دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

کران‌هایی برای مقادیر ویژه‌ی اکسترمال یک رده از ماتریس‌های سه‌قطری متقارن و کاربردهای آن

استاد راهنما

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور

دکتر مسعود امان

نگارنده

امیر ایزدخواه

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

ردهی خاصی از ماتریس‌های سه‌قطری متقارن که به صورت آشفتگی از ماتریس‌های توپلیتز[1] دیده می‌شوند را در نظر می‌گیریم. براساس یک تحلیل دقیق، کران‌های دقیقی برای مقادیر ویژه‌ی اکسترمال این رده از ماتریس‌ها بر حسب داده‌های اولیه‌ی ماتریس داده شده، ارائه می‌شوند. همچنین با استفاده از کران‌های بدست آمده، کران پایینی برای کوچکترین مقدار تکین ماتریس‌های معینی ارائه می‌گردد. نتایج عددی نشان می‌دهند که این کران‌ها بسیار خوب هستند.

واژگان کلیدی: ماترس‌های سه‌قطری، ماتریس‌های متقارن، مقادیر ویژه، مقادیر ویژه‌ی اکسترمال
تعداد صفحات پایان نامه: ۶۱

[1] Toeplitz Matrices

به اذن ربی که خزائن علوم در نزد اوست، تقدیم می کنم این اثر را به منجی منتظران که بهجت عارفان به ما آموخت که او چشم بینای خداست (عین الله الناظرة).

او یی که منتظر آمدن ماست و روزی که دیر و دور نیست، می آید و پرده بر می دارد از همه ی علومی که از چشم مادی نگر و عقل معاش آدمیان پنهان مانده ...

به امید نگاهی و دعایی.

"اللهم عجل لولیک الفرج"

الهی...[۲]

ای کریمی که بخشنده‌ی عطایی و ای حکیمی که پوشنده‌ی خطایی و ای احدی که در ذات و صفات بی‌همتایی و ای خالقی که راهنمایی و ای قادری که خدایی را سزایی، به ذات لایزال خود و به صفات با کمال خود و به عزت جلال خود و به عظمت جمال خود که جان ما را صفای خود ده، دل ما را هوای خود ده، چشم ما را ضیاء خود ده و ما را آن ده که آن به.

الهی ای بیننده‌ی نمازها، ای پذیرنده‌ی نیازها، ای داننده‌ی رازها و ای شنونده‌ی آوازها ای مطلع بر حقایق و ای مهربان بر خلایق، عذرهای ما بپذیر که تو غنی و ما فقیر، عیب‌های ما مگیر که تو قوی و ما حقیر، اگر بگیری بر ما حجت نداریم و اگر بسوزی طاقت نداریم، از بنده خطا آید و ذلت و تو عطا آید و رحمت.

الهی بحق آنکه ترا هیچ حاجت نیست رحمت کن بر آن‌که او را هیچ حجت نیست.

یارب تو مرا انابتی روزی کن　　　شایسته‌ی خویش طاعتی روزی کن

زان پیش که فارغ شوم از کار جهان　　　اندر دو جهان فراغتی روزی کن

[۲] مناجاتی از خواجه عبدالله انصاری.

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس خدای را که با الطاف ربانی اش توفیق داد تا این مجموعه را به پایان رسانده و از خداوند منان توفیق و سعادت همه پویندگان و رهروان علم و دانش را خواهانم.

پس از حمد و ثنای الهی و شکرگزاری به درگاه خداوند متعال اکنون که حاصل همه ی تلاش ها مثمر ثمر واقع شد بر خود فرض می دانم که با بضاعت اندک در کمال ادب و احترام مراتب سپاس خالصانه و صمیمانه را از همه ی کسانی که من را در این وادی یاری نموده اند ابراز دارم.

