دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه :

توزیع کوماراسوامی و ویژگی های آن

محمد حاجی پور

استاد راهنما :

دکترحسین جباری خامنه ای

استاد مشاور :

دکترنرگس عباسی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه :

توزیع کوماراسوامی و ویژگی های آن

محمد حاجی پور

استاد راهنما :

دکترحسین جباری خامنه ای

استاد مشاور :

دکترنرگس عباسی

شهریور ۱۳۹۲

(آ)
جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه پیام نور استان فارس

دانشگاه پیام نور شیراز
باسمه تعالی

تاریخ : ۹۲/۰۶/۲۵
شماره : ۵/۱۶۲۲۷۶
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای محمد حاجی‌پور** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۸۹۰۳۴۶۴۴۶** با عنوان:

" توزیع کوماراسوامی و ویژگی‌های آن"

با حضور هیأت داوران در روز **دوشنبه** مورخ **۱۳۹۲/۰۶/۲۵** ساعت **۱۸** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد......۱۸/۹......به حروف......هجده و نه دهم...... با درجه......عالی......تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر حسین جباری خامنه‌ای	راهنما	استادیار	تبریز	
۲	دکتر نرگس عباسی	مشاور	دانشیار	پیام‌نور شیراز	
۳	عبدالرضا بازرگان‌لاری	داور	استادیار	شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام‌نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان،بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۰۷۱۱ - ۶۲۲۲۲۵۵
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی: ۷۱۹۵۵ - ۱۳۶۸
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب محمدحاجی پوردانشجوی ورودی سال۱۳۸۹مقطع کارشناسی ارشد رشته آماررياضی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

محمدحاجی پور

تاریخ وامضاء

اینجانب محمدحاجی پوردانشجوی ورودی سال۱۳۸۹مقطع کارشناسی ارشد رشته آماررياضی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و بصورت مشترک و با ذکرنام استاد راهنما مبادرت نمایم.

محمدحاجی پور

تاریخ وامضاء

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به :

سپاس و ستایش مرخدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و اندر حکمت او در دل شب تار و درخشان، آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

پدر و مادر عزیز و مهربانم که در سختی ها و دشواری های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده اند ، والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشت رضای شما و من به نشان سپاس بوسه می زنم بر دستان مبارکشان .

دایی و عموی بزرگوارم که دلسوزانه مشوق و راهنمای بنده در طول دوران تحصیل ، همراه همیشگی و پشتوانه زندگیم بوده و هستند.

همسرم به پاس قدردانی با قلبی آکنده از عشق و معرفت که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد. او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

همچنین ازخواهران و برادروفرزندان دلبندم تشکرمی نمایم که صبورانه و صادقانه مرا همراهی نموده اند.

به نام خداوند بخشنده مهربان

«من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق».

قدردانی:

از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر حسین جباری خامنه ای (استاد راهنما) که در تمام مراحل انجام کار پایان نامه با راهنمایی های بی دریغ و با صبروحوصله زحمات بنده را متحمل گردیدند. نامش و یادش همیشه در ذهن و قلب بنده خواهد بود و بسیار سپاسگزارم که بدون راهنماییهای ایشان تهیه و تدوین این پایان نامه بسیار مشکل می شد.

از استاد گرامی وسرور عزیز سرکار خانم دکتر نرگس عباسی (استاد مشاور) به دلیل یاریها و راهنماییهای بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختیها را برایم آسانتر نمود و در طول تحصیل هر جا به مشکلی گرفتار می آمدم پیوسته تدابیر حکمیانه ایشان کلیه مسائلم بود تشکر و قدردانی می نمایم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر عبدالرضا بازرگان لاری که با سعه ی صدر و ورویی گشاده ، داوری این پایان نامه را انجام داده اند سپاسگزاری می نمایم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکترمهرداد لکستانی ، آقای قادرعبدالهی ، سرکار خانم آزاده اجلالی ، سرکارخانم عهدیه نوین که با کمک و راهنماییهای بی دریغ شان مرا درتهیه این پایان نامه یاری کرده اند سپاسگزارم.

در پایان با تشکر از تمامی دوستان و بزرگان علم و ادب که در تهیه و تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند از خداوند متعال برایشان آرزوی سلامتی و سعادت و توفیقات روز افزون را خواستارم.

محمد حاجی پور

شهریورماه ۱۳۹۲

چکیده:

در این پایان نامه خصوصیات آماری توزیع کوماراسوامی بیان می‌شود. برآورد پارامترهای توزیع با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم برای ساختارهای مختلف پارامتری مورد بررسی قرار می‌گیرد. و همچنین برخی از روابط بازگشتی برای گشتاورها و گشتاورهای ضربی آماره های ترتیبی تعمیم یافته از توزیع کوماراسوامی بیان خواهد شد.

