بسمه تعالی

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد
آمار ریاضی

عنوان:

فرآیند مخاطره با بهره تصادفی در صنعت بیمه

ارائه کننده:
آتنا خضرایی گل پرور

استاد راهنما:
جناب آقای دکتر علی اکبر رحیم زاده ثانی

تابستان ۱۳۸۷

چکیده

در این پایان‌نامه فرایند مخاطره با بهره ثابت و تصادفی را معرفی کرده و احتمال ورشکستگی را در دو مدل مخاطره کلاسیک و فرایند مخاطره با بهره تصادفی به دست می‌آوریم. برای این دو فرایند مخاطره، تابع جریمه مورد انتظار تخفیف یافته را که توسط گربر و شو معرفی شده است بیان می‌کنیم. همچنین کران‌هایی را برای احتمال ورشکستگی با نرخ بهره ثابت و تصادفی به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مدل مخاطره کلاسیک، فرایند مخاطره، نرخ بهره تصادفی، مقدار مورد انتظار تابع جریمه تخفیف یافته، احتمال ورشکستگی.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

با پیشرفت تمدن و توسعه جوامع بشری و به کارگیری علوم و فن‌آوری‌های جدید، ثروت و دارایی انسان افزون‌تر شده است. به رغم تسهیلاتی که با ورود فرآورده‌های صنعتی برای رفاه بشر فرآهم گردیده ریسک‌های جدید نیز وارد اجتماع شده است که دائماً جان و مال انسان‌ها را تهدید می‌کند. گاهی جبران آثار زیان‌بار این خطرات از حد تحمل و توان افراد خارج است تا جایی که پیامدهای آن تأثیر نامطلوب و محسوسی بر روند عادی و هچنین کیفیت زندگی زیان دیده تحمیل می‌کند. بدیهی است یکی از مهمترین اندیشه‌های هر شخص در زندگی فردی و اجتماعی ایجاد شرایط مطلوب برای تأمین آتیه و پوشش مناسب در قبال عواقب ناشی از حوادث ناخواسته به منظور نیل به آرامش خاطر می‌باشد.

امروزه بیمه واقعیتی است که در پرتو آن مسیر رسیدن به این هدف هموار می‌گردد. بیمه تکیه‌گاه مناسبی است که در زمان وقوع بحران به کمک افراد آمده و وضعیت اقتصادی آن‌ها را سر و سامان داده و امنیت خاطر و رفاه مالی آن‌ها را فراهم می‌سازد. اصولاً بیمه یک قرارداد و توافق بین شرکت یا سازمان بیمه‌ای با افراد و اقشار جامعه است و هر گونه توافقی که در آن شده باشد لازم‌الاجراست. بیمه ریسک‌پذیری را که لازمه‌ی بروز خلاقیت انسانی است محاسبه و با انجام عملیاتی عواقب ناگوار مالی آن را توزیع و آلام و آسیب‌های مردم را به حداقل کاهش می‌دهد. همچنین با استفاده از منابع مالی اندوخته شده در رونق اقتصادی جامعه مشارکت می‌کند.

در این پایان‌نامه فرایندی به نام مازاد حق بیمه شرکت در زمان t را در نظر گرفته و به بررسی خواص این فرایند از راه تجزیه به دو فرایند تعداد ادعاها و فرایند اندازه ادعاها خواهیم پرداخت. فرایند تعداد ادعاها را فرایند پواسون همگن با شدت λ $\{N(t) : t \geq ۱\}$ در نظر می‌گیریم که مستقل از $\{Z_k : k \geq ۱\}$، مقادیر ادعاها می‌باشد.

در فصل اول این پایان‌نامه ابتدا مقدماتی در مورد فرایندهای تصادفی ارائه می‌دهیم و فرایندهای پواسون، تجدید و لوی را به اختصار توضیح می‌دهیم. همچنین به توضیحاتی در مورد خاصیت بینهایت تقسیم‌پذیری که یکی از خواص فرایند لوی است می‌پردازیم.

