بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان:

مدل‌های ریاضی جمعیت زنبورهای عسل

نگارش:

محمد قاسم سلمانی

استاد راهنما:

دکتر رضا معمار باشی

استاد مشاور:

دکتر علی غفّاری

اسفند ۱۳۹۲

تقدیم به:

روح پدر بهتر از جانم

آن فرشته خوی نیک آئینی که گلچین فلک

مهلتش نداد تا هیچ یک از مقاطع تحصیلی ام را

نظاره گر باشد.

تقدیم به:

روح پر فتوح مادرم

آن که یک حرف و دو حرف بر زبانم

الفاظ نهاد و گفتن آموخت.

قدردانی

« من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق »

اکنون که با استعانت از خداوند متعال، این پایان نامه را به پایان رسانیده ام، وظیفه خود میدانم از کلیه کسانی که در این تحقیق مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم.
در این راستا مراتب سپاس و تشکر فراوان خود را تقدیم میکنم به:

- ☐ ریاست محترم دانشگاه سمنان جناب آقای دکتر خیرالدین
- ☐ ریاست محترم دانشکده علوم پایه جناب آقای دکتر محمدرضا صافی
- ☐ بخصوص استاد ارجمندم جناب آقای دکتر **رضا معمارباشی** که با راهنمایی های ارزشمند خود در انجام این تحقیق یاورم بودند.
- ☐ استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی غفّاری که اوقات با ارزش خود را صرف هدایت این پایان نامه نمودند.
- ☐ اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر محمود بیدخام، جناب آقای دکتر مجید اسحاقی، جناب آقای دکتر فریدون حبیبیان، جناب آقای دکتر مسعود ذوالفقاری، جناب آقای دکتر مهدی علی اکبری، سرکار خانم دکتر راضیه محجوب و اساتید محترم دیگر در طول دوره تحصیلی در این دانشگاه.

چکیده

در این پایان نامه چند مدل جمعیتی زنبور های عسل را مورد مطالعه و بررسی قرار می دهیم ابتدا هر مدل را به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان می کنیم سپس نقاط ساکن و پایداری نقطه ساکن را تجزیه و تحلیل می کنیم.

نقاط تعادل را برای هر مدل بدست آورده و در مورد پایداری مجانبی و فراگیر بودن این نقاط بحث می کنیم.

در پایان، مدل کمّی از پویایی جمعیت کلنی و مدل سازی پویایی جمعیت و غذا را در کلنی های زنبور عسل مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی:

بی نظمی و فروپاشی کلنی $CCD = Colony\ Collapse\ Disorder$

ویروس فلج حاد زنبور عسل $ABPV = Acute\ Bee\ Paralysis\ Virus$

ویروس تغییر شکل بال $DWV = Deformed\ Wing\ Virus$

میانگین سن فعالیت زنبور عسل صحرایی $AAOF = Average\ Age\ of\ Onset\ of\ Foraging$

ویروس زنبور عسل کشمیر $KBV = Kashmir\ Bee\ Virus$

فهرست مطالب

پیشگفتار

در داخل هر کندو ۳ نوع زنبور زندگی می کند.

۱-زنبور ملکه ۲- زنبور نر ۳- زنبور کارگر

ملکه به عنوان عنصر منحصر به فرد در داخل کندو ۵ الی ۷ سال تخم گذاری می کند، ولی قدرت کارآیی مفید آن تا ۲ سال اول است. در فصل بهار روزانه ۱۵۰۰ الی ۲۰۰۰ تخم می گذارد و از اواسط مرداد که گل ها رو به رکود هستند تخم گذاری ملکه کم می شود، در پائیز به ۵۰۰ تخم در روز و در زمستان تخم گذاری به صفر می رسد. تخم گذاری ملکه ارتباط مستقیم به گرده گل و شهد آن و دمای محیط دارد و دوره دگردیسی ملکه ۱۶ روز است.

دسته دوم زنبوران نر هستند که به مدت ۴ ماه زندگی می کنند، از اواسط فروردین تا اواسط مرداد ماه فصل شکوفایی گرده گل و شهد، زنده هستند از اواسط مرداد همه آن ها به دلیل کمبود گرده گل توسط زنبوران کارگر به بیرون انداخته می شوند و از گرسنگی می میرند دوره دگردیسی آن ها ۲۴ روز است و وظیفه آن ها جفت گیری با ملکه است.

