بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

(مؤسسه ریاضیات دکتر مصاحب)

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان:

بستار صحیح و Δ - بستار

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر حسین ذاکری

مؤلف:

حمیدرضا وهابی

شهریور ۱۳۷۹

تقدیم به

پدر فداکارم و مادر مهربانم

بسمه تعالی

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بستار صحیح و Δ- بستار

استاد راهنما : آقای دکتر حسین ذاکری

داور خارجی : آقای دکتر کامران دیوانی‌آذر

داور داخلی : آقای دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

دانشجو : آقای حمیدرضا وهابی

زمان : ساعت ۲ بعدازظهر روز سه‌شنبه مورخ ۷۹/۶/۲۹

مکان : دانشگاه تربیت معلم، دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر.

خلاصه:

مبحث ایده‌آل‌ها، یکی از مباحث مهم در جبر جابجایی می‌باشد که برای مطالعهٔ آنها روش‌های متعددی وجود دارد. یکی از این روش‌ها بررسی رفتار ایده‌آل‌های نزدیک به یک ایده‌آل مفروض می‌باشد. به همین دلیل در سالهای اخیر بستارهای گوناگونی برای ایده‌آل‌ها معرفی گردیده است که هر کدام سهم به‌سزایی در پیشرفت نظریهٔ ایده‌آل‌ها داشته‌اند. از جمله بستارهای مهم یک ایده‌آل می‌توان به بستار صحیح و Δ- بستار اشاره نمود.

در این پایان‌نامه مفهوم بستار صحیح ایده‌آل‌ها و حلقه‌ها را ذکر نموده و خواص اساسی آن را بیان می‌نماییم. همچنین خواص و کاربردهای Δ- بستار ایده‌آل‌ها و حلقه‌ها و جبرها را بیان می‌نماییم. در ضمن بستار صحیح و Δ- بستار ایده‌آل‌ها را مقایسه خواهیم نمود. در پایان رفتار مجانبی ایده‌آل‌های اول وابسته به I_Δ را بررسی می‌کنیم و نتایج مشابهی برای ایده‌آل‌های اول و وابسته به I_a به‌دست می‌آوریم.

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه آقای حمیدرضا وهابی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ محض تحت عنوان:

بستار صحیح و Δ- بستار

در روز سه‌شنبه مورخه ۷۹/۶/۲۹ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون نوزده تمام (۱۹/۰) می‌باشد.

۱- عالی ☒
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر حسین ذاکری	دکتر کامران دیوانی آذر	دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

«به نام حضرت دوست که هرچه هست از اوست»

ادب و دانش برترین میراث است. حضرت علی(ع)

خدا را سپاس می‌گویم که مرا توفیق داد تا قطره‌ای از دریای بیکران دانش برگیرم و توشه‌ای از ادب و معرفت اساتید بزرگوار کسب نمایم.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که از زحمات دلسوزانهٔ استاد محترم جناب آقای دکتر حسین ذاکری که در طول این دوره تحصیلی راهنما و مشوق اینجانب بوده‌اند صمیمانه تشکر نمایم.

همچنین از آقای دکتر کامران دیوانی آذر و آقای دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند سپاسگزارم.

از ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر آقای دکتر اسماعیل بابلیان و نیز از همهٔ کارکنان مؤسسه ریاضیات دکتر مصاحب بخاطر زحمات بی‌دریغشان تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مطالب

مقدمه

مبحث ایده‌آل‌ها، یکی از مباحث مهم در جبر جابجایی می‌باشد که برای مطالعه آنها روش‌های متعددی وجود دارد. یکی از این روش‌ها بررسی رفتار ایده‌آل‌های نزدیک به یک ایده‌آل مفروض می‌باشد. به همین دلیل در سالهای اخیر بستارهای گوناگونی برای ایده‌آل‌ها معرفی گردیده است که هر کدام سهم بسزایی در پیشرفت نظریه ایده‌آل‌ها داشته‌اند.

یکی از ابزارهای مهم برای شناخت این بستارها، مفهوم تقلیل ایده‌آل‌ها می‌باشد که برای اولین‌بار در [9] توسط D.G.Northcott و D.Rees معرفی گردید.

بستارهای متفاوت یک ایده‌آل هر یک به فاصلهٔ معینی از آن ایده‌آل قرار می‌گیرند و هر کدام از آنها بخشی از ویژگیهای ایده‌آل مفروض را روشن می‌سازند.