در فصل دوم مقدمه‌ای بر بیمه و تاریخچه‌ی آن ارائه می‌دهیم و به بیان اصطلاحات متداول در بیمه، می‌پردازیم و فرایند کلاسیک مخاطره را معرفی کرده و طریقه‌ی محاسبه‌ی حق بیمه را

بیان می‌کنیم. همچنین توضیحاتی در مورد نرخ بهره و انواع آن و طریقه‌ی محاسبه‌ی مقدار سرمایه موجود با در نظر گرفتن نرخ بهره ارائه می‌دهیم. در انتهای فصل نرخ بهره تصادفی، زمان ورشکستکی، احتمال ورشکستگی و مقدار مورد انتظار تابع جریمه تخفیف یافته را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم توضیحاتی در مورد توزیع مقادیر ادعاها ارائه می‌دهیم و به محاسبه‌ی احتمال ورشکستگی در فرایند مخاطره کلاسیک می‌پردازیم. همچنین کران بالایی برای احتمال ورشکستگی در این نوع فرایندها معرفی می‌کنیم و در انتهای فصل به بیان چند تقریب برای محاسبه‌ی احتمال ورشکستگی در فرایند مخاطره کلاسیک می‌پردازیم.
در فصل چهارم فرایند مخاطره با بهره تصادفی را معرفی کرده و عباراتی دقیق برای احتمال ورشکستگی در این نوع فرایندها به دست می‌آوریم. همچنین کران‌هایی برای احتمال ورشکستگی در فرایند مخاطره با بهره تصادفی ارائه می‌دهیم و به بیان و اثبات لم‌ها و قضایای اصلی می‌پردازیم.

این پایان‌نامه تفصیل مقاله زیر است:

Kam C. Yuen, G. Wang, R. Wu, On the renewal risk process with stochastic interest, Stochastic processes and their applications, 116 (2006) 1496-1510.

در پایان امیدوارم این نوشتار در تحقیقات سایر دانشجویان مفید واقع شود.

فصل ۱

مقدماتی درباره فرایندهای تصادفی

مقدمه

فرایندهای تصادفی در احتمال مدرن و کاربرد احتمال در مباحث پیشرفته علوم از قبیل فیزیک، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و ... نقش اساسی و فزاینده دارد. از این رو بدون کمک اطلاعات و تکنیک‌های موجود در فرایندهای تصادفی، پیشرفت مهمی در علوم حاصل نخواهد شد. در نتیجه مطالعه و فراگیری این مباحث از ضروریات علوم امروزی است. امروزه نقش فرایندهای تصادفی و وسعت میدان کاربرد آن‌ها در زمینه‌های مختلف بسیار بارز است.
یکی از کاربردهای مهم فرایندهای تصادفی کاربرد آن در صنعت بیمه است. فرض کنید X_t تعداد تصادفات تا زمان t در شهری باشد، این فرایند برای شرکت‌های بیمه از اهمیت زیادی برخوردار است. بر اساس این فرایند و به کمک فرایندهای دیگر می‌توانند حق بیمه را مشخص کنند. هچنین می‌توان X_t را مقدار اندوخته‌ی شرکت بیمه تا زمان t در نظرگرفت، این فرایند در محاسبه‌ی احتمال ورشکستگی و تعیین زمان ورشکستگی و ... شرکت‌های بیمه نقش اساسی دارد.
برای درک بهتر این پایان‌نامه دانستن برخی تعاریف و قضایای مقدماتی ضروری است. لذا در این فصل به توضیح مقدماتی در مورد فرایند تصادفی می‌پردازیم. در ابتدای فصل فرایند تصادفی و تعاریفی مربوط به آن را به اختصار توضیح داده و در بخش‌های بعدی چند فرایند تصادفی، از جمله فرایند شمارشی، فرایند پواسون، فرایند تجدید، فرایند لوی و فرایند حرکت براونی را معرفی می‌کنیم. از مراجع [۲]، [۱۶]، [۲۳] و [۲۴] در بیان مطالب این فصل استفاده شده است.

۱.۱ فرایند تصادفی

فرض کنید T مجموعه‌ای دلخواه و به ازای هر $t \in T$، X_t متغیری تصادفی است. فرض کنید $E \subseteq R$، مجموعه ثابتی باشد و مقادیر متغیرهای تصادفی X_t در این مجموعه قرار داشته باشد. در این صورت مجموعه $\{X_t : t \in T\}$ را فرایند تصادفی با مجموعه اندیسگذار T و فضای حالت E می‌گوییم. اگر $A \subseteq E$ (یا $x \in E$) و $X_t \in A$ (یا $X_t = x$)، می‌گوییم فرایند در زمان (یا مرحله) t در مجموعه A (یا در حالت x) قرار دارد. اگر T مجموعه‌ای شمارا باشد، فرایند را زمان گسسته و اگر T مجموعه‌هایی به صورت $[\circ, \infty)$ و $(-\infty, \infty)$ باشد، فرایند را زمان پیوسته می‌گوییم. برای هر ω از فضای نمونه‌ای، مجموعه $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ را که یک دنباله یا یک تابع با مقادیر در E است، تحقق یا مسیر نمونه‌ای فرایند می‌گوییم.
حال به بیان تعاریفی در فرایندهای تصادفی می‌پردازیم.