نهایت سپاس خود را از الطاف استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر مهدی پناهی دارم، استاد ارجمندی که همواره با خلقی نیکو پاسخگوی سوالاتم بودند و با بزرگواری خود، نقایص این حقیر را مورد اغماض قرار می دادند. هرگز ادعا نمی کنم که روزی خواهم توانست محبت های ایشان را جبران کنم اما می توانم اطمینان دهم که هیچ گاه لطفشان را فراموش نخواهم کرد. از استاد مشاور گرامیم جناب آقای دکتر مسعود امان که لطف زیادی نسبت به من داشتند، سپاسگزاری می نمایم.

از استادان فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر اسدالله محمودزاده وزیری و سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر علیرضا جانفدا نماینده محترم تحصیلات تکمیلی سپاسگزارم.

از پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند، تشکر و قدردانی می کنم و به پاس زحمات بی دریغشان دست و پایشان را بوسه می زنم.

از حمایت های صمیمانه برادران و خواهران عزیزم که همواره پشتیبان من بودند، قدردانی می کنم.

از همسر عزیزم که در این دوران متحمل سختی شدند و با صبوری خود به من قدرت مضاعف می دادند، تشکر می کنم.

همچنین از دوستان عزیزم به ویژه محمود رساخیرآبادی، حسین سوگندی و سعید رستم یاری که جایشان در کنارم خالی است و همه ی همکلاسی هایم که در طول این دو سال همیشه همراه و همگام من بودند و تمام کسانی که در این پایان نامه به بنده کمک کردند به ویژه دکتر طیبی، دکتر خاتمی و دوستان عزیزم کمیل ایزدپناه و محمد اسحاق نژاد همواره قدردانی می کنم.

امیر ایزدخواه
شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

ماتریس‌های توپلیتز، ماتریس‌های خاصی هستند که درایه‌های روی قطرهای آن با هم برابرند. ماتریس‌های توپلیتز سه‌قطری متقارن ماتریس‌های سه‌قطری متقارنی هستند که همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم و تمام درایه‌های دو قطر دیگر نیز با هم برابرند. در این تحقیق رده‌ی خاصی از ماتریس‌های سه‌قطری متقارن که در بسیاری از مسائل کاربردی بروز می‌کنند و به صورت آشفتگی از ماتریس‌های توپلیتز دیده می‌شوند، معرفی می‌گردد.

یافتن ناحیه‌ای شامل مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس موضوع جالبی است که خیلی از دانشمندان به آن پرداخته‌اند. گرشگورین[۳] با ارائه‌ی دیسک‌های خاصی این ناحیه را مشخص کرده است. بعد از گرشگورین، استروسکی[۴] و برآور[۵] با تعمیم کار او ناحیه‌ی خاصی را ارائه داده‌اند. در این تحقیق کران‌هایی برای کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه‌ی رده‌ی خاصی از ماتریس‌های سه‌قطری متقارن ارائه می‌شود که نسبت به کران‌های بدست آمده در تحقیقات پیشین خیلی بهتر است. این مطلب با ارائه‌ی مثال عددی نشان داده می‌شود. در ادامه با استفاده از کران پایین بدست آمده برای مقادیر ویژه، کران پایینی برای کوچکترین مقدار تکین ماتریس‌های نامتقارن خاصی ارائه می‌شود که در مقایسه با کران‌های پایین ارائه شده در تحقیقات پیشین دقیق‌تر است.

این تحقیق شامل ۴ فصل می‌باشد.

در فصل ۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ارائه می‌شود که آشنایی با این مفاهیم برای درک مطالب فصل‌های بعد ضروری می‌باشد.

فصل ۲ به معرفی بعضی از نتایجی می‌پردازد که ناحیه‌ای شامل مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس را مشخص می‌کنند. ابتدا ناحیه‌ی شامل مقادیر ویژه با استفاده از قضیه گرشگورین بیان می‌شود و با استفاده از آن نتایجی در مورد بعضی از ماتریس‌های خاص ارائه می‌گردد. سپس به بیان قضیه استروسکی و برآور، که تعمیمی از قضیه گرشگورین می‌باشند، می‌پردازد.