دسته سوم زنبوران کارگر هستند که دوره دگردیسی آن ها ۲۱ روز است. اگر در بهار متولد شوند چند هفته یا حداکثر ۲ ماه زنده هستند، ولی اگر در پائیز متولد شوند به علت رکود گل و خواب زمستانی به مدت ۸ ماه زندگی می کنند. به مدت ۳ هفته طول می کشد تا بالغ شوند. هفته اول زندگی، ژله ساز هستند که غذای ملکه را تامین می کنند. هفته دوم موم سازند و به کار ساختمانی کندو می پردازند هفته سوم پرستارند و به غذادهی تخم و لارو و حرارت دادن شفیره می پردازند و گرمای کندو را حفظ می کنند و سرانجام کار به عنوان زنبوران عسل صحرایی عسل جو تبدیل می شوند.

اهمیت زنبور داری فقط در تولید عسل نیست بلکه بیشتر به خاطر عمل گرده افشانی روی گل ها می باشد. گرده افشانی به وسیله عوامل طبیعی مانند باد انجام می گیرد ولی زنبور عسل این کار را بهتر از باد انجام می دهد.

کنه واروآ مهمترین آفت زنبورداری در سال های اخیر بوده است که بیشتر زنبورستان های جهان را دچار خسارت های بزرگ اقتصادی و بسیاری از آن ها را تعطیل کرده است. کنه واروآ انگلی است کوچک که درازای آن ۱.۱ میلیمتر و پهنای شکم آن در حدود ۱.۶ میلیمتر است. جنس ماده آن که عمر طولانی

تری دارد و در نتیجه خطر بیشتری را هم متوجه زنبورداری می کند به رنگ قهوه‌ای است. این کنه ۴ جفت پا دارد. بدنش از کرک های ریزی پوشیده شده است که با کرک های بدن زنبور درهم می آمیزد و سبب استقرار بهتر آن بر روی بدن زنبور عسل می شود. کنه واروآ خون زنبور عسل را می مکد و باعث ضعف، کوتاهی عمر یا نابودی آن می شود.

تخم های ملکه طی سه روز به حالت تخم، سه روز بعد لارو جوان و ۵ روز بعد لارو مسن و بعد از آن تبدیل به شفیره می شود که توسط زنبوران کارگر درب سلول شفیره بسته می شود، کنه واروآ که برای تولید مثل خود نیازمند به گاز CO_2 زیاد است از همین فرصت استفاده می کند و ساعاتی قبل از بسته شدن درب سلول های شفیره وارد حجره می شود. روی بدن شفیرها تخم ریز می کند. ۶ تخم می گذارد که اولی به رنگ سفید کنه نر است ولی ۵تای دیگر به رنگ قهوه‌ای کنه ماده تولید می شود. (توضیح این که گاز CO_2 در سلول های دربسته شفیره بیشتر از جاهای دیگر کندو یافت می شود.)

تخم های کنه بعد از دو روز تبدیل به کنه نوزاد می شوند و با حمله به شفیره از خون آن تغذیه می کنند. کنه واروآ دو شیوه زندگی دارد. یک شیوه آن در فصل بهار است فقط از غذاهای لارو که توسط زنبوران پرستار داخل حجره ریخته می شود استفاده می کنند و زنبورهای عسل برای آن ها به عنوان میزبان تلقی می شوند. شیوه دوم زندگی آن در فصل پائیز است که چون فصل رکود گل است و تخم گذاری ملکه کم می شود و به همان نسبت لارو و شفیره کمتر یافت می شوند، کنه ها به زنبوران هجوم می آورند و از خون آن تغذیه می کنند.

کنه واروآ ۱۴ نوع ویروس تولید می کند که مهمترین آن ها ویروس فلج حاد زنبور عسل ($ABPV$) می باشد.

کنه واروآ تقریباً در ۱۰۸ سال پیش برای اولین بار در کشور اندونزی شناسایی شد ولی خسارت آن به زنبورداری از ۵۲ سال پیش مورد توجه قرار گرفته است. در طول این مدت کنه واروآ به تدریج کشورهایی را که در قرنطینه‌ی زنبورهای وارداتی، یا نقل و انتقالات خود توجه کافی نکرده‌اند و یا احتمالاً از طریق پرواز طبیعی زنبورها، آلوده کرده و خسارات سنگینی را به آن ها وارد کرده است.