◄ **۱.۱. تعریف .** در فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$، تفاضل $X_t - X_s$ که $s < t$ را نمو فرایند در فاصله (s,t) می‌گوییم.

◄ **۲.۱. تعریف .** فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$ دارای نموهای مستقل می‌باشد اگر به ازای هر n و هر $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$، نموهای $X_0, X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند.

◄ **۳.۱. تعریف .** فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$ دارای نموهای مانا است اگر به ازای هر $s < t$، توزیع نمو $X_t - X_s$ فقط به تفاضل t و s، یعنی $t - s$ بستگی داشته باشد. یعنی نموهای فرایند در فاصله‌هایی با طول‌های برابر از نظر احتمالاتی دارای یک ساختمان باشد. لذا در این‌گونه فرایندها مبداء زمان تأثیری ندارد و برای هر $n = 1, 2, \ldots$ و $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ توزیع $\Big(X(t_1 + h) - X(t_0 + h), \ldots, X(t_n + h) - X(t_{n-1} + h)\Big)$ به h وابسته نیست.

۲.۱ فرایند شمارشی

فرایند تصادفی $\{N(t) : t \geq 0\}$ را یک فرایند شمارشی گوییم هر گاه $N(t)$ تعداد کل رویدادهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند. فرایند شمارشی در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $N(t)$ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند.

۲) $N(t)$ صعودی است، یعنی $s \leq t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$ $(a.s)$.

۳) برای $s < t$، $N(t) - N(s)$ برابر تعداد رویدادهایی است که در فاصله $[s,t]$ رخ داده‌اند.

یکی از فرایندهای شمارشی مشهور که کاربردهای فراوان در بیمه دارد فرایند پواسون است.

۳.۱ فرایند پواسون

فرایند پواسون یک فرایند شمارشی است که در آن تعداد رویدادها در هر دوره زمانی معین از توزیع پواسون پیروی می‌کند.
فرایند $\{N(t) : t \geq 0\}$ را فرایند پواسون با نرخ $\lambda > 0$ گوییم اگر:

۱) $N(0) \equiv 0$ یعنی $P(N(0) = 0) = 1$.

۲) $\{N(t) : t \geq 0\}$ دارای نموهای مستقل و مانا باشد.

۳) به ازای هر $0 \le s < t$، نمو $N_t - N_s$ به عنوان یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda(t-s)$ باشد، به عبارتی دیگر:

$$P\Big(N(t) - N(s) = k\Big) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{\Big(\lambda(t-s)\Big)^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

با توجه به ویژگی سوم بیان شده در تعریف فرایند پواسون به ازای هر $t > 0$، $N(t)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λt است.

◂ **۴.۱. تعریف .** فرض کنید f و g دو تابع باشند. منظور از $f = o(g)$ یعنی به ازای هر $x \neq 0$ و $g(x) \neq 0$، $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

تعریف معادل دیگری که می‌توان برای فرایند پواسون ارائه داد به صورت زیر است:

◂ **۵.۱. تعریف .** فرایند $\{N(t) : t \geq 0\}$ را فرایند پواسون با نرخ $\lambda > 0$ گوییم اگر:

۱) $N(0) \equiv 0$ یعنی $P(N(0) = 0) = 1$.

۲) $\{N(t) : t \geq 0\}$ دارای نموهای مستقل و مانا باشد.

۳) به ازای هر $h > 0$ و $t > 0$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
&P\Big(N(t+h) - N(t) = 1\Big) = \lambda h + o(h) \ , \\
&P\Big(N(t+h) - N(t) > 1\Big) = o(h) \ , \\
&P\Big(N(t+h) - N(t) = 0\Big) = 1 - \lambda h + o(h) \ ,
\end{aligned}$$

که در آن $o(h)$ یک بینهایت کوچک است.
شرط (۳) که در تعریف ۵.۱ بیان شد، تضمین می‌کند که در هر لحظه (فاصله زمانی کوچک) تنها امکان رخ دادن یک پیشامد وجود دارد. به عبارتی دیگر در هر بار جهش، تنها جهشی به طول یک واحد خواهیم داشت بنابراین احتمال رخ دادن هم زمان دو پیشامد و یا بیشتر صفر است. توجه داشته باشید که فرایند پواسون یک فرایند از راست پیوسته است. گاهی فاصله زمانی بین وقوع پیشامدها حائز اهمیت است. بنابراین فرض می کنیم که $0 < T_1 < T_2 < \cdots$، به ترتیب زمان های وقوع اولین، دومین و ... پیشامد باشد. در این صورت طبق قضیه‌ای که در زیر بیان می‌شود متغیر زمان‌های انتظار بین دو پیشامد متوالی، یعنی $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ دارای توزیع نمایی است.

