بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

مروری بر تعبیر هشدار در نمودارهای کنترل چند متغیره

استاد راهنما:

دکتر منوچهر خردمندنیا

پژوهشگر:

فاطمه سلیمانی

بهمن ماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

خانم فاطمه سلیمانی

تحت عنوان

مروری بر تعبیر هشدار در نمودارهای کنترل چند متغیره

در تاریخ۹۰/۱۱/۱۲ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **بسیار خوب** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر منوچهر خردمندنیا با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲-استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکترهوشنگ طالبی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر علی زینل همدانی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

امضای مدیر گروه

سپاس

خدایا ! ذهن من دشتی است که در آن بذر نیکی می‌کارم و با نام تو آن را آبیاری می‌کنم تا گل عطرآگین حضورت در قلبم بروید،

تا فراموش نکنم لطف و محبت بزرگانی که در راه تحصیل و کسب علم و دانش و معرفت خداشناسی و خودشناسی مرا یاری نمودند،

تا از یاد نبرم زحمات استاد دلسوز و مهربانم؛ جناب آقای دکتر خردمندنیا که با کرامتی چون خورشید در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه به اینجانب دریغ ننمودند;

و همیشه به یاد داشته باشم زحمات و دعای خیر پدر و مادرم را.

تـقـديم

به پاس تعبير عظيم و انسانيشان از كلمه ايثار و از خودگذشتگيشان

به پاس عاطفه سرشار و گرماي اميدبخش وجودشان كه در اين سردترين روزگاران بهترين پشتيبان است

به پاس قلب‌هاي بزرگشان كه فريادرس است و سرگرداني و ترس در پناهشان به شجاعت ميگرايد

و به پاس محبت‌هاي بيدريغشان كه هرگز فروكش نميكند

آنان كه ناتوان شدند تا به توانايي برسم ...

موهايشان سپيد شد تا روسفيد شوم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجودم و روشنگر راهم باشند...

تقديم به پدر و مادر مهربانم

چکیده

هنگامی که در یک نمودار کنترل فرایند آماری چندمتغیره هشدار خروج از کنترل ظاهر می‌شود، یک سؤال طبیعی این است که کدام یک از متغیرها موجب این هشدار شده‌اند؟ در واقع وضعیت خروج از کنترل حداقل می تواند مربوط به یکی از متغیرها باشد و معقول نیست که وضعیت خروج از کنترل را به همه متغیرها نسبت داد. واقعیت این است که استفاده از روش‌های یک‌متغیره به معنی دور ریختن بخش مهمی از اطلاعات است که در کوواریانس بین متغیرها نهفته و می‌تواند به نتایج گمراه کننده‌ای منتهی شود.

در متون کنترل کیفیت چندمتغیره شناسایی متغیرهای عامل هشدار خروج از کنترل را اغلب تحت عنوان "تعبیر هشدار" مورد بررسی قرار می‌دهند. موضوع این پایان‌نامه تعبیر هشدار می‌باشد. بر این اساس در پایان‌نامه حاضر روش‌های متداول و مهم از جنبه‌های نظری، کاربردی و محاسباتی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در فصل اول کلیاتی ارائه شده است. در فصل دوم روشی مبتنی بر تجزیه آماره T^2 هتلینگ معرفی شده است. در فصل سوم نمودار کنترل جدیدی براساس استانداردسازی توأم متغیرها معرفی شده که در عین سادگی دارای این قابلیت است که نه تنها وضعیت خروج از کنترل را تشخیص می‌دهد بلکه با استفاده از آن می‌توان دریافت که کدام یک از متغیرها عامل وضعیت هشدار خروج از کنترل بوده‌اند. در فصل چهارم روشی مبتنی بر مؤلفه‌های اصلی تشریح شده است. بالاخره در فصل پنجم روشی مبتنی بر منحنی آندرو معرفی گردیده است.

در این پایان‌نامه نظریه‌ها و اثبات قضایای کلیدی با تفصیل و وضوح بیش‌تری نسبت به آنچه که در مقالات وجود دارد ارائه شده و برای جنبه‌های محاسباتی برنامه‌هایی با نرم‌افزار $MATLAB$ ارائه گردیده است. با استفاده از این برنامه‌ها مثال‌های متنوعی براساس داده‌های شبیه‌سازی شده برای آشکار ساختن قابلیت‌های هر روش ارائه شده است.