زنبورداری نوین در کندوهای چوبی از حدود سال های ۱۳۴۰ به بعد در ایران شروع به رشد کرد از سال های ۱۳۵۵ تا ۱۳۶۲ زنبورداران از حرفه خود راضی بودند ولی از سال ۱۳۶۳ سال ورشکستگی تعداد زیادی از زنبورداران بود و در نهایت سال ۱۳۶۴ متاسفانه سال انهدام بسیاری از زنبورستان های کشور بود.

این پایان نامه شامل پنج فصل است.

- در فصل اول به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز که در فصول بعدی نقش بسزایی دارند پرداخته شده است.

- در فصل دوم به دینامیک جمعیتی زنبورها در مدل خوری، مایرسکف و بارون می پردازیم.

- در فصل سوم به بررسی مدل ریاضی برای دینامیک جمعیت در کلنی های زنبور عسل آلوده به کنه مخرب واروآ و ویروس فلج حاد زنبور عسل می پردازیم.

- در فصل چهارم به بررسی مدل کمّی از پویایی جمعیت کلنی زنبور عسل می پردازیم.

- و فصل پنجم مربوط به مدل سازی پویایی جمعیت و غذا در کلنی های زنبور عسل می باشد که به تجزیه و تحلیل مدل و انتخاب مقادیری برای پارامترهای مدل و نتایج آن می پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل و عبارت جواب

فرض کنید D یک مجموعه باز از R^{d+1} و $f : D \longrightarrow R^d$ یک تابع پیوسته باشد. یک نقطه R^{d+1} توسط (t, x) نشان داده خواهد شد که $t \in R$ و $x \in R^d$ می باشد که t به عنوان زمان و x به عنوان وضعیت در فضا در نظر گرفته می شود. معادله دیفرانسیل به صورت زیر می باشد.

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

معادله (۱.۱) دستگاهی از معادلات دیفرانسیل است، در حقیقت اگر

$$f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_d(t, x))$$

که f_i مقدار حقیقی توابع پیوسته هستند $\dot{x} = f(t, x)$ می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_d) \\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_d) \\
&\vdots \\
\dot{x}_d &= f_d(t, x_1, x_2, \dots, x_d)
\end{aligned}$$

تعریف ۱.۱.۱. دستگاه معادلات وابسته به زمان تابعی مشتق پذیر به صورت زیر است که بر بازه‌ای مانند

I تعریف شده است:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{bmatrix}$$

به طوری که برای هر $t \in I$:

$$\dot{x}\ (t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

یک دستگاه مستقل از زمان دستگاهی به صورت زیر می باشد.

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t))$$

مساله مقدار اولیه، مسئله‌ای به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}= f(t, x(t)) \\ x(\tau) = \psi \end{cases} \tag{۲.۱}$$

اگر f پیوسته باشد $x(t)$ مشتق پذیر پیوسته است.

جواب مسئله مقدار اولیه (۲.۱) جواب معادله انتگرالی زیر است:

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} f(s, x(s))ds$$

مدل رشد لجستیک

خیلی از مدل‌های رشد جمعیت به صورت معادله زیر می باشند:

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t)r(p(t))$$

یکی از مشهورترین و قدیمی ترین نمونه‌ها، مدل رشد لجستیک می باشد.

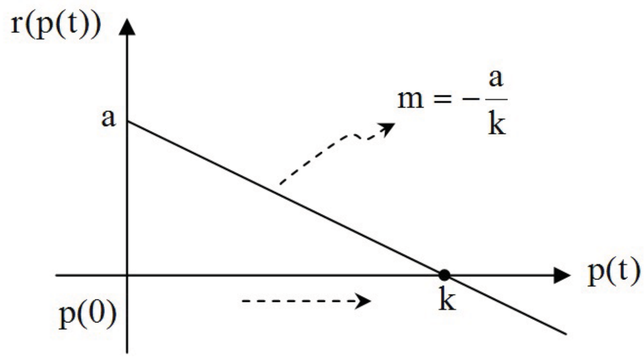
فرضیات مدل لجستیک[۱]

[۱] Logistic

۱- جمعیت یک ظرفیت حداکثر محیطی مانند K دارد.

