جابه جایی است اگر و فقط اگر در اتحادهای زیر صدق کند.

۱) $x * x = 0$؛
۲) $x * 0 = x$؛
۳) $(x * y) * z = (x * z) * y$؛
۴) $x * (x * y) = y * (y * x)$.

**گزاره ۶.۵.۱.** جبر $(X; *, 0)$ از نوع $(2, 0)$، یک $BCK$ - جبر جابه جایی است اگر و فقط اگر در اتحادهای زیر صدق کند.

[۲۴] Commutative BCK-algebra

۱) $((x * y) * z) * ((x * z) * y) = 0$؛

۲) $x * (x * y) = y * (y * x)$؛

۳) $z * ((x * y) * x) = z$.

**گزاره ۷.۵.۱.** جبر $(X; *, 0)$ از نوع $(2, 0)$، $BCK$-جبر جابه جایی است اگر و فقط اگر در اتحادهای زیر صدق کند.

۱) $x * (0 * y) = x$؛

۲) $(x * z) * (x * y) = (y * z) * (y * x)$.

## ۶.۱ $BCK$-جبرهای استلزامی مثبت

**تعریف ۱.۶.۱.** $BCK$ - جبر $X$ را **استلزامی مثبت** [۲۵] گویند اگر به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

**مثال ۲.۶.۱.** فرض کنید $(X; \leq)$ یک مجموعه‌ی جزیی مرتب با کوچکترین عنصر ۰ باشد. عمل $*$ را روی $X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x * y = \begin{cases} 0 & x \leq y \\ x & x \nleq y \end{cases}$$

آن‌گاه $(X; *, 0)$ یک $BCK$-جبر استلزامی مثبت است.

**مثال ۳.۶.۱.** فرض کنید $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و عمل دوتایی $*$ روی $X$، طبق جدول کیلی زیر باشد.

| $*$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۲ | ۲ | ۰ | ۲ | ۰ |
| ۳ | ۳ | ۳ | ۳ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۴ | ۴ | ۳ | ۲ | ۰ |

آن‌گاه $X$ یک $BCK$-جبر استلزامی مثبت است.

**گزاره ۴.۶.۱.** $BCK$-جبر $X$ استلزامی مثبت است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $x * y = (x * y) * y$.

**گزاره ۵.۶.۱.** اگر $X$ یک $BCK$-جبر باشد آن‌گاه به ازای هر $x, y \in X$ گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) $X$ استلزامی مثبت است؛

۲) $(x * (x * y)) * (y * x) = x * (x * (y * (y * x)))$؛

۳) $x * y = (x * y) * (x * (x * y))$.

[۲۵] Positive impelicative BCK-algebra