واژه گان کلیدی : آماره های ترتیبی تعمیم یافته، رکوردها، گشتاورها ، گشتاورهای ضربی، توزیع کوماراسوامی، مشخصه سازی، برآورد درستنمایی ماکسیمم، توزیع کوماراسوامی نمایی شده، آماره مرتب، نمونه گیری مجموعه ی رتبه ای.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱

مقدمه ، مفاهیم و تعاریف

۱–۱ مقدمه

در این فصل کلیه تعاریف و قضایایی را که در فصل‌های آینده مورد نیاز است، ارائه می‌کنیم.

در بخش دوم مقدمات ریاضی و آماری [۳]، بخش سوم توابع مرتبط با قابلیت اعتماد [۲] و بخش چهارم برخی از توزیع‌های مورد نیاز در پایان‌نامه معرفی می‌شود.[۲] در بخش پنجم این فصل به تعاریف مورد نیاز در پایان‌نامه اشاره خواهد شد.

۱–۲ مقدمات ریاضی و آمار

۱–۲–۱ تابع گاما و مشتقات آن

به ازای $\alpha > 0$، تابع

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \, exp(-t) \, dt \tag{۱.۱}$$

را تابع گاما می‌نامند. عبارت‌های زیر

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \, exp(-t) \, dt \quad , \quad \gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \, exp(-t) \, dt \tag{۲.۱}$$

به ترتیب گامای ناقص بالایی و پایینی نامیده می‌شوند.

واضح است $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)$. تابع گاما را همچنین می‌توان بصورت یک حاصل‌ضرب متناهی نوشت:

$$\Gamma(\alpha) = \left[\alpha \, exp(\gamma\alpha) \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) exp\left(-\frac{\alpha}{r}\right)\right]^{-1} \tag{۳.۱}$$

که در آن $\gamma = ۰.۵۷۷۲$ ثابت اویلر– ماشرونی[1] است. حال اگر $\psi(\alpha) = \frac{d\, ln\left(\Gamma(\alpha)\right)}{d\, \alpha}$، آنگاه $\psi(.)$ تابع دایگاما[2] یا تابع پسی است.

روابط زیر برای $\psi(\alpha)$ برقرار است :

$$\psi(۱) = -\gamma$$
$$\psi(\alpha) = \frac{۱}{\alpha - ۱} + \frac{۱}{\alpha - ۲} + \cdots + \frac{۱}{\alpha - r} + \psi(\alpha - r)$$
$$\psi(\alpha) = -\gamma - \frac{۱}{\alpha} + \alpha \sum_{k=۱}^{\infty} \left(\frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+\alpha}\right)$$
$$\psi^{(n)}(\alpha) = (-۱)^{n+۱} n! \sum_{i=۰}^{n} \frac{۱}{(i+\alpha)^{n+۱}} \quad , \quad n \geq ۱ \qquad (۴.۱)$$

که در آن $\psi^{(n)}$، به مشتق n ام تابع دایگاما معروف است. با توجه به رابطه (۴.۱) و برای هر $k \geq ۱$

$$\lim_{\alpha \to ۰} \frac{\psi(\alpha + k) - \psi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \lim_{\alpha \to ۰} \frac{\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{(\alpha + ۱)} + \cdots + \frac{۱}{(\alpha + k - ۱)}}{\Gamma(\alpha)}$$
$$= \lim_{\alpha \to ۰} \frac{۱ + \frac{\alpha}{(\alpha+۱)} + \cdots + \frac{\alpha}{(\alpha+k-۱)}}{\Gamma(\alpha+۱)} = ۱ \qquad (۵.۱)$$

اگر $\mathcal{R}(p)$ قسمت حقیقی p باشد، آنگاه به ازای $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ و $\mathcal{R}(p) \geq 1$ توابع

$$\zeta(p, \alpha) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{(k+\alpha)^p} \quad , \quad \zeta(p) = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^p} \qquad (۶.۱)$$

به ترتیب تابع زتای تعمیم یافته[3] و تابع زتای ریمان نامیده می‌شوند. به سادگی مشخص است که :

$$\zeta(۲) = \zeta(۲,۱) = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^۲} \quad , \quad \zeta(۴) = \zeta(۴,۱) = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^۴} = \frac{\Pi^۴}{۹۰} \qquad (۷.۱)$$

رابطه‌ی زیر بین تابع زتا و گاما برقرار است :

1 Euler-Mascheroni

2 Digamma

3 Generalized Zeta Function

$$\frac{d^r}{dz^r} ln\big(\Gamma(z)\big) = \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\psi(z) = \begin{cases} \psi(z) & r = 1 \\ (-1)^r \Gamma(r)\zeta(p) & r \geq 2 \end{cases} \quad (8.1)$$

۱–۳ توابع مرتبط با قابلیت اطمینان

۱–۳–۱ تابع بقا

که به تابع قابلیت اعتماد معروف است، متمم تابع توزیع احتمال است که احتمال بقا ورای زمان t را می‌دهد.