واژگان کلیدی: استانداردسازی توأم، تجزیه T^2 هتلینگ، تعبیر هشدار، مؤلفه‌های اصلی، منحنی آندرو

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تعاریف، مفاهیم و روش‌های مقدماتی

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ موضوع و هدف تحقیق ۱

۱-۳ زمینه و تاریخچه موضوع تحقیق ۲

۱-۴ خواص پایه‌ای بردارها و ماتریس‌های تصادفی ۳

۱-۵ مفاهیم و روش‌ها در کنترل کیفیت آماری ۵

۱-۵-۱ نمودار کنترل ۵

۱-۵-۲ نمودار کنترل خی دو ۶

۱-۵-۳ متوسط طول دنباله ۶

۱-۶ چند نظریه توزیعی چندمتغیره ۷

۱-۶-۱ توزیع نرمال چندمتغیره ۷

۱-۶-۲ توزیع ویشارت ۸

۱-۶-۳ توزیع T^2 هتلینگ ۹

۱-۷ اهمیت و کاربرد موضوع ۹

فصل دوم: تعبیر هشدار از طریق تجزیه T^2 هتلینگ

۲-۱ مقدمه ۱۳

۲-۲ نمودار کنترل T^2 هتلینگ ۱۴

۲-۳ مشکل تعبیر هشدار ۱۶

۲-۴ تجزیه T^2 در حالت خاص دومتغیره ۱۸

۲-۴-۱ توزیع مؤلفه‌های تجزیه آماره T^2 ..... ۲۰

۲-۴-۲ تفسیر هشدار در مؤلفه‌های تجزیه آماره T^2 ..... ۲۰

عنوان **صفحه**

۲-۵ تجزیه‌ی آماره T^2 در حالت p متغیره ۲۴

۲-۵-۱ محاسبه جملات تجزیه ۲۷

۲-۵-۲ تعیین متغیرهای هشدار دهنده ۲۸

۲-۵-۳ تعداد محاسبات در روش تجزیه T^2 ..... ۳۰

۲-۵-۴ طرح محاسباتی برای کاهش محاسبات ۳۱

۲-۶ نتیجه‌گیری ۳۳

۲-۷ مبانی نظری ۳۳

فصل سوم: تعبیر هشدار از طریق استانداردسازی

۳-۱ مقدمه ۳۷

۳-۲ انواع استاندارد سازی داده‌های چندمتغیره ۳۸

۳-۲-۱ تبدیل استاندارد کننده توأم ۳۸

۳-۲-۲ تبدیل استاندارد کننده یکی در هر بار ۳۸

۳-۳ روش مبتنی بر استانداردسازی یکی در هر بار ۳۹

۳-۳-۱ نمودار کنترل $maxU$ بر پایه مشاهدات تکی ۳۹

۳-۳-۲ نمودار کنترل $maxU$ بر پایه مشاهدات گروهی ۴۰

۳-۳-۳ شناسایی متغیرهای عامل خروج از کنترل در نمودارهای نوع $maxU$ ۴۱

۳-۴ روش مبتنی بر استانداردسازی توأم ۴۲

۳-۴-۱ نمودار کنترل $maxZ$ بر پایه مشاهدات تکی ۴۲

۳-۴-۲ نمودار کنترل $maxZ$ بر پایه مشاهدات گروهی ۴۳

۳-۴-۳ شناسایی متغیرهای عامل هشدار خروج از کنترل در نمودارهای نوع $maxZ$ ۴۴

۳-۵ مثال‌های شبیه‌سازی ۴۵

۳-۶ معرفی نمودار کنترل LC ۵۵

۳-۶-۱ نمودار کنترل LC بر پایه T^2 هتلینگ ۵۵

عنوان **صفحه**

۳-۶-۲ مثال شبیه‌سازی ۵۶

۳-۷ روش مبتنی بر فواصل اطمینان ۵۷

۳-۷-۱ فواصل اطمینان یکی در هر بار ۵۷

۳-۷-۲ فواصل اطمینان همزمان ۵۸

۳-۷-۳ فواصل اطمینان بونفرونی ۵۹

۳-۷-۴ شناسایی متغیرهای خارج از کنترل با استفاده از فواصل اطمینان ۵۹

۳-۸ نتیجه‌گیری ۶۰

۳-۹ مبانی نظری ۶۰

فصل چهارم: تعبیر هشدار از طریق مؤلفه‌های اصلی

۴-۱ مقدمه ۶۴

۴-۲ تعریف و خواص مؤلفه‌های اصلی ۶۴

۴-۲-۱ خواص مؤلفه‌های اصلی ۶۶

۴-۲-۲ همبستگی بین مؤلفه‌های اصلی و متغیرهای اولیه ۶۶