◄ **۶.۱. قضیه .**

در فرایند پواسون با نرخ λ متغیرهای تصادفی τ_i مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی با پارامتر λ هستند و بر عکس، اگر زمان‌های انتظار بین پیشامدهای متوالی مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، آن‌گاه $\{N(t) : t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون خواهد بود.
برهان: به [۲۳] مراجعه شود.

۴.۱ فرایند مرکب

فرض کنید $\{N(t) : t \geq 0\}$ فرایند شمارشی باشد و $Z_1, Z_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل، با توزیع یکسان F باشد، همچنین N و دنباله Z_kها را از یکدیگر مستقل فرض می‌کنیم. آن‌گاه فرایندی که به صورت $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k$ تعریف می‌شود یک فرایند مرکب می‌باشد.

◄ **۷.۱. تعریف .** اگر در فرایند مرکب، $\{N(t) : t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون با نرخ λ باشد، آن‌گاه یک فرایند پواسون مرکب خواهیم داشت. در فرایند پواسون مرکب، اگر $r, u \geq 0$ را به عنوان عددهای ثابت در نظر بگیریم و rt را تابعی خطی از زمان فرض کنیم، در این صورت فرایند تصادفی $\{u + rt - S(t), t \geq 0\}$ نیز یک فرایند پواسون مرکب خواهد بود که از یک مقدار ناصفر u شروع می‌شود.

◄ **۸.۱. قضیه .**

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با میانگین مشترک $\mathrm{E}(X)$ باشند. همچنین فرض کنید N متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی و مستقل از متغیرهای $X_1, X_2, \ldots$ باشد. در این صورت با فرض $\mathrm{E}(N) < \infty$ داریم:

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(N).$$

این قضیه به برابری والد مشهور است.
برهان: به [۲۴] مراجعه شود.

۵.۱ فرایند تجدید

فرض کنید $\tau_1, \tau_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با ویژگی‌های زیر باشند:

۱) $\tau_1, \tau_2, \ldots$ مستقل و هم توزیع باشند.

۲) $\tau_i \geq 0$.

F تابع توزیع مشترک τ_iها می‌باشد به طوری که به ازای $t \geq 0$، $F(t) = P(\tau_i \leq 0) = 0$ و بنا بر شرط (۲)، $F(0) \equiv 0$. با این شرایط فرایند $\tau = \{\tau_n : n \geq 0\}$ را یک فرایند تجدید می‌نامیم.
τ_n زمان بین وقوع دو پیشامد $(n-1)$ام و nام است، به کمک τ_nها می‌توان متغیر تصادفی جدیدی به صورت زیر ساخت:

$$T_0 = 0, T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_1 + \tau_2, \ldots, T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i.$$

که T_n زمان انتظار تا وقوع پیشامد nام است، در این صورت فرایند $T = \{T_n : n \geq 0\}$ را نیز یک فرایند تجدید می‌گوییم.
ملاحظه می‌شود که دو فرایند τ و T هم‌ارز یکدیگرند، زیرا با داشتن یکی می‌توان دیگری را ساخت. بیان دیگری برای فرایند تجدید که هم‌ارز فرایندهای معرفی شده است نیز وجود دارد. برای رسیدن به این بیان جدید، به ازای هر $t \geq 0$، متغیر تصادفی $N(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\}.$$

در این صورت با توجه به تعریفی که ارائه دادیم، فرایند تصادفی $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ را نیز یک فرایند تجدید می‌نامیم. دو فرایند τ و T، از نوع فرایندهای زمان گسسته‌اند در حالی که فرایند $N(t)$ زمان پیوسته است. اگر τ_i ها دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، فرایند $N(t)$ یک فرایند پواسون با نرخ λ است، که حالت خاصی از فرایند تجدید است.

