بسم الله الرحمن الرحيم

۴۰۰۲۸

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تحت عنوان:

ضربهای بولی و MV - جبرهای ابرنرمال

استاد راهنما:

دکتر محمد مهدی زاهدی

استاد مشاور:

دکتر حسین محبی

مؤلف:

مسعود هاوشکی

تیر ۱۳۸۰

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی‌ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : مسعود هاوشکی

استاد راهنما: دکتر محمدمهدی زاهدی

استاد مشاور: دکتر حسین محبی

داور ۱ : دکتر ماشااله ماشین‌چی

داور ۲ : دکتر سیدناصر حسینی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و

روح بزرگ مهندس علیرضا افضلی‌پور

تشکر و قدردانی

خداوند را شاکرم که به من توفیق ادامه تحصیل عنایت فرمود و مرحله‌ای از مراحل تحصیل را به اتمام رسانیدم و این مهم بدون یاری اساتید بزرگواری که در تمامی دوران تحصیلم همواره مشوق من بوده‌اند غیرممکن بود.

این نوشتار بدون راهنمائی

استاد ارجمندم جناب **آقای دکتر محمد مهدی زاهدی** که بدون توجه به مکان و زمان دلسوزانه و با دقتی ویژه و علاقه‌مندی بسیار زیاد، متواضعانه مرا تشویق و راهنمائی می‌فرمودند.

استاد گرانقدر جناب **آقای دکتر حسین محبی** که از ابتدا تاکنون صبورانه و با تسلط بسیار بزرگوارانه مرا تشویق و راهنمائی فرموده‌اند.

هرگز سامان نمی‌یافت.

از اساتید محترم جناب **آقای دکتر ماشاالله ماشین چی** و جناب **آقای دکتر سید ناصر حسینی** که زحمت مطالعه و داوری این نوشتار را بر عهده داشته‌اند از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

از **پدر و مادر عزیزم** که همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اند و محیط آرامی را برای تحصیلم فراهم آوردند تشکر می‌کنم. امیدوارم که همواره سایه شما بر سر ما باشد.

و در انتها از بخش سفارشات خارجی و آقای زنگی آبادی که هرکدام به نوبه خود یاریها رسانده‌اند تشکر می‌کنم.

مسعود هاوشکی

تیر ۸۰

چکیده

پروفسور چانگ (C.C.Chang) در سال ۱۹۵۸ برای اولین بار مفهوم **MV** - جبر را برای اثبات تمامیت منطق لوکاسیویچ و تارسکی بطریق جبری، مطرح کرد و به بررسی خواص آن پرداخت. بعد از وی ریاضیدانان زیادی به تحقیق در این زمینه پرداختند.

در این نوشتار ما در چهار فصل با بیان نمایش بولی (ضعیف) و **MV** - جبرهای ابرنرمال به بررسی خواص MV - جبرهای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی فضای توپولوژیک X می‌پردازیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱

پیش نیازها و مقدمات

۱ . ۱ . جبر بول

۱.۱.۱. تعریف: به سیستم <B , + , . , ¯ , ۰ , ۱> که در آن B یک مجموعه ناتهی و "+" و "." اعمال دو تایی و "¯" یک عمل یکتایی و "۱", "۰" دو عضو ثابت و مجزا در B هستند. یک جبر بول گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $x.y = y.x$ (۲) $x+y = y+x$

(۳) $x.(y+z) = (x.y) + (x.z)$ (۴) $x+(y.z) = (x+y).(x+z)$

(۵) $x.۱ = x$ (۶) $x+۰ = x$

(۷) $x+\bar{x} = ۱$ (۸) $x.\bar{x} = ۰$

از این پس قرارداد می‌کنیم که B یک جبر بول باشد و x و y و z در B باشند.

۱.۱.۲. قضیه [۱. ۱. ۲، ۱۰] اگر $x+y = ۱$ و $x.y = ۰$ ، آنگاه $y = \bar{x}$.