۴-۲-۳ مؤلفه‌های اصلی مبتنی بر متغیرهای استاندارد شده ۶۶

۴-۲-۴ سهم مؤلفه‌های اصلی از کل تغییر پذیری ۶۷

۴-۲-۵ تصمیم راجع به تعداد مؤلفه‌ها ۶۸

۴-۳ معرفی روش مؤلفه‌های اصلی برای تعبیر هشدار ۶۹

۴-۳-۱ حالت اول: روش PCA در حالت همبستگی‌های مثبت ۶۹

۴-۳-۲ الگوریتم محاسباتی روش PCA برای حالت اول ۷۳

۴-۳-۳ مثال شبیه‌سازی ۱ ..... ۷۳

۴-۳-۴ حالت دوم: روش PCA در حالت همبستگی‌های مثبت و منفی ۸۱

۴-۳-۵ الگوریتم محاسباتی روش PCA برای حالت دوم ۸۱

۴-۳-۶ مثال شبیه‌سازی ۲ ..... ۸۲

عنوان **صفحه**

۴-۳-۷ استفاده از آماره R_i^* در حالت همبستگی‌های دوبدوئی مثبت ۹۰

۴-۴ تعیین حدود کنترل ۹۰

۴-۴-۱ تعیین حدود کنترل برای مثال شبیه‌سازی ۱ ..... ۹۱

۴-۴-۲ تعیین حدود کنترل برای مثال شبیه‌سازی ۲ ..... ۹۳

۴-۵ نتیجه‌گیری ۹۳

۴-۶ مبانی نظری ۹۴

فصل پنجم: تعبیر هشدار از طریق منحنی آندرو

۵-۱ مقدمه ۹۵

۵-۲ معرفی منحنی آندرو ۹۶

۵-۳ ویژگی‌های منحنی آندرو ۹۸

۵-۴ معرفی نمودار کنترل آندرو ۹۹

۵-۵ معرفی روش پیشنهادی ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) ۱۰۰

۵-۵-۱ الگوریتم محاسباتی روش پیشنهادی ماراوالاکیس و برسیموس(۲۰۰۹) ۱۰۲

۵-۶ مثال‌های شبیه‌سازی ۱۰۳

۵-۷ مباحث تکمیلی ۱۱۸

۵-۷-۱ بررسی اثر اندازه نمونه ۱۱۸

۵-۷-۲ بررسی اثر تغییر میزان آلودگی ۱۱۸

۵-۷-۳ بررسی اثر تعداد متغیرها ۱۱۹

۵-۷-۴ بررسی اثر تغییر سطح معنی‌داری ۱۲۰

۵-۷-۵ بررسی اثر جابجایی متغیرها ۱۲۰

۵-۸ نتیجه‌گیری ۱۲۱

۵-۹ مبانی نظری ۱۲۱

پیوست‌ها ۱۲۴

منابع و مآخذ ۱۳۵

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۱-۱ فواصل کنترل یکی در هربار و بیضی‌گون کنترل توأم ۱۱

شکل ۲-۱ ناحیه کنترل دومتغیره با یک نقطه معنادار ۱۷

شکل ۲-۲ حدود کنترل شرطی ۲۱

شکل ۲-۳ حدود کنترل یک‌متغیره و بیضی کنترل برای داده‌های جکسون ۲۲

شکل ۲-۴ نمودار کنترل T^2 برای مشاهدات ۳۶ الی ۵۰ .....۲۹

شکل ۲-۵ بیضی و مستطیل کنترل ۹۵ درصد.....۴۰

شکل ۳-۱ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۴۶

شکل ۳-۲ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۴۷

شکل ۳-۳ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۴۸

شکل ۳-۴ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۵۰

شکل ۳-۵ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۵۳

شکل ۳-۶ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۵۴

شکل ۳-۷ نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم ۵۵

شکل ۳-۸ نمودار کنترل LC و نمودار میله‌ای متغیرهای استانداردشده.....۵۷

شکل ۴-۱ نمودار مقادیر ویژه ۶۸

شکل ۴-۲ نمودار ۴۰ نمونه تولید شده به تفکیک هر یک از شش متغیر در مثال شبیه‌سازی ۱ .....۷۶