۶.۱ فرایند لِوی

پیش از بررسی فرایند لوی، نخست به معرفی پییر لوی[1] به عنوان یکی از آمارداناِن مؤثر و بزرگ می‌پردازیم. لوی در ۱۵ سپتامبر سال ۱۸۸۶ در پاریس متولد شد و در ۱۵ دسامبر سال ۱۹۷۱

[1] Pierre Levy

در سن ۸۵ سالگی درگذشت. او ریاضی‌دانی بزرگ است که تحقیقات خاصش روی نظریه احتمال، معرفی مارتینگل‌ها، بسیار معروف است. فرایند لوی، اندازه لوی، ثابت لوی، توزیع لوی، توزیع پایدار لوی و ... نیز پس از او و با نام او نام‌گذاری شد. او نخستین مقاله خود را در ۱۹ سالگی منتشر کرد و در سال ۱۹۱۳ به مقام استادی رسید. استاد راهنمای رساله دکترای او هادامارد[۲] بود. او تا پایان عمر در دانشگاه پلی تکنیک پاریس به تدریس و تحقیق پرداخت. از معروفترین شاگردان او می‌توان مندلبرت[۳] را نام برد که در نظریه فرکتال‌ها نامی آشناست.

در نظریه احتمال، فرایند لوی یک فرایند تصادفی زمان پیوسته‌ی $\{X(t) : t \geq 0\}$ است، اگر سه شرط زیر برای آن برقرار باشد:

۱) $X(0) \equiv 0$ یعنی $P(X(0) = 0) = 1$.

۲) $\{X(t) : t \geq 0\}$ دارای نموهای مستقل و مانا باشد.

۳) مسیرهای فرایند از راست پیوسته و از چپ دارای حد باشند. در اصطلاح فرانسوی گفته می‌شود که دارای خاصیت $Cadlag$ باشد.

سه خاصیت مهم فرایند لوی عبارت است از:

۱) نموهای مستقل

۲) نموهای مانا

۳) بینهایت تقسیم پذیری

دو مورد نخست پیش‌تر تشریح شده‌اند، اکنون مورد سوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۶.۱ بینهایت تقسیم‌پذیری

مفهوم بینهایت تقسیم‌پذیری در دوره‌ی کوتاهی معرفی و گسترش داده شده است. این موضوع با تعریفی که دوفینتی[۱] از مفهوم بینهایت تقسیم‌پذیری در مباحث مربوط به فرایندهای تصادفی با نموهای مانا و مستقل ارائه کرد شروع شد. اولین پیشرفت در این زمینه همراه با نمایش فرم کانونی عمومی برای تابع مشخصه‌ی بینهایت تقسیم‌پذیر توسط لوی در سال ۱۹۳۴ انجام شد. افزون بر فرایندهای مانا با نمو مستقل، پرسش‌هایی در رابطه با قضیه حد مرکزی، منجر به مطالعه و معرفی بینهایت تقسیم‌پذیری و به طور خاص، خود جداپذیری و توزیع‌های پایدار

[۲] Hadamard
[۳] Mandelbrot
[۱] De Finetti

گردید. در طی دهه‌های چهل و پنجاه توجه اندک و اکثراً آکادمیک به این موضوع شده است. از حدود ۱۹۶۰ یک موج جدید از توجه به توزیع‌های بینهایت تقسیم‌پذیر شروع شد. کاربرد این توزیع‌ها در عمل مخصوصاً در نظریه زمان انتظار و مدل‌سازی‌های مربوط به آن، بسیار گسترده است. این امر منجر به ایجاد گسترش‌هایی در شناخت این توزیع‌ها از طریق توابع چگالی و توزیع، علاوه بر تابع مشخصه شد.

◄ **۹.۱. تعریف .** به بیان غیر رسمی تقسیم‌پذیری متغیر تصادفی X، خاصیتی از آن متغیر است که می‌گوید X می‌تواند به بخش‌های مستقلی تقسیم شود که همگی توزیع یکسانی دارند. به طور خاص برای $n \in N$ که $n \geq ۲$ می‌توان گفت X، n تقسیم‌پذیر است اگر متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $(i.i.d.)$، $Y_۱, \ldots, Y_n$ وجود داشته باشند به قسمی که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$X \overset{d}{=} Y_۱ + \ldots + Y_n. \qquad (۱.۱)$$

اگر رابطه (۱.۱) برای Yهای مستقل ولی نه لزوماً هم توزیع برقرار باشد، X را n جداپذیر می‌نامیم. شایان ذکر است که در متون قدیمی‌تر واژه‌ی جداپذیر به معنای تقسیم‌پذیر نیز به کار برده شده است که ما در این متن بین آن‌ها تمایز قائل می‌شویم. واضح است که تقسیم‌پذیری شرط قوی‌تری نسبت به جداپذیری می‌باشد. چنان‌که $n + ۱$ جدایی‌پذیری n جدایی‌پذیری را نتیجه می‌دهد، اما $n + ۱$ تقسیم‌پذیری لزوماً، n تقسیم‌پذیری را نتیجه نمی‌دهد.
در ادامه مثال ارائه شده را در نظر بگیرید.