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx \quad (9.1)$$

۱–۳–۲ تابع خطر

تحت عنوان نرخ خطر و یا تابع نرخ خطر لحظه‌ای، به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$h(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t<T\leq t+\Delta t|T>t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (10.1)$$

تابع خطر، گرایش به شکست یک واحد در یک بازه زمانی کوچک، به شرط آنکه تا زمان t از کار نیافتاده باشد را بیان می‌کند. بنابراین برای Δt کوچک :

$$h(t) \times \Delta t \approx P(t < T < t + \Delta t | T > t)$$

تابع خطر می‌تواند به عنوان نرخ شکست تعبیر شود، بدین معنی که اگر تعداد زیادی (مثلاً $n(t)$) واحد در زمان t در حال کار باشند، $n(t) \times h(t)$ تقریباً برابر تعداد شکست‌ها در واحد زمان است. در عین حال باید توجه داشت که تابع خطر، تابع احتمال نیست. تابع خطر توسط روابط زیر با تابع بقا ارتباط دارد :

$$h(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} ln\{S(t)\} \quad (11.1)$$

$$S(t) = exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$$

تابع خطر از اهمیت ویژه‌ای در مبحث قابلیت اعتماد برخوردار است. این تابع می‌تواند به پنج شکل ظاهر شود : ۱. ثابت ۲. صعودی ۳. نزولی ۴. تک مدی ۵. وانی شکل، که مورد آخر در مباحث کاربردی قابلیت اعتماد بیشتر مشاهده می‌شود.

۱–۳–۳ تابع خطر معکوس شده

اگر $F_X(t) > 0$،

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{F_X(t)}$$

تابع خطر معکوس شده[1] نامیده می‌شود. اندرسون و همکاران[2]، نشان دادند که مشابه تابع خطر در تحلیل داده‌های راست سانسوریده[3]، تابع خطر معکوس شده نقش اساسی در تحلیل داده‌های چپ سانسوریده[4]، ایفا می‌کند.

۱–۳–۴ متغیر تصادفی نمایی شده

متغیر تصادفیY، یک متغیر تصادفی نمایی شده[5] با توزیع پایه $F_X(.)$ است، هرگاه Y دارای تابع توزیع $[F_X(.)]^\alpha$ باشد. در این حالت برای تابع خطر معکوس شده X و Y و $F_X(t) > 0$:

$$r_Y(t) = \alpha r_X(t)$$

بطور مشابه اگر متغیر تصادفی Z به گونه‌ای باشد که $S_Z(t) = [S_X(t)]^\alpha$ آنگاه :

$$h_Z(t) = \alpha h_X(t)$$

1 Reversed Hazard Function

2 Anderson et al

3 Right Censored

4 Left Censored

5 Exponentiated Random Variable

۱-۴ توزیع‌های آماری

در این بخش، برخی از توابع چگالی احتمال که در فصل‌های آینده مورد نیاز است و همچنین برخی از معیارهای منتسب نظیر میانگین، واریانس، ضریب چولگی (γ_1)، ضریب کشیدگی (γ_2)، تابع مولد گشتاور $M_X(t)$، تابع بقا $S(x)$، تابع خطر $h(x)$ و تابع خطر معکوس شده $r(x)$ ارائه می‌گردد. [۳]

۱-۴-۱ توزیع نمایی

$$f_\lambda(x) = \lambda\, exp(-\lambda x) \qquad , x, \lambda > 0$$

X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است و با نماد $X \sim E(\lambda)$ نمایش داده می‌شود. اگر $X \sim E(\lambda)$ آنگاه:

$$E_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad , \qquad Var_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\gamma_1(\lambda) = 2 \qquad , \qquad \gamma_2(\lambda) = 6$$
$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \qquad , \qquad 1 > \frac{1}{\lambda}$$
$$S_\lambda(x) = exp(-\lambda x) \qquad , \qquad h_\lambda(x) = \lambda$$
$$r_\lambda(x) = \frac{\lambda\, exp(-\lambda x)}{1 - exp(-\lambda x)}$$

برای توصیف پدیده‌های فیزیکی (مانند فروپاشی رادیواکتیو و ...) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \lambda\, exp\big(-\lambda(x - \mu)\big) \qquad , x \geq \mu \qquad , \mu \epsilon (-\infty, \infty) \qquad , \lambda > 0$$

X دارای توزیع نمایی تعمیم یافته با پارامترهای μ و λ است و آن را با نماد $X \sim E(\mu, \lambda)$ نمایش می‌دهند.