از جمله بستارهای مهم یک ایده‌آل می‌توان به بستار کیپ و بستار راتلیف ـ راش و Δ ـ بستار و بستار صحیح اشاره نمود که معمولاً با همین ترتیب نسبت به ایده‌آل مفروض قرار می‌گیرند. البته Δ ـ بستار از آن جهت که می‌توان با تغییر مجموعهٔ Δ، فاصلهٔ آن را با ایده‌آل مفروض تغییر داد، دارای اهمیت بیشتری می‌باشد.

هدف از این مقاله بررسی خواص و کاربردهای Δـبستار ایده‌آل‌ها و حلقه‌ها و جبرها می‌باشد که در [13] توسط L.J. Ratliff بیان شده است. در ضمن در این پایان‌نامه بستار صحیح و Δ ـ بستار ایده‌آل‌ها را نیز مقایسه خواهیم نمود.

لازم به ذکر است که تعمیم مفهوم Δـ بستار برای مدول‌ها در [14] توسط D.Rush بیان شده

است.

این پایان‌نامه در هشت فصل تهیه شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز را بیان خواهیم نمود.

در فصل دوم مفهوم تقلیل ایده‌الها را بیان نموده و برخی از خواص آن را ثابت می‌کنیم . همچنین نشان می‌دهیم که در حلقه‌های موضعی و نوتری، هر ایده‌ال دارای حداقل یک تقلیل مینیمال می‌باشد.

در فصل سوم عمل بستار و عمل نیمه اول و عمل اول را روی مجموعهٔ ایده‌ال‌های حلقهٔ R تعریف می‌کنیم و مفهوم بستار صحیح ایده‌الها و حلقه‌ها را ذکر می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که حلقهٔ R بطور صحیح بسته است اگر و فقط اگر عمل بستار صحیح یک عمل اول روی مجموعهٔ ایده‌ال‌های حلقهٔ R باشد. از قضایای این فصل برای مقایسهٔ بین بستار صحیح و Δـ بستار استفاده خواهیم نمود.

در فصل چهارم Δـ بستار یک ایده‌ال را تعریف نموده و نشان می‌دهیم که عمل Δـ بستار یک عمل نیمه اول است. قضایایی نیز در مورد Δ ـ بستار ایده‌ال‌ها ثابت می‌کنیم که در فصول بعدی از آنها استفاده خواهیم نمود. در پایان رابطهٔ بین Δ ـ بستار ایده‌ال I از حلقهٔ R و Δ ـ بستار توسیع ایده‌ال I در Rـ جبر B را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل پنجم رابطهٔ بین بستار صحیح و Δ ـ بستار یک ایده‌ال را بدست می‌آوریم. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که معمولاً Δـ بستار مشمول در بستار صحیح است و برای اغلب ایده‌ال‌ها نیز تساوی بدست می‌آید. در ادامه محکی برای شناخت حلقه‌هایی که بطور صحیح بسته‌اند بدست می‌آوریم و در حوزهٔ صحیح R، ایده‌ال‌هایی را که بطور صحیح بسته هستند مشخص می‌کنیم.

در فصل ششم Δـ بستار یک حلقه را تعریف نموده و ساختمان آن را معین می‌کنیم. نشان می‌دهیم که حلقهٔ R، Δـ بسته است اگر و فقط اگر عمل Δـ بستار یک عمل اول روی مجموعهٔ ایده‌ال‌های حلقهٔ R باشد. همچنین R^{Δ} را به عنوان بزرگترین حلقهٔ بین R و T که دارای خاصیت معینی است، مشخص می‌نماییم. در ادامه قضایایی را در مورد رابطهٔ بین بستار صحیح و Δ ـ بستار

حلقهٔ R ثابت می‌کنیم.

در فصل هفتم قضایایی در مورد Δـبستار یک Rـ جبر در حالت کلی و در حالت‌های خاصی مانند Rـجبر یکدست صادق و $R[X]$ و $S^{-1}R$ بیان می‌کنیم. همچنین R^{Δ} را به عنوان کوچکترین حلقهٔ بین R و T که دارای خاصیت معینی است، مشخص می‌نماییم.

در فصل هشتم رفتار مجانبی ایده‌الهای اول وابسته به I_{Δ} را بررسی می‌کنیم و نتایج مشابهی برای ایده‌ال‌های اول وابسته به I_a بدست می‌آوریم.

مراجعی را که برای بیان تعاریف و قضایای فصل اول از آنها استفاده نموده‌ایم به موقع در جای مناسب ذکر کرده‌ایم. مطالب مربوط به تقلیل ایده‌ال‌ها در فصل دوم از [9] آورده شده است.