◄ **۱۰.۱. مثال .** متغیر تصادفی $X \sim bin(۳,p)$، سه تقسیم‌پذیر است بدان معنا که می‌توان آن را به صورت حاصل جمع ۳ متغیر برنولی که هر یک دو مقدار صفر و یک را می‌گیرند، نوشت. در صورتی که واضح است که X دو تقسیم‌پذیر نیست چرا که اگر $X \overset{d}{=} Y_۱ + Y_۲$، هرگز $Y_۱$ و $Y_۲$ هم توزیع نخواهند بود.
در مدل‌سازی‌ها عموماً لازم است که یک متغیر تصادفی n تقسیم‌پذیر به ازای یک n خاص داشته باشیم. به عنوان مثال میزان ادعاهای عنوان شده در یک شرکت بیمه در طول یک سال را در نظر بگیرید. اگر X را متغیری تصادفی به منظور مدل‌سازی این پدیده در نظر بگیریم، می‌خواهیم X یک متغیر تصادفی ۱۲ تقسیم‌پذیر باشد بدان معنا که بنا بر رابطه (۱.۱)،

$$X \overset{d}{=} Y_۱ + \ldots + Y_{۱۲}$$

که Y_j، $j = ۱, \ldots, ۱۲$ نشان دهنده ادعاهای ارائه شده در ماه jام است.
از سویی ممکن است بخواهیم میزان ادعاهای ارائه شده را به صورت هفتگی بررسی کنیم، لذا به

یک متغیر تصادفی ۵۲ تقسیم‌پذیر احتیاج داریم. جز آن ممکن است بررسی میزان ادعاها به صورت روزانه مورد نظر باشد در این حالت یک X با ۳٦۵ بار تقسیم‌پذیر مورد نیاز است. همچنین اگر بررسی میزان خسارت به صورت ساعتی و ... مورد نیاز باشد به انواع مختلف تقسیم‌پذیری برای X نیاز داریم.
همان‌طور که اشاره شد $(n+1)$ تقسیم‌پذیری، n تقسیم‌پذیری را نتیجه نمی‌دهد لذا همواره یک متغیر تصادفی n تقسیم‌پذیر مطلوب، متغیری است که به ازای هر $n \in N$ تقسیم‌پذیر باشد. حال یک تعریف رسمی برای چنین متغیر تصادفی ارائه می‌دهیم.

◄ **۱.۱۱. تعریف .** متغیر تصادفی X را بینهایت تقسیم‌پذیر می‌گوییم اگر برای هر $n \in N$، آن را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$X \stackrel{d}{=} X_{n1} + \ldots + X_{nn}$$

که $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ مستقل‌اند و X_{nj} با X_n به ازای هر j و یک X_n دلخواه هم توزیع است. X_n را nامین عامل ترتیبی X می‌نامیم.
بنابراین بینهایت تقسیم‌پذیری X در واقع خاصیتی از توزیع X است، لذا توزیع، تابع توزیع، (تابع چگالی در صورت مطلقاً پیوسته بودن متغیر تصادفی) و هر تبدیل از یک متغیر تصادفی بینهایت تقسیم‌پذیر، بینهایت تقسیم‌پذیر خوانده می‌شود. از این امر نتیجه می‌شود که تابع توزیع F، بینهایت تقسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $n \in N$، پیچش nگانه‌ی تابع توزیع F_n با خودش برابر با F باشد. به بیان ریاضی تابع توزیع F، بینهایت تقسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر:

$$\forall n \in N \quad F = F_n^{*^n}.$$

همچنین تابع مشخصه ϕ بینهایت تقسیم‌پذیر نامیده می‌شود اگر و تنها اگر برای هر $n \in N$ این تابع، توان nام یک تابع مشخصه‌ی ϕ_n باشد. به بیان ریاضی تابع مشخصه‌ی ϕ بینهایت تقسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر:

$$\forall n \in N \quad \phi(u) = \{\phi_n(u)\}^n.$$

در این جا F_n و ϕ_n را به ترتیب، nامین عامل ترتیبی F و ϕ می‌نامیم.
از تعریف بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر X بینهایت تقسیم‌پذیر باشد برای هر $a \in R$، aX نیز بینهایت تقسیم‌پذیر است. همچنین $X+Y$ بینهایت تقسیم‌پذیر است اگر X و Y مستقل و هر دو بینهایت تقسیم‌پذیر باشند.