در فصل ۳ رده‌ی خاصی از ماتریس‌های سه‌قطری متقارن، که به صورت آشفتگی از ماتریس‌های توپلیتز دیده می‌شوند، معرفی می‌گردد و با استفاده از درایه‌های ماتریس داده شده، کران‌های دقیقی برای مقادیر ویژه‌ی اکسترمال این رده از ماتریس‌ها ارائه می‌شود که در مقایسه با نتایج پیشین بهتر می‌باشند. سرانجام با بیان یک مثال عددی، دقیق بودن این کران‌ها نشان داده می‌شود.

فصل ۴ معادله دیفرانسیل جزیی را ارائه می‌دهد که در بسیاری از مسائل کاربردی بروز می‌کند. حل عددی این معادله منجر به حل یک دستگاه خطی می‌شود. در این فصل کران پایینی برای کوچکترین مقدار تکین ماتریس ضرایب این دستگاه خطی ارائه می‌شود. در ادامه مقایسه‌ای بین کران پایین بدست آمده در این تحقیق و کران‌های پایین ارائه شده در تحقیقات پیشین انجام می‌شود.

---

[۳] Gershgorin
[۴] Ostrowski
[۵] Brauer

فصل ۱
مفاهیم و پیش‌نیازها

.

۱.۱ ماتریس‌ها

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ با $\mathbb{R}^{m\times n}$، مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n با $\mathbb{R}^{n\times n}$ و مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m \times n$ تحت میدان F با $M_{m,n}(F)$ نشان داده می‌شود و معمولاً اگر $m = n$، آن‌گاه $M_{n,n}(F)$ را با $M_n(F)$ نشان می‌دهند. برای سادگی $M_{m,n}(\mathbb{C})$ و $M_n(\mathbb{C})$ که در آن $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط می‌باشد را به ترتیب با $M_{m,n}$ و M_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$. در این صورت:

(۱) ترانهاده‌ی A را با $A^T \in M_{n,m}$ نشان داده و به صورت

$$A^T = [a_{ji}],$$

تعریف می‌شود.

(۲) مزدوج A را با $\overline{A} \in M_{m,n}$ نشان داده و به صورت

$$\overline{A} = [\overline{a}_{ij}],$$

تعریف می‌شود.

(۳) ترانهاده‌ی مزدوج A را با $A^* \in M_{n,m}$ نشان داده و به صورت

$$A^* = \overline{A}^T = [\overline{a}_{ji}],$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_n$. در این صورت:

(۱) A هرمیتی نامیده می‌شود هرگاه برای هر i و j، $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$، یعنی

$$A^* = A.$$

(۲) A منفرد نامیده می‌شود، هرگاه $\det A = ۰$. در غیر این صورت آن را نامنفرد نامند.

(۳) ماتریسی که از حذف سطرها و ستون‌های یکسان از A بدست می‌آید، یک زیرماتریس اصلی A نامیده می‌شود. زیرماتریس اصلی

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k۱} & a_{k۲} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = ۱, ۲, \dots, n,$$

زیرماتریس اصلی پیشرو مرتبه‌ی k از A است.

(۴) قسمت هرمیتی A را با A^s نشان داده و به صورت

$$A^s = \frac{۱}{۲}(A + A^*),$$

تعریف می‌شود.

(۵) A پایین (بالا) مثلثی نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{ij} = ۰, \quad i \leq j \quad (a_{ij} = ۰, \quad i \geq j)$$

(۶) A معین مثبت (نیمه معین مثبت) نامیده می‌شود، هرگاه

(الف) $A = A^*$، یعنی A هرمیتی باشد.

(ب) برای هر $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$، $x^*Ax > ۰$ $(x^*Ax \geq ۰)$.

(۷) A وارون‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه ماتریسی مانند B موجود باشد به طوری که

$$AB = BA = I,$$

که $I = I_n$ ماتریس همانی $n \times n$ است. در این صورت B را وارون A نامیده و با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهند.