شکل ۴-۳ نمودارهای کنترل برای هر متغیر در مثال شبیه‌سازی ۱ .....۷۸

شکل ۴-۴ نمودار ۴۰ داده تولید شده در تکرار اول مثال شبیه‌سازی ۱ .....۷۹

شکل ۴-۵ نمودارهای کنترل برای هر متغیر درتکرار اول مثال شبیه‌سازی ۱ .....۷۹

شکل ۴-۶ نمودار ۴۰ داده تولید شده در تکرار دوم مثال شبیه‌سازی ۱ .....۸۰

شکل ۴-۷ نمودارهای کنترل برای هر متغیر در تکرار دوم مثال شبیه‌سازی ۱ .....۸۰

عنوان **صفحه**

شکل ۴-۸ نمودار ۴۰ داده تولید شده به تفکیک هر شش متغیر در مثال شبیه‌سازی ۲ .....۸۵
شکل ۴-۹ نمودارهای کنترل برای هر متغیر در مثال شبیه‌سازی ۲ .....۸۷
شکل ۴-۱۰ نمودار ۴۰ داده تولید شده در تکرار اول مثال شبیه‌سازی ۲ .....۸۸
شکل ۴-۱۱ نمودارهای کنترل برای هر متغیر در تکرار اول مثال شبیه‌سازی ۲.....۸۸
شکل ۴-۱۲ نمودار ۴۰ داده تولید شده در تکرار دوم مثال شبیه‌سازی ۲.....۸۹
شکل ۴-۱۳ : نمودارهای کنترل برای هر متغیر در در تکرار دوم مثال شبیه‌سازی ۲ .....۸۹
شکل ۴-۱۴ نمودارهای کنترل برای هر متغیر ۹۰
شکل ۵-۱ نمایش منحنی آندرو برای سه بردار متفاوت ۹۷
شکل ۵-۲ نمودار کنترل آندرو برای مثال ۱.....۱۰۴
شکل ۵-۳ نمودار کنترل آندرو پس از حذف متغیر خارج از کنترل در مثال ۱ .....۱۰۶
شکل ۵-۴ نمودار کنترل آندرو در تکرار اول مثال ۱ .....۱۰۷
شکل ۵-۵ نمودار کنترل آندرو پس از حذف متغیر خارج از کنترل در تکرار اول مثال ۱.....۱۰۷
شکل ۵-۶ نمودار کنترل آندرو در تکرار دوم مثال ۱ .....۱۰۸
شکل ۵-۷ نمودار کنترل آندرو پس از حذف متغیر خارج از کنترل در تکرار دوم مثال ۱ .....۱۰۸
شکل ۵-۸ نمودار کنترل آندرو برای مثال ۲.....۱۱۰
شکل ۵-۹ نمودار کنترل آندرو برای مثال ۳.....۱۱۱
شکل ۵-۱۰ نمودار کنترل آندرو پس از حذف اولین متغیر خارج از کنترل در مثال ۳ .....۱۱۲
شکل ۵-۱۱ نمودار کنترل آندرو برای مثال ۴.....۱۱۶
شکل ۵-۱۲ نمودار کنترل آندرو پس از حذف اولین متغیر خارج از کنترل در مثال ۴ .....۱۱۷
شکل ۵-۱۳ نمودار کنترل آندرو پس از حذف متغیرهای خارج از کنترل در مثال ۴ .....۱۱۷

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱ مقادیر X_1 و X_2 متناظر با ۴ نقطه در داده‌های جکسون ۲۲

جدول ۲-۲ تجزیه داده‌های جکسون ۲۳

جدول ۲-۳ تجزیه جزئی T^2 برای مشاهده خارج از کنترل در داده‌های شبیه‌سازی هاوکینز ۳۰