در ادامه برخی از خواص توزیع‌های بینهایت تقسیم‌پذیر را بیان می‌کنیم.

۱) بینهایت تقسیم‌پذیری یک توزیع، تحت عمل پیچش بسته است.

۲) می‌دانیم که هر توزیع F، می‌تواند به صورت $F = \alpha F_d + (۱ - \alpha)F_c$ تجزیه شود که $۰ \leq \alpha \leq ۱$ و F_d بخش گسسته‌ی تابع توزیع F و F_c بخش پیوسته‌ی آن است. حالت غیر بدیهی که $۰ < \alpha < ۱$ است را در نظر بگیرید در این صورت این تجزیه یکتاست. حال خاصیت دوم بیان می‌دارد که مولفه‌ی گسسته‌ی (F_d) از یک توزیع بینهایت تقسیم‌پذیر F بر روی R، بینهایت تقسیم‌پذیر است.
برهان: [۱۶] را ببینید.

۳) یک متغیر تصادفی ناتباهیده‌ی کران‌دار، بینهایت تقسیم‌پذیر نخواهد بود.
یک نتیجه که بلافاصله از خاصیت فوق به دست می‌آید آن است که مثلاً توزیع‌های برنولی، دوجمله‌ای و ... بینهایت تقسیم‌پذیر نیستند. در ادامه چند مثال از توزیع‌های معروف بینهایت تقسیم‌پذیر را ارائه می‌دهیم.

◄ **۱۲.۱. مثال .** فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$، آن‌گاه X بینهایت تقسیم‌پذیر است و برای هر $n \in N$، $X \sim N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^۲}{n})$.

◄ **۱۳.۱. مثال .** فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد، آن‌گاه X بینهایت تقسیم‌پذیر است و X_n دارای توزیع پواسون با پارامتر $\frac{\lambda}{n}$ خواهد بود.

◄ **۱۴.۱. مثال .** فرض کنید $X \sim \Gamma(r, \lambda)$، آن‌گاه X بینهایت تقسیم‌پذیر است و $X_n \sim \Gamma(\frac{r}{n}, \lambda)$. با قرار دادن $r = ۱$ یا $r = \frac{n}{۲}$ توزیع‌های نمایی و خی‌دو نیز بینهایت تقسیم‌پذیر خواهند شد.

۴) اگر ϕ یک تابع مشخصه‌ی بینهایت تقسیم‌پذیر باشد آن‌گاه برای هر $u \in R$، $\phi(u) \neq ۰$ و ϕ^t برای هر $t \in R$ یک تابع مشخصه است. به طور خاص برای $n \in N$، $\phi^{\frac{۱}{n}}$، nامین عامل ترتیبی ϕ می‌شود.

۵) هر توزیع بینهایت تقسیم‌پذیر، حد ضعیف یک دنباله از توزیع‌های پواسون آمیخته است.
از طریق نمایش کانونی فرمول‌هایی مشخص کننده برای تبدیل‌های توزیع‌های بینهایت تقسیم‌پذیر می‌توان یافت. به منظور یافتن چنین فرمول‌هایی فرض کنیم ϕ تابع مشخصه بینهایت تقسیم‌پذیر با nامین عامل ترتیبی ϕ_n باشد، می‌نویسیم:

$$\phi(u) = \{\phi_n(u)\}^n = \exp\ \Big[n \log(۱ - \{۱ - \phi_n(u)\})\Big].$$

از آن‌جا که طبق خاصیت ۴، وقتی $n \to \infty$ آن‌گاه $\phi_n(u) \to ۱$ و از طرفی وقتی $z \to ۰$

آن‌گاه $-\log[1-z] \sim z$، در می‌یابیم که ϕ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi(u) = \lim_{n\to\infty} \exp\Big[n\{\phi_n(u)\} - 1\Big].$$

در ادامه سه قضیه که به ترتیب فرم تابع مشخصه بینهایت تقسیم‌پذیر را برای یک حالت عمومی‌تر ارائه می‌دهند بیان می‌کنیم.

◄ **۱۵.۱. قضیه .**
یک تابع مختلط ϕ روی R تابع مشخصه‌ی یک توزیع بینهایت تقسیم‌پذیر ناپیوسته است اگر و تنها اگر ϕ دارای فرم زیر باشد:

$$\phi(u) = \exp\Big[iu\gamma + \lambda \int_R (e^{iux} - 1)\ dG(x)\Big],$$

که $\gamma \in R$ و $\lambda > 0$ و G تابع توزیعی است که در صفر پیوسته است. سه تایی کانونی (γ, λ, G) یکتاست.
برهان: [۱۶] را ببینید.
قضیه نمایش کانونی کلموگروف [1] نتیجه فوق را برای یک تابع توزیع پیوسته با واریانس متناهی تعمیم می‌دهد.