(۸) A یکانی است هرگاه $A^*A = I_n$، یعنی

$$A^* = A^{-۱}.$$

(۹) A متقارن نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = ۱, ۲, \dots, n.$$

(۱۰) A قطری نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

و با $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \operatorname{diag}(a_{ii})$ نشان داده می‌شود.

(۱۱) A سه‌قطری نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{ij} = 0, \quad |i - j| > 1.$$

(۱۲) A توپلیتز نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{ij} = a_{i+1,j+1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

یعنی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & a_{12} & \ddots & & \vdots \\ a_{31} & a_{21} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & & \ddots & a_{21} & a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

با توجه به قسمت (۴) تعریف ۲.۱.۱، در حالتی که $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، A^s قسمت متقارن A نامیده می‌شود و به صورت

$$A^s = \frac{1}{2}(A + A^T),$$

تعریف می‌گردد.

مثال ۳.۱.۱. ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید. A یک ماتریس توپلیتز و B یک ماتریس توپلیتز سه‌قطری متقارن می‌باشد.

مثال ۴.۱.۱. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید. زیرماتریس‌های اصلی پیشرو مرتبه‌ی ۲ و مرتبه‌ی ۳ از A به ترتیب به صورت

$$A_۲ = \begin{bmatrix} ۷ & -۳ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}, \quad A_۳ = \begin{bmatrix} ۷ & -۳ & ۲ \\ ۳ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix},$$

هستند.

تبصره ۵.۱.۱. *اگر $A \in M_n$، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند* [۱۲].

(۱) A *نامنفرد است.*

(۲) A *وارون‌پذیر است.*

(۳) $\det(A) \neq ۰$.

قضیه ۶.۱.۱. *دستگاه خطی همگن $Ax = 0$ فقط دارای جواب بدیهی $x = 0$ است، اگر و تنها اگر A وارون‌پذیر باشد.*

برهان. به [۳] رجوع شود. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت A معین مثبت (نیمه معین مثبت) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$،

$$x^T Ax > ۰ \ (x^T Ax \geq ۰).$$

تعریف ۸.۱.۱. ماتریس‌های مربعی A و B را متشابه نامند هرگاه ماتریس نامنفرد S موجود باشد به طوری که

$$B = S^{-۱}AS.$$

مثال ۹.۱.۱. ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} -۹ & ۴ & ۴ \\ -۸ & ۳ & ۴ \\ -۱۶ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix},$$

متشابه هستند، زیرا

$$B = S^{-۱}AS,$$

که در آن

$$S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}, \quad S^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ ۲ & -۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که از تعویض سطرهای (یا ستون‌های) ماتریس همانی بدست می آید، ماتریس جایگشت[1] نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت P از چپ (راست) در ماتریس A باعث تعویض سطرهای (ستون‌های) آن می‌شود. اگر P یک ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه $P^TP = I$.

مثال ۱۱.۱.۱. ماتریس A و ماتریس جایگشت P را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید. در این صورت

$$AP = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}, \quad PA = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n$ قطر غالب (سطری) نامیده می‌شود، هرگاه

$$\sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

اگر برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، نامساوی به طور اکید برقرار باشد، آن‌گاه A قطر غالب (سطری) اکید نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n$ قطر غالب ستونی نامیده می‌شود، هرگاه

$$\sum_{\substack{i=۱\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{jj}|, \quad j = ۱, ۲, \ldots, n.$$

اگر برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, n$، نامساوی به طور اکید برقرار باشد، آن‌گاه A قطرغالب ستونی اکید نامیده می‌شود.

مثال ۱۴.۱.۱. ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} -۵ & ۱ & ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۸ & -۱ & ۵ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ & ۱ & ۱۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۸ & -۱ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ & -۵ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۶ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید. واضح است که A قطر غالب (سطری) و قطر غالب ستونی و B قطر غالب (سطری) اکید و قطر غالب ستونی اکید می‌باشد.