جدول ۲-۴ مؤلفه‌های معنادار در تجزیه برای داده‌های شبیه‌سازی شده هاوکینز ۳۰

جدول ۲-۵ تعداد جملات مجزای تجزیه MYT ۳۱

جدول ۲-۶ مقادیر T^2 غیرشرطی برای مشاهده خارج از کنترل ۳۳

جدول ۳-۱ مقادیر ARL_0 و UCL برای مقادیر مختلف α و p ۴۳

جدول ۳-۲ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه تحت کنترل ۴۶

جدول ۳-۳ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه خارج کنترل ۴۶

جدول ۳-۴ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۴۶

جدول ۳-۵ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه تحت کنترل ۴۷

جدول ۳-۶ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه خارج کنترل ۴۷

جدول ۳-۷ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۴۷

جدول ۳-۸ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه تحت کنترل ۴۸

جدول ۳-۹ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه خارج کنترل ۴۸

جدول ۳-۱۰ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۴۸

جدول ۳-۱۱ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه تحت کنترل ۵۰

جدول ۳-۱۲ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه خارج کنترل ۵۰

جدول ۳-۱۳ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۵۱

جدول ۳-۱۴ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه تحت کنترل ۵۲

جدول ۳-۱۵ داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه خارج کنترل ۵۲

جدول ۳-۱۶ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۵۳

عنوان **صفحه**

جدول ۳-۱۷ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۵۴

جدول ۴-۱ داده‌های تولید شده ۲۰ نمونه تحت کنترل ۷۵

جدول ۴-۲ داده‌های تولید شده ۲۰ نمونه خارج کنترل ۷۶

جدول ۴-۳ مقادیر r_{t1}، r_{t2}، ... و r_{t6} ۷۷

جدول ۴-۴ داده‌های تولید شده ۲۰ نمونه تحت کنترل ۸۴

جدول ۴-۵ داده‌های تولید شده ۲۰ نمونه خارج کنترل ۸۴

جدول ۴-۶ مقادیر r^*_{t1}، r^*_{t2} ، ... و r^*_{t6} ۸۶

جدول ۵-۱ مقادیر $f_{\underline{X}}(t)$ و حدود کنترل بالا و پایین برای ۳۶۱ نقطه در مثال ۱ ..... ۱۰۵

جدول ۵-۲ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در مثال ۱ ..... ۱۰۵

جدول ۵-۳ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در تکرار اول مثال ۱ ..... ۱۰۷

جدول ۵-۴ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در تکرار دوم مثال ۱ ..... ۱۰۸

جدول ۵-۵ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در مثال ۲ ..... ۱۱۰

جدول ۵-۶ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در مثال ۳ ..... ۱۱۱

جدول ۵-۷ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در مثال ۳ ..... ۱۱۲

جدول ۵-۸ مقادیر غیرشرطی آماره T^2 ..... ۱۱۳

جدول ۵-۹ مقادیر r^* و حدود کنترل بالا و پایین ۱۱۵

جدول ۵-۱۰ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر در مثال ۴ ..... ۱۱۶

جدول ۵-۱۱ تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر ۱۱۷

جدول ۵-۱۲ اثر تغییر اندازه نمونه در مثال ۱ ..... ۱۱۸

جدول ۵-۱۳ اثر تغییر میزان آلودگی در مثال ۱ ..... ۱۱۹

جدول ۵-۱۴ اثر تغییر میزان آلودگی در مثال ۲ ..... ۱۱۹

جدول ۵-۱۵ اثر تغییر سطح معنی‌داری در مثال ۱ ..... ۱۲۰

جدول ۵-۱۶ اثر جابجایی درایه‌های بردار $\underline{X}$ ۱۲۰

فصل اول

تعاریف، مفاهیم و روش‌های مقدماتی

۱-۱ مقدمه

در این فصل موضوع و هدف تحقیق، زمینه و تاریخچه موضوع تحقیق، خواص پایه‌ای بردارها و ماتریس‌های تصادفی، مفاهیم و روش‌های اساسی در کنترل کیفیت آماری و همچنین اهمیت و کاربرد موضوع ارائه می‌گردد.

۱-۲ موضوع و هدف تحقیق

موضوع این پایان‌نامه تعبیر هشدار در حالت هشدار خروج از کنترل در نمودارهای کنترل چندمتغیره می‌باشد و سعی شده است که روش‌های متنوع و جدید مرتبط با موضوع تحقیق مورد بحث قرار گیرد. هدف پایان‌نامه تدارک مجموعه نسبتاً جامعی از نظریه‌های پرکاربرد مرتبط با موضوع پایان‌نامه و ارائه توضیحات و اثبات‌هایی روشن و همچنین تدارک مثال‌هایی کاربردی با داده‌های شبیه‌سازی شده به منظور روشن‌تر شدن ایده‌های کلیدی می‌باشد.