۱.۱.۳. قضیه [۱. ۱. ۳، ۱۰] در جبر بول B روابط زیر برقرار است:

(۱) $x.x = x$ (۲) $x+x = x$

(۳) $x.۰ = ۰$ (۴) $x+۱ = ۱$

(۵) $x.(y+x) = x$ (۶) $x+(x.y) = x$

(۷) $x.(y.z) = (x.y).z$ (۸) $x+(y+z) = (x+y)+z$

(۹) $\overline{(x.y)} = \bar{x} + \bar{y}$ (۱۰) $\overline{(x+y)} = \bar{x} . \bar{y}$

(۱۱) $x.y = \overline{(\bar{x} + \bar{y})}$ (۱۲) $x+y = \overline{(\bar{x} . \bar{y})}$

(۱۳) $\bar{۱} = ۰$ (۱۴) $\bar{۰} = ۱$

(۱۵) $x+(\bar{x}.y) = x+y$ (۱۶) $x.(\bar{x} + y) = x.y$

(۱۷) $x . \bar{y} = ۰ \Leftrightarrow x.y = x$

۱.۱.۴. تعریف گوییم $x \le y$، هرگاه $x.y = x$ یا $x+y = y$.

۱.۱.۵. قضیه [۱. ۱. ۵، ۱۰] رابطه $\le$ ،تعریف شده در فوق، روی B یک رابطه ترتیب جزئی است.

۱.۱.۶. تعریف به مجموعه ناتهی I در B ایده‌آل گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) اگر $a \in I$ و $b \in I$، آنگاه $a+b \in I$.

(۲) اگر $a \in I$ و $b \in B$ و $b \le a$، آنگاه $b \in I$.

۱.۱.۷. تعریف (۱) ایده‌آل P از B را اوّل گوییم، هرگاه برای هر $a,b \in B$، $ab \in P$ نتیجه دهد که $a \in P$ یا $b \in P$.

(۲) ایده‌آل M از B را ماکسیمال گوییم، هرگاه $M \subseteq I \subseteq B$ که I ایده‌آلی از B است، نتیجه دهد که $I = B$ یا $I = M$.

۱.۱.۸. لم [۸. ۱. ۱، ۹] جبر B یک جبر بول است اگروفقط اگر هر ایده‌آل اوّل، ماکسیمال باشد.

۱.۱.۹. قضیه [۹. ۱. ۱، ۹] فرض کنید B یک جبر بول و P یک ایده‌آل اوّل باشد. اگر $P \subseteq I$ که I ایده‌آلی سره از B است، آنگاه $P = I$.

۱.۲. مشبکه

۱.۲.۱. تعریف مشبکه عبارتست از یک زوج مرتب $<L, \le>$ که L یک مجموعه ناتهی و $\le$ یک رابطه ترتیب جزئی روی L می‌باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

برای هر x و y در L مجموعه $\{x , y\}$ کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین در L داشته باشد.

کوچکترین کران بالا را با $x \vee y$ و بزرگترین کران پایین را با $x \wedge y$ نمایش می‌دهیم.

۱.۲.۲. قضیه [۱. ۲. ۲، ۱۰] برای هر x، y و z در مشبکه $<L, \leq>$ داریم:

(۱) $x \vee x = x$ (۲) $x \wedge x = x$

(۳) $x \vee y = y \vee x$ (۴) $x \wedge y = y \wedge x$

(۵) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (۶) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(۷) $x \vee (x \wedge y) = x$ (۸) $x \wedge (x \vee y) = x$

(۹) $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq y$ (۱۰) $x \vee y = y \Leftrightarrow x \leq y$

(۱۱) اگر $x \leq y$، آنگاه $x \wedge z \leq y \wedge z$ و $x \vee z \leq y \vee z$

۱.۲.۳. تعریف مشبکه $<L, \leq>$ را توزیعپذیر گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\forall x,y,z \in L,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(۲) $\forall x,y,z \in L,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

۱.۲.۴. تعریف اگر $<L, \leq>$ یک مشبکه باشد و $A \subseteq L$، آنگاه A را از بالا کراندار گوییم، هرگاه $x \in L$ موجود باشد بطوریکه برای هر a در A داشته باشیم: $a \leq x$. در این حالت گوییم x یک کران بالا برای A است. A را از پایین کراندار گوییم، هرگاه $y \in L$ موجود باشد بطوریکه برای هر a در A داشته باشیم: $y \leq a$ و در این حالت گوییم y یک کران پایین برای A است.

منظور از "۱ و ۰" در مشبکه $<L, \leq>$ بترتیب کران بالا و کران پائین در تمام L است. در صورت وجود "۱ و ۰" در یک مشبکه آن مشبکه را کراندار گوییم. در هر مشبکه، "۱ و ۰" در صورت وجود یکتا هستند. از این پس برای راحتی، مشبکه $<L, \leq>$ را به اختصار با L نمایش خواهیم داد.

۱.۲.۵. تعریف به مشبکه L، متممدار گوییم، هرگاه برای هر x در L، عضوی مانند $\bar{