اغلب مطالب سایر فصل‌ها براساس مقاله [13] گردآوری شده است و در برخی موارد از منابع دیگری استفاده نموده‌ایم که در جای خود نام آنها را نیز ذکر کرده‌ایم.

حال اشاره‌ای به نمادگذاری بکار رفته در این پایان‌نامه می‌نامیم.

R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

ایده‌ال‌های R را با $I, J, K, \ldots$ نشان می‌دهیم و در صورتیکه R حلقه‌ای موضعی باشد، ایده‌ال ماکزیمال R را با M نشان می‌دهیم.

در سراسر پایان‌نامه Δ یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی دلخواه (ولی ثابت) از ایده‌ال‌های ناصفر و با تولید متناهی R است. گاهی شرایط خاصی را برای Δ در نظر می‌گیریم.

همچنین نماد Λ برای نمایش مجموعهٔ ایده‌ال‌هایی با تولید متناهی R که مشمول در هیچ ایده‌ال اول مینیمالی نیستند، بکار می‌رود. واضح است که Λ نیز یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی از ایده‌ال‌های ناصفر و با تولید متناهی R است.

بستار صحیح ایده‌ال I را با نماد I_a و Δـبستار ایده‌ال I را با نماد I_{Δ} نشان میدهیم. بستار صحیح حلقهٔ R را با نماد R' و Δ ـ بستار حلقهٔ R را با نماد R^{Δ} نشان می‌دهیم. حلقهٔ خارج قسمتی کلی R را نیز با نماد T نشان می‌دهیم.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز را بیان خواهیم نمود.

۱-۱ تعریف. عضو $x \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر می‌نامیم، در صورتیکه $0 \neq y \in R$ وجود داشته باشد بطوری که $xy = 0$.

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر R را با نماد $Z(R)$ نشان میدهیم.

۱-۲ قضیه. هر ایده‌ال اول مینیمال R مشمول در $Z(R)$ است.

برهان. [3.Theorem 84]

۱-۳ تعریف. عضو $x \in R$ را منظم می‌نامیم، در صورتیکه مقسوم‌علیه صفر نباشد.

ایده‌ال I را یک ایده‌ال منظم می‌نامیم، در صورتیکه شامل یک عضو منظم باشد.

ایده‌ال تولید شده توسط زیر مجموعهٔ H از R را با نماد HR نشان می‌دهیم.

ایده‌ال تولید شده توسط عضو $b \in R$ را با نماد bR نشان می‌دهیم و آن را یک ایده‌ال اصلی از R می‌نامیم.

واضح است که حاصل‌ضرب متناهی از ایده‌ال‌های اصلی منظم، یک ایده‌ال اصلی منظم است.

۱-۴ تعریف. عضو $x \in R$ را پوچتوان می‌نامیم، در صورتیکه عدد طبیعی مانند n موجود باشد بطوریکه $x^n = 0$.

واضح است که هر عضو پوچتوان، یک مقسوم‌علیه صفر است.

ایده‌ال I از R را پوچتوان می‌نامیم، در صورتیکه عدد طبیعی مانند n موجود باشد بطوریکه $I^n = 0$.

۱-۵ تعریف. مجموعهٔ متشکل از اعضای پوچتوان R را رادیکال پوچ R می‌نامیم و با نماد $\sqrt{0}$ نمایش می‌دهیم. به آسانی می‌توان دید که رادیکال پوچ R مساوی اشتراک ایده‌ال‌های اول مینیمال R است.

۱-۶ تعریف. فرض کنید I یک ایده‌ال از R باشد. مجموعهٔ

$$\{x \in R; \text{برای برخی عدد طبیعی } n\ x^n \in I\}$$

را رادیکال ایده‌ال I می‌نامیم و با نماد $\sqrt{I}$ نمایش می‌دهیم. به آسانی می‌توان دید که رادیکال I مساوی اشتراک ایده‌الهای اول مینیمال I است.

۱-۷ قضیه. فرض کنید I یک ایده‌ال از R باشد. اگر I مشمول در اجتماع تعداد متناهی از ایده‌ال‌های اول R باشد، آنگاه مشمول در یکی از آنها است.

برهان. [15,3.61]

۱-۸ تعریف. مجموعهٔ D از ایده‌الهای حلقهٔ R را یک مجموعهٔ جهت‌دار می‌نامیم، در صورتیکه برای هر $I, J \in D$ ایده‌الی مانند $K \in D$ وجود داشته باشد بطوریکه $I \subseteq K$ و $J \subseteq K$.

واضح است که اگر D یک مجموعهٔ جهت‌دار باشد، آنگاه $\sum_{I \in D} I = \bigcup_{I \in D}$.