۲- تا زمانی که جمعیت از K کمتر است نرخ رشد مثبت است اما هر چقدر به K نزدیک می شویم نرخ رشد کاهش می یابد.

۳- اگر جمعیت از K بیشتر شد، رشد منفی می شود.



فرض کنید $r(\text{۰}) = a > \text{۰}$ و a ماکزیمم مقدار ممکن $r(p)$ است.

$$r(p) = -\frac{a}{k}p + a = a(\text{۱} - \frac{p}{k})$$

با قرار دادن $r(p)$ در معادله بالا، به معادله دیفرانسیل لجستیک به صورت زیر می رسیم.

$$\frac{dp(t)}{dt} = a(\text{۱} - \frac{p(t)}{K})p(t)$$

قضیه ۲.۱.۱. (پئانو[۱]) اگر $f(t,x)$ روی مجموعه باز D پیوسته باشد، برای هر نقطه $(\tau,\xi) \in D$ مسئله مقدار اولیه (۲.۱) دارای حداقل یک جواب است.

اثبات. به قضیه ۱.۹ از [۱۳] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۳.۱.۱. تابع $f(t,x)$ را در D نسبت به x لیپشیتزی[۲] می نامیم اگر $L > \text{۰}$ موجود باشد که:

$$\forall (t,x),(t,y) \in D : |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$$

---

[۱] Peano

[۲] Lipschitz

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنید f در D نسبت به x لیپشیتزی باشد و $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ جواب هایی از $\dot{x}= f(t,x)$ بر D باشند و $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ بر بازه باز I تعریف شده باشند و $\tau \in I$ موجود باشد که $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$ در این صورت:

$$\forall t \in I; \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

اثبات. به قضیه ۱.۱۰ مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۱.۱. f را بر D لیپشیتزی موضعی[1] می نامند اگر هر نقطه $\tau \in D$ دارای یک همسایگی $\tau \in U \subset D$ باشد که f بر U لیپشیتزی است

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنید $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ دو جواب از معادله دیفرانسیل $\dot{x}= f(t,x)$ بر ناحیه D باشند و فرض کنید هر دو بر یک بازه I تعریف شده باشند. فرض کنید f لیپشیتزی موضعی باشد در این صورت اگر $\tau \in I$ موجود باشد به طوری که $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$ در این صورت

$$\forall t \in I \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

اثبات. به قضیه ۱.۱۱ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۷.۱.۱. اگر مشتقات جزئی مرتبه اول اجزای $f(t,x)$، نسبت به $x_1, \ldots, x_d$ موجود و روی D پیوسته باشند در این صورت f بر D لیپشیتزی موضعی است.

اثبات. به قضیه ۱.۱۲ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۸.۱.۱. تابع $f(t,x)$ لیپشیتزی موضعی بر D است اگر و تنها اگر f بر تمام زیر مجموعه های فشرده D لیپشیزی باشد.

اثبات. به قضیه ۱.۱۴ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۹.۱.۱. (پیکارد-لیندلف) فرض کنید f برD لیپشیتزی موضعی باشد و مساله ی مقدار اولیه را در نظر می گیریم:

$$\dot{x}= f(t,x)$$

$$\xi = x(\tau)$$

[1] Locally Lipschitz

$\alpha > 0$ موجود است به طوری که دنباله توابع

$$\varphi_0(t) = \xi$$

$$\varphi_m(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_{m-1}(s))ds$$

روی بازه $I = \{\tau - \alpha < t < \tau + \alpha\}$ تعریف شده است و دنباله $\{\varphi_m\}$ همگرای یکنواخت بر I به تنها جواب از این مساله ی مقدار اولیه است.

اثبات. به قضیه ۱.۲۴ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۱.۱۰. در معادله $\dot{x} = f(x)$ که بر Ω تعریف شده است، Ω را فضای فاز دستگاه می نامیم.

فضای فاز دستگاه (Ω) و جواب های گذرنده از نقاط Ω را تصویر فاز دستگاه می نامند.