---
[1] Permutation Matrix

تعریف ۱۵.۱.۱. یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ تابعی است مانند $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$ یک عدد حقیقی $\|x\|$ با خواص زیر نسبت می‌دهد.

(۱) برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$، $\|x\| > 0$،

(۲) برای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

(۳) برای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

از خواص (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.
فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$. برخی از نرم‌های برداری معروف تعریف شده بر $\mathbb{C}^n$ عبارتند از:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{(نرم-۱)}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{(نرم اقلیدسی یا نرم-۲)}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|. \quad \text{(نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم)}$$

تعریف ۱۶.۱.۱. یک نرم ماتریسی روی $M_{m,n}$ یک تابع حقیقی مانند $\|\cdot\| : M_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ است که بر این مجموعه تعریف شده است و در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱) برای هر ماتریس ناصفر $A \in M_{m,n}$ ، $\|A\| > 0$،

(۲) برای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر ماتریس $A \in M_{m,n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$،

(۳) برای هر $A, B \in M_{m,n}$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

از خواص (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$.
نرم برداری $\|x\|$ برای $x \in \mathbb{C}^n$ را در نظر بگیرید. یک نرم ماتریسی برای ماتریس‌های مختلط مربعی مرتبه‌ی n مانند A با این نرم متناظر می‌شود که آن را نرم طبیعی حاصل از نرم برداری $\|x\|$ یا نرم فرعی حاصل از نرم برداری $\|x\|$ می‌نامند و به صورت

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

یا به طور معادل

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

تعریف می‌شود.

هر نرم ماتریسی طبیعی دارای خواص زیر است [۱۲].

(۱) برای هر $A \in M_n$، $\|A\| \geq 0$ و $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$،

(۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر $A \in M_n$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$،

(۳) برای هر $A, B \in M_n$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$،

(۴) هر نرم ماتریسی طبیعی $\|A\|$ با نرم برداری $\|x\|$ که در تعریف آن به‌کاررفته است، سازگار است، یعنی

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

(۵) هر نرم طبیعی دارای خاصیت زیرضربی است، یعنی برای هر $A, B \in M_n$،

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

(۶) برای هر نرم ماتریسی طبیعی مانند $\|\cdot\|$، داریم

$$\|I\| = ۱.$$

گزاره‌ی زیر یک راه عملی برای محاسبه‌ی نرم‌های ماتریسی طبیعی $\|A\|_۱$ و $\|A\|_\infty$ برای هر ماتریس $A \in M_n$ ارائه می‌دهد.

گزاره ۱۷.۱.۱. *احکام زیر برقرارند.*

(۱) *نرم ماتریسی حاصل از نرم برداری، نرم-۱ برابر است با*

$$\|A\|_۱ = \max_{j=۱,۲,\ldots,n} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ij}|.$$

(۲) *نرم ماتریسی حاصل از نرم برداری بی‌نهایت برابر است با*

$$\|A\|_\infty = \max_{i=۱,۲,\ldots,n} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|.$$

برهان. به [۱۲] رجوع شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر $A \in M_{m,n}$ و $B \in M_{p,q}$، آن‌گاه ضرب کرونکر $A \otimes B$ یک ماتریس بلوکی $mp \times nq$ به صورت

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & \cdots & a_{۱n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

می‌باشد.

مثال ۱۹.۱.۱. ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۰ & ۱۰ \\ ۶ & ۷ & ۱۲ & ۱۴ \\ ۰ & ۱۵ & ۰ & ۲۰ \\ ۱۸ & ۲۱ & ۲۴ & ۲۸ \end{bmatrix}.$$

نتیجه‌ی زیر ارتباطی بین ضرب معمولی و ضرب کرونکر ماتریس‌ها را ارائه می‌دهد.