۱-۴-۲ توزیع گاما

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-۱}\exp(-\lambda x) \qquad ,x,\alpha,\lambda>۰$$

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ نمایش می‌دهند. اگر $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ آنگاه :

$$E_{\alpha,\lambda}(X)=\alpha \qquad , \qquad Var_{\alpha,\lambda}(X)=\frac{\alpha}{\lambda^{۲}}$$

$$\gamma_{۱}(\alpha,\lambda)=\frac{۲}{\sqrt{\alpha}} \qquad , \qquad \gamma_{۲}(\alpha,\lambda)=\frac{۶}{\alpha}$$

$$M_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha} \qquad , \qquad t<\lambda$$

$$S_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\Gamma\left(\alpha,\frac{x}{\lambda}\right)}{\Gamma(\alpha)} \qquad , \qquad h_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-۱}\exp(-\lambda x)}{\Gamma\left(\alpha,\frac{x}{\lambda}\right)}$$

$$r_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-۱}\exp(-\lambda x)}{\gamma\left(\alpha,\frac{x}{\lambda}\right)}$$

۱-۴-۳ توزیع وایبل

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f_{\alpha,\lambda}(x)=\alpha\lambda x^{\alpha-۱}\exp(-\lambda x^{\alpha}) \qquad ,x,\alpha,\lambda>۰$$

X دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X\sim WE(\alpha,\lambda)$ نشان می‌دهند. اگر $X\sim WE(\alpha,\lambda)$، آنگاه :

$$E_{\alpha,\lambda}(X)=\frac{\Gamma\left(۱+\frac{۱}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{۱}{\alpha}}}\approx\frac{۱}{\lambda^{\frac{۱}{\alpha}}}\left(۱-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{۱}{۲\alpha^{۲}}\left(\frac{\pi^{۲}}{۶}+\gamma^{۲}\right)\right)$$

$$Var_{\alpha,\lambda}(X)=\frac{\Gamma\left(۱+\frac{۲}{\alpha}\right)-\Gamma^{۲}\left(۱+\frac{۱}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{۱}{\alpha}}}\approx\frac{۱}{\lambda^{\frac{۲}{\alpha}}}\left(\frac{\pi^{۲}}{۶\alpha^{۲}}\right)$$

$$\gamma_۱(\alpha,\lambda)=\frac{\frac{۱}{\lambda^{\frac{۳}{\alpha}}}\Gamma\left(۱+\frac{۳}{\alpha}\right)-۳\mu\sigma^۲-\mu^۳}{\sigma^۳}$$

$$\gamma_۲(\alpha,\lambda)=\frac{\frac{۱}{\lambda^{\frac{۴}{\alpha}}}\Gamma\left(۱+\frac{۴}{\alpha}\right)-۴\gamma_۱\mu\sigma^۳-۶\mu^۲\sigma^۲-\mu^۴}{\sigma^۴}$$

$$M_X(t)=\frac{\Gamma\left(۱+\frac{exp(t)}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{exp(t)}{\alpha}}}$$

$$S_{\alpha,\lambda}(x)=exp(-\lambda x^{\alpha})\quad,\qquad h_{\alpha,\lambda}(x)=\alpha\lambda x^{\alpha-۱}$$

$$r_{\alpha,\lambda}(x)=\frac{\alpha\lambda x^{\alpha-۱}\,exp(-\lambda x)}{۱-exp(-\lambda x^{\alpha})}$$

۱-۴-۴ توزیع لگ نرمال

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f_{\sigma,\mu}(x)=\frac{۱}{x\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}exp\left(-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(ln(x)-\mu)^۲\right)\quad ,x>۰\ \ ,\mu\in R\ \ ,\sigma>۰$$

X دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و σ است و آن را با نماد $X\sim LN(\sigma,\mu)$ نمایش می‌دهند.

اگر $X\sim LN(\sigma,\mu)$ آنگاه :

$$E_{\sigma,\mu}(X)=exp\left(\mu+\frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)$$

$$Var_{\sigma,\mu}(X)=\omega(\omega-۱)\,exp(۲\mu)\ \ ,\quad(\omega=exp(\sigma^۲))$$

$$\gamma_۱(\sigma,\mu)=(\omega+۲)\sqrt{\omega-۱}$$

$$\gamma_۲(\sigma,\mu)=\omega^۴+۲\omega^۳+۳\omega^۲-۶$$

$$M_X(t)=exp\left(\mu\,exp(t)+\frac{\sigma^۲}{۲}exp(۲t)\right)$$

$$S_{\sigma,\mu}(x)=\Phi\left(\frac{\mu-ln(x)}{\sigma}\right)\quad,\qquad h_{\sigma,\mu}(x)=\frac{\phi\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)}{x\sigma\Phi\left(\frac{\mu-ln(x)}{\sigma}\right)}$$