تعریف ۱.۱.۱۱. (شار[۱])

مجموعه باز $\Omega \subseteq R^d$ را در نظر بگیرید. تابع $\Phi : R \times \Omega \longrightarrow \Omega$ با شرایط زیر را یک شار می نامند:

۱- Φ روی $R \times \Omega$ پیوسته است.

۲- برای هر $\xi \in \Omega$، $\Phi(0, \xi) = \xi$.

۳- برای هر $s, t \in R$ و $\xi \in \Omega$،

$$\Phi(t + s, \xi) = \Phi(t, \Phi(s, \xi)).$$

برای هر $\xi \in \Omega$ منحنی

$$\begin{cases} \Phi_\xi : R \longrightarrow \Omega \\ \Phi_\xi(t) = \Phi(t, \xi) \end{cases}$$

یک مسیر حرکت (منحنی) است با $\Phi_\xi(0) = \xi$ است.

[۱] Flow

مثال ۱۲.۱.۱.

$$\Phi(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_t^{1}(x) \\ \varphi_t^{2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^{x_1(e^{-t}-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi : R \times R^2 \longrightarrow R^2$$

$$\Phi(0,x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

$$\Phi\left(t,\varphi(s,x)\right) = \Phi\left(t, \begin{pmatrix} x_1 e^{-s} \\ x_2 e^{x_1(e^{-s}-1)} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 e^{-s}.e^{-t} \\ \left(x_2 e^{x_1(e^{-s}-1)}\right).e^{x_1 e^{-s}(e^{-t}-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 e^{-(t+s)} \\ x_2 e^{x_1(e^{-s}-1)}) + x_1(e^{-(s+t)} - e^{-s}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 e^{-(t+s)} \\ x_2 e^{x_1(e^{-(t+s)}-1)} \end{pmatrix} = \Phi(t+s,x)$$

نکته ۱۳.۱.۱. اگر $\Phi \in C^1(R \times \Omega)$ و قرار دهیم:

$$f(x) = \frac{d}{dt}\Phi(t,x)|_{t=0}$$

که میدان برداری وابسته به شار می باشد، در این صورت $\Phi(t,x_0)$ جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

است.

اثبات. $x(t) = \Phi(t,x_0)$ در نتیجه $x(0) = \Phi(0,x_0) = x_0$،

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}\ (t) = \lim_{s\to\circ} \frac{\Phi(t+s, x_\circ) - \Phi(t, x_\circ)}{s} \\
&\lim_{s\to\circ} = \frac{\Phi(s, \Phi(t, x_\circ)) - \Phi(\circ, \Phi(t, x_\circ))}{s} \\
&\lim_{s\longrightarrow\circ} = \frac{\Phi(s, x(t)) - \Phi(\circ, x(t))}{s} \\
&= \frac{d}{dt}\Phi(t, x(t))|_{t=\circ} = f(x(t)) \\
&\longrightarrow \dot{x}\ (t) = f(x(t))
\end{aligned}
$$

□

نکته ۱۴.۱.۱. اگر در معادله $\dot{x}= f(x)$ شرط لیپشیتزی موضعی برقرار باشد و تمام جواب ها بر R تعریف شده باشند در این صورت $\Phi(t,\xi) = x(t,\circ,\xi)$ یک شار است.

اثبات. به بخش ۲.۲ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

نکته ۱۵.۱.۱. اگر $f(x)$ لیپشیتزی موضعی بر Ω باشد و هر جواب $\dot{x}= f(x)$ روی R تعریف شده باشد، آنگاه

$$\Phi(t,\xi) = x(t,o,\xi) = x(t,\xi)$$

یک شار روی Ω می باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. زیر مجموعه $E \subseteq R^K$ تحت دستگاه

$$\begin{cases} \dot{x}= f(x) \\ x(\circ) = x_\circ \end{cases}$$

را پایا می نامیم اگر:

$$\forall x \in E \Longrightarrow \Phi(t,x) \in E, \forall t \in R$$

(جوابی با شروع از نقاط E همیشه در مجموعه E می ماند).