۱-۳ زمینه و تاریخچه موضوع تحقیق

محققین زیادی به بررسی تعبیر هشدار پرداخته‌اند. آلت[۱] (۱۹۸۵) یکی از اولین محققانی بود که با این مسأله درگیر شد و استفاده ازحدود کنترل بونفرونی[۲] را پیشنهاد کرد. جکسون[۳] (۱۹۹۱) حدود کنترل بیضی‌گون را فقط برای فرایندهایی که دارای دو مشخصه باشند، به‌کار برد. گسترش حدود کنترل بیضی‌گون برای بیش از دو متغیر توسط چیو و مونتگمری[٤] (۱۹۹۲) مطرح شد. وید و وودال[٥] (۱۹۹۳) برای فرایندهای دومتغیره نمودار کنترلی را معرفی کردند که در این روش ابتدا برای متغیر X_1 بدون در نظر گرفتن X_2 نموداری رسم می‌شود و متغیر X_2 پس از تعدیل رگرسیونی روی X_1 بررسی می‌شود. هایتر و سوئی[٦] (۱۹۹۴) حدود کنترل بونفرونی را گسترش داده، روشی مبتنی بر فواصل کنترل همزمان[۷] برای هر یک از میانگین‌های فرایند ارائه کردند. اسپولودا و ناکلاس[۸] (۱۹۹۷) نمودار کنترل مینی‌ماکس[۹] را پیشنهاد کردند. این نمودار براساس بررسی ماکسیمم و مینیمم میانگین‌های نمونه‌ای استاندارد شده استوار می‌باشد. یک روش مشهور برای تعبیر هشدار، روش تجزیه T^2 هتلینگ است که توسط میسون و همکاران[۱۰] (۱۹۹۵و۱۹۹۷a,b) معرفی شد. ایده اصلی در این روش، تجزیه آماره T^2 به قسمت‌های مستقلی است که هر قسمت نقش یک متغیر منفرد را دربردارد. روش‌های مطرح شده توسط مرفی[۱۱] (۱۹۸۷)، دوگناکسوی و همکاران[۱۲] (۱۹۹۱)، هاوکینز[۱۳] (۱۹۹۱و۱۹۹۳)، تیم[۱٤] (۱۹۹۶) و رانجر و همکاران[۱٥] (۱۹۹۶) حالت‌های خاصی از روش تجزیه T^2 می‌باشند. در پایان‌نامه کارشناسی ارشد توانگر (۱۳۸۲) نیز آماره T^2 و موضوع تعبیر هشدار از طریق تجزیه آماره T^2 بررسی شده است. جکسون (۱۹۸۵) اولین محققی بود که برای تعبیر هشدار خروج از کنترل روش مؤلفه‌های اصلی[۱٦] را به‌کار برد. تریسی و همکاران[۱۷] (۱۹۹۵) نیز روش مؤلفه‌های اصلی را گسترش دادند. ماراولاکیس و همکاران[۱۸] (۲۰۰۲) روشی ابتکاری تشریح کردند که براساس

---

[1] Alt
[2] Bonferroni Control Limits
[3] Jakson
[4] Chua and Montgomery
[5] Wade and Woodall
[6] Hayter and Tsui
[7] Simultaneous Confidence Intervals
[8] Sepulveda and Nachlas
[9] Minimax Control Chart
[10] Mason and et.al
[11] Murphy
[12] Doganaksoy
[13] Hawkins
[14] Timm
[15] Runger and et.al
[16] Principle Component
[17] Tracy and et.al
[18] Maravelakis and et.al

نسبت‌هایی از مؤلفه‌های اصلی می‌باشد. کالگوندا و کولکارنی[1] (۲۰۰۴) برای داده‌های خودهمبسته[2] نمودار کنترلی معرفی کردند که بر پایه استانداردسازی یکی در هر بار مشاهدات استوار است. اخیراً ماراوالاکیس و برسیموس[3] (۲۰۰۹) روش جدیدی برای تعبیر هشدار معرفی کردند که مبتنی بر استفاده از منحنی آندرو[4] می‌باشد. منحنی آندرو یک شیوه توضیح گرافیکی داده‌های چندمتغیره است. بوت و تانگ[5] (۲۰۱۰) یک نمودار جدید بر پایه آماره T^2 هتلینگ و استانداردسازی یکی در هر بار مشاهدات ارائه کرده‌اند که دارای دو محور عمودی است که یک محور مربوط به آماره T^2 هتلینگ و محور دیگر مربوط به متغیرهای استاندارد شده می‌باشد.