۱-۹ قضیه. فرض کنید N یک R_مدول باشد و I یک ایده‌ال از R باشد.

در اینصورت اگر $I \subseteq \mathrm{Ann}(N)$، آنگاه N دارای ساختار $\frac{R}{I}$- مدولی است.

برهان. [15,6.19]

۱-۱۰ قضیه. فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی و نوتری با ایده‌ال ماکزیمال M باشد. در اینصورت $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$.

برهان. [15,8.27]

۱-۱۱ نتیجه. فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی و نوتری با ایده‌ال ماکزیمال M باشد و I یک ایده‌ال از R باشد. در اینصورت $\bigcap_{n=1}^{\infty} (I + M^n) = I$.

۱-۱۲ قضیه. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(i) V یک فضای برداری با بعد متناهی روی F است.

(ii) Vیک فضای برداری نوتری روی F است.

(iii) V یک فضای برداری آرتینی روی F است.

برهان. [15,7.12]

۱-۱۳ تعریف. فرض کنید B یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و $f : R \longrightarrow B$ یک هomomorphism حلقه‌ای باشد.

در اینصورت می‌گوییم B یک R_جبر تحت هومورفیسم f است.

واضح است که اگر B یک حلقهٔ توسیعی از R باشد، آنگاه B تحت هومرفیسم شمول یک R_جبر است.

۱-۱۴ تعریف. فرض کنید B یک Rـجبر تحت هومرفیسم f باشد و فرض کنید که I یک ایده‌ال از R و J یک ایده‌ال از B باشد.

ایده‌ال تولید شده توسط $f(I)$ در B را توسیع ایده‌ال I در B می‌نامیم و آن را با نماد IB نشان می‌دهیم.

ایده‌ال $f^{-1}(J)$ در R را انقباض ایده‌ال J در R می‌نامیم و آن را با نماد $J \cap R$ نشان می‌دهیم.

۱-۱۵ قضیه. فرض کنید B یک Rـجبر باشد و فرض کنید که I یک ایده‌ال از R و J یک ایده‌ال از B باشد. در اینصورت

(i) $I \subseteq IB \cap R$.

(ii) $(J \cap R)B \subseteq J$.

(iii) $(IB \cap R)B = IB$.

(iv) $[(J \cap R)B] \cap R = J \cap R$.

برهان. [1,1.17]

۱-۱۶ قضیه. فرض کنید B یک Rـجبر باشد و فرض کنید که I و J ایده‌ال‌هایی از R باشند. در اینصورت

(i) $(I+J)B = IB + JB$

(ii) $(IJ)B = (IB)(JB)$

(iii) $(I \cap J)B \subseteq IB \cap JB$

(iv) $(I : J)B \subseteq IB : JB$

برهان. [1,1.18]

۱-۱۷ قضیه. فرض کنید B یک Rـجبر یکدست باشد و فرض کنید I و J ایده‌ال‌هایی از R باشند. در اینصورت

(i) $(I\cap J)B = IB\cap JB$

(ii) $(I:J)B = IB:JB$، در صورتیکه ایده‌ال J با تولید متناهی باشد.

و بعلاوه اگر B یک R_ جبر یکدست صادق باشد، آنگاه $IB\cap R = I$.

برهان. [6,3.H,4.C]

۱-۱۸ تعریف. فرض کنید B یک R_جبر تحت همومورفیسم $f: R\longrightarrow B$ باشد و فرض کنید $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in B$.

قرار دهید $A = \mathrm{im}(f)$.

در اینصورت مجموعهٔ همهٔ اعضایی از B به شکل $\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ که در آن

$$\varphi(X_1,\dots,X_n)\in A[X_1,\dots,X_n]$$

را با علامت $R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ نشان می‌دهیم.

واضح است که $R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ حلقه‌ای بین A و B است.

اگر $f: R\longrightarrow B$ همومورفیسم شمول باشد، آنگاه به آسانی می‌توان دید که $R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ کوچکترین حلقهٔ شامل R و $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ است.

۱-۱۹ قضیه. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد. در اینصورت $S^{-1}R$ یک R_ جبر یکدست است.

برهان. [1,3.6]

۱-۲۰ تعریف. فرض کنید S مساوی مجموعهٔ همهٔ اعضای منظم حلقهٔ R باشد.

در اینصورت واضح است که S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R است.

حلقهٔ خارج‌قسمتی $S^{-1}R$ را حلقهٔ خارج‌قسمتی کلی R می‌نامیم و آن را با نماد T نشان می‌دهیم.