نکته ۱۷.۱.۱. هر زیر فضای ویژه تعمیم یافته وابسته به ماتریس A تحت A پایا است. یعنی

$$E = span\,\{W_j\} \longrightarrow \text{زیر فضای ویژه}$$

$$AE \subseteq E \longrightarrow A^n E \subseteq E \quad \forall n$$

۲.۱ نظریه پایداری

تعریف ۱.۲.۱. نقطه ساکن ξ از دستگاه $\frac{dx}{dt} = f(x)$ را پایدار می نامند اگر برای هر $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که:

$$if \quad ||x-\xi|| < \delta \Longrightarrow ||\Phi(t,x)-\xi|| < \epsilon; \forall t \geq 0$$

اگر دستگاه در ξ پایدار نباشد آن را ناپایدار می نامند. اگر $\gamma > 0$ ای موجود باشد که برای هر x با $||x-\xi|| < \gamma$ داشته باشیم

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \Phi(t,x) = \xi$$

در این صورت ξ را نقطه جاذب می نامند.
اگر $\gamma = \infty$ باشد ξ را جاذب سرتاسری می نامند.
اگر نقطه ξ پایدار و جاذب باشد آن را پایدار مجانبی می نامند.
اگر نقطه ξ پایدار و جاذب سرتاسری باشد آن را پایدار مجانبی سرتاسری می نامند.

قضیه ۲.۲.۱. معادله اسکالر $\frac{dx}{dt} = f(x)$ در نظر می گیریم که در آن f مشتق پذیر پیوسته است و فرض کنید x^* نقطه ساکن باشد در این صورت:

۱- اگر $f'(x^*) < 0$ باشد آنگاه نقطه x^* پایدار مجانبی است.

۲- اگر $f'(x^*) > 0$ باشد آنگاه نقطه x^* ناپایدار است.

اثبات. به مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

نکته ۳.۲.۱. در دستگاه خطی $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$ اگر تمام مقادیر ویژه A بخش حقیقی منفی داشته باشد:

$$\exists M > 0, C > 0; ||e^{At}x_0|| \leq Me^{-ct}||x_0|| \quad \forall t \geq 0$$

لذا مبدا در این دستگاه پایدار مجانبی است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم Ω_0 یک همسایگی باز از P باشد. یک تابع $V : \Omega_0 \longrightarrow R$ مثبت معین در P گفته می شود اگر:

(a) برای تمامی $x \in \Omega_0$،

$$V(x) \geq 0.$$

(b) $V(x)=0$ اگر و فقط اگر $x=P$ باشد.

قضیه ۱.۲.۵. (روش لیاپانوف[1])

فرض کنید Ω_0 یک همسایگی نقطه ساکن p از $\dot{x}=f(x)$ و $V:\Omega_0\longrightarrow R$ یک تابع با مشتقات جزیی مرتبه اول پیوسته بر Ω_0 باشد. اگر V مثبت معین در P و

$$\dot{V}(x)=\frac{d}{dt}V(\phi(t,x))\leq 0$$

بر Ω_0 باشد آنگاه P یک نقطه ثابت پایدار مثبت می باشد.

اگر علاوه بر این $\dot{V}$ منفی معین در P باشد، آنگاه P، یک نقطه ثابت پایدار مجانبی مثبت است.

اثبات. به قضیه ۵.۱ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید $V:\Omega_0\longrightarrow R$ یک تابع با مشتقات جزیی مرتبه اول پیوسته روی Ω_0 باشد. اگر یک مجموعه باز U مشمول در Ω_0 موجود باشد به طوری که:

۱) $p\in\partial U$

۲) $V(x)$ و $\dot{V}(x)$ روی U مثبت هستند

۳) $V(x)=0$ روی $\partial U\cap\Omega_0$

آنگاه p پایدار مثبت نیست.

اثبات. به قضیه ۵.۲ از مرجع [۱۳] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۲.۷. یک نقطه q در $w(\xi)$ است اگر دنباله ای از اعداد حقیقی $\{t_k\}$ موجود باشد به طوری که:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}t_k=\infty,\qquad \lim_{k\longrightarrow\infty}x(t_k,\xi)=q\in\Omega_0$$

قضیه ۱.۲.۸. اگر $q\in w(\xi)$ آنگاه روابط زیر برقرارند.

الف) هر نقطه روی جواب $x(t,q)$ نیز در $w(\xi)$ است.

ب) برای هر نقطه روی جواب $x(t,\xi)$، نقطه q در $w(x(t,\xi))$ است و $w(\xi)=w(x(t,\xi))$ برقرار است.

[1] Lyapunov's method