◄ **۱۶.۱. قضیه .** (نمایش کانونی کلموگروف)
یک تابع مختلط ϕ روی R تابع مشخصه‌ی یک توزیع بینهایت تقسیم‌پذیر با واریانس ناصفر متناهی است اگر و تنها اگر ϕ دارای فرم زیر باشد:

$$\phi(u) = \exp\Big[iu\mu + k \int_R (e^{iux} - 1 - iux)\frac{1}{x^2}\ dH(x)\Big],$$

که $\mu \in R$ و $k > 0$ و H تابع توزیع است. سه تایی کانونی (μ, k, H) یکتاست.
برهان: [۱۶] را ببینید.
قضیه نمایش کانونی لوی نتیجه فوق را برای حالت کلی تعمیم می‌دهد.

◄ **۱۷.۱. قضیه .**
یک تابع مختلط ϕ روی R تابع مشخصه‌ی یک توزیع بینهایت تقسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر ϕ دارای فرم زیر باشد:

$$\phi(u) = \exp\Big[iua - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{R\setminus\{0\}} (e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2})\ dM(x)\Big],$$

که $a \in R$ و $\sigma^2 \geq 0$ و M یک تابع از راست پیوسته است که روی $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ صعودی می‌باشد، همچنین اگر $x \to -\infty$ یا $x \to \infty$، آن‌گاه $M(x) \to 0$ و $M(x)$ در رابطه‌ی

[1] Kolomogorov

$\int_{(-1,1)\backslash\{0\}} x^2 \; dM(x) < \infty$ صدق می‌کند. سه تایی کانونی (a, σ^2, M) یکتاست.
برهان: [۱۶] را ببینید.
در پایان بحث دو مثال معروف از فرایند لوی را بیان می‌کنیم. از انواع فرایند لوی می‌توان به فرایند حرکت براونی و فرایند پواسون اشاره کرد. فرایند پواسون را از قبل معرفی کردیم اکنون فرایند حرکت براونی را تعریف می‌کنیم.

۷.۱ فرایند حرکت براونی

مشهور است کشف حرکت براونی نتیجه مطالعه رابرت برآون[۱] روی حرکت گرده‌ها در مایع بود. وی مشاهده نمود که این دانه‌ها درون مایع دارای حرکت‌اند و علاقه‌مند شد تا قانون و علت این حرکت را بیابد. اما از عهده این کار بر نیامد و مسئله بدون پاسخ باقی ماند. در سال ۱۹۰۵ میلادی انیشتین موفق به حل مسئله شد و علت حرکت را بمباران دانه‌های گرده توسط مولکول‌های مایع معرفی نمود. با نتایج حاصل از مطالعات انیشتین و مطالعات وینر در سال ۱۹۲۳ مدل این حرکت کاملاً بررسی و به صورت فرایند حرکت براونی بیان گردید.

فرایند پیوسته $\{X(t) : t \geq 0\}$ را یک حرکت براونی با پارامتر $\sigma > 0$ می‌گوییم هر گاه:

۱) $X(0) \equiv 0$ یعنی $P(X(0) = 0) = 1$.

۲) $\{X(t) : t \geq 0\}$ دارای نموهای مستقل و مانا باشد.

۳) به ازای هر $0 \leq s < t$، متغیر تصادفی $X(t) - X(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2(t-s)$ باشد، به عبارتی دیگر $X(t) - X(s) \sim N\Big(0, \sigma^2(t-s)\Big)$.

با توجه به ویژگی‌های بالا، به ازای هر $t > 0$، $X(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 t$ می‌باشد.
در انتها لازم است توضیحاتی مختصر در مورد انتگرال ریمان–استیلت‌یس داده شود.

۸.۱ انتگرال ریمان–استیلت‌یس

اگر c_k دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که برای آن $\sum c_k < \infty$ و اگر u_k دنباله‌ای در R باشد، در این صورت می‌توان به مجموع‌های $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(u_k)$ به عنوان انتگرال تعمیم یافته‌ای برای یک F مناسب، نگریست. در این حالت F جهشی برابر c_k در هر u_k دارد و $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(u_k) = \int_b^a f dF$.

[۱] Robert Brown

فصل ۲

مقدمه‌ای بر بیمه و معرفی فرایند مخاطره