لم ۲۰.۱.۱. *فرض کنید $A \in M_{m,n}$، $B \in M_{p,q}$، $C \in M_{n,k}$ و $D \in M_{q,r}$. در این صورت*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

برهان. فرض کنید $A = [a_{ih}]$ و $C = [c_{hj}]$. در این صورت بلوک (i,j) ماتریس $(A \otimes B)(C \otimes D)$ به صورت

$$\sum_{h=۱}^{n} a_{ih} B c_{hj} D = \left[\sum_{h=۱}^{n} a_{ih} c_{hj}\right] BD,$$

می‌باشد که با حاصل‌ضرب درایه (i,j)ام ماتریس AC در ماتریس BD برابر است که همان بلوک (i,j) ماتریس $AC \otimes BD$ می‌باشد. □

تبصره ۲۱.۱.۱. *فرض کنید $A \in M_n$، $B \in M_m$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. با توجه به تعریف ضرب کرونکر به راحتی می‌توان بررسی نمود که*

(۱) $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$.

(۲) $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

(۳) *اگر A و B یکانی باشند، آن‌گاه $A \otimes B$ یکانی است.*

گزاره ۲۲.۱.۱. *(نامساوی هولدر[۲]) فرض کنید $p,q \in (۱,\infty)$ به طوری که*

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱.$$

در این صورت به ازای هر دو بردار $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T$ و $y = (y_۱, y_۲, \ldots, y_n)^T$ در $\mathbb{C}^n$، داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}}.$$

برهان. به [۱۲] رجوع شود. □

[۲] Holder's Inequality

۲.۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس یکی از مباحث اصلی در جبر خطی می‌باشند و کاربردهای زیادی در مسائل علمی مختلف دارند. در این بخش چند تعریف و قضیه‌ی مهم در رابطه با آن‌ها بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $A \in M_n$. اسکالر λ یک مقدار ویژه‌ی A نامیده می‌شود، هرگاه بردار غیر صفری مانند x موجود باشد به طوری که $Ax = \lambda x$، یا به طور معادل

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

چنین برداری را بردار ویژه‌ی (راست) A متناظر با مقدار ویژه‌ی λ می‌نامند.

بردار ویژه‌ی چپ متناظر با مقدار ویژه‌ی λ، بردار غیر صفر y است به طوری که

$$y^T A = \lambda y^T.$$

دستگاه خطی $(A - \mu I)x = 0$ دارای جواب غیر بدیهی است اگر و تنها اگر

$$\det(A - \mu I) = \circ.$$

واضح است که

$$\varphi(\mu) = \det(A - \mu I),$$

یک چندجمله‌ای درجه‌ی n بر حسب μ می‌باشد که چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود. ریشه‌های این چند جمله‌ای مقادیر ویژه‌ی A هستند. اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_k ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشند، آن‌گاه می‌توان $\varphi(\mu)$ را به صورت

$$\varphi(\mu) = (-۱)^n (\mu - \lambda_۱)^{\sigma_۱} (\mu - \lambda_۲)^{\sigma_۲} \cdots (\mu - \lambda_k)^{\sigma_k},$$

نمایش داد. عدد صحیح σ_i که با $\sigma(\lambda_i) = \sigma_i$ نشان داده می‌شود، مرتبه‌ی تکرار جبری[۳] مقدار ویژه‌ی λ_i نامیده می‌شود. مقدار ویژه‌ی λ از ماتریس A یک مقدار ویژه‌ی ساده نامیده می‌شود، هرگاه مرتبه‌ی تکرار جبری آن برابر با ۱ باشد[۱۲].

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $A \in M_n$ و λ_i، $i = ۱, ۲ \ldots, n$، مقادیر ویژه‌ی A باشند. در این صورت:

(۱) شعاع طیفی A را با $\rho(A)$ نمایش داده و به صورت

$$\rho(A) = \max_{i=۱,۲,\ldots,n} |\lambda_i|,$$

تعریف می‌شود.

---

[۳] Algebraic Multiplicity