۱-۴ خواص پایه‌ای بردارها و ماتریس‌های تصادفی

در این بخش گزیده‌ای از تعاریف و خواص بردارها و ماتریس‌های تصادفی مورد استفاده در پایان‌نامه ارائه می‌شود. برای توضیحات بیش‌تر به مراجع ماردیا (۱۹۷۹) و آندرسن[6] (۲۰۰۳) مراجعه شود.

الف) بردار $\underline{X} = \left(X_1, X_2, \dots, X_p\right)^T$ را یک بردار تصادفی گویند هرگاه هر یک از درایه‌های آن یک متغیر تصادفی باشد.

ب) بردار میانگین جامعه با $\underline{\mu}$ یا با $\mu_{\underline{X}}$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\underline{\mu} = E(\underline{X}) = \left(E(X_i)\right) = (\mu_i) \qquad (۱-۱)$$

پ) ماتریس کوواریانس جامعه با $\sum$ و یا با $\sum_{\underline{X}}$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum = var(\underline{X}) = E\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)^T = (\sigma_{ij}) \qquad (۱-۲)$$

که در آن

$$\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j) = E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \qquad (۱-۳)$$

ماتریس $\sum$ یک ماتریس متقارن معین مثبت $p \times p$ است که درایه‌ی سطر i-ام و ستون j-ام آن کوواریانس بین X_i و X_j می‌باشد.

---

[1] Kalgonda and Kulkarni
[2] Auto correlated data
[3] Maravelakis and Bersimis
[4] Androw's Curves
[5] Butte and Tang
[6] Anderson

ت) اگر بردارهای تصادفی $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ مستقل و همتوزیع باشند آن‌ها را یک نمونه تصادفی از $\underline{X}$ گویند.

ث) فرض کنید که $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ یک نمونه تصادفی از $\underline{X}$ باشد. دراین‌صورت بردار میانگین نمونه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\underline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \underline{X}_r = \left(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_p\right)^T \qquad (۱-۴)$$

که در آن $\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_{ri}$ میانگین نمونه‌ی X_i است.

ج) فرض کنید که $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ یک نمونه تصادفی از $\underline{X}$ باشد. دراین‌صورت ماتریس کوواریانس نمونه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$S = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \left(\underline{X}_r - \overline{\underline{X}}\right)\left(\underline{X}_r - \overline{\underline{X}}\right)^T \qquad (۱-۵)$$

یک برآورد نااریب برای $\sum$ عبارت است از $S_u = \frac{n}{n-1}S$.

چ) ماتریس X را تصادفی گویند هرگاه هر یک از درایه‌های آن یک متغیر تصادفی باشند.

ح) ماتریس تصادفی $X_{n\times p}$ را یک ماتریس تصادفی داده‌ها از $\underline{X}$ گویند هر گاه ترانهاده‌ی سطرهای آن یک نمونه تصادفی از $\underline{X}$ باشند. برای ماتریس تصادفی X علائم زیر به‌کار می‌رود

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1^T \\ \underline{X}_2^T \\ \vdots \\ \underline{X}_n^T \end{bmatrix} = [\underline{X}_{(1)} \quad \underline{X}_{(2)} \quad \cdots \quad \underline{X}_{(p)}] \qquad (۱-۶)$$

که در آن $\underline{X}_i^T$ سطر i–ام و $\underline{X}_{(j)}$ ستون j–ام X هستند. برخلاف سطرها، ستون‌های X یعنی $\underline{X}_{(1)}$، $\underline{X}_{(2)}$، ⋯ و $\underline{X}_{(p)}$ نه مستقلند و نه لزوماً همتوزیع‌اند.

خ) اگر ترانهاده‌ی سطرهای ماتریس تصادفی $X_{n\times p}$ یک نمونه تصادفی از $N_p(\underline{\mu}, \sum)$ باشند، X را یک ماتریس تصادفی داده‌ها از $N_p(\underline{\mu}, \sum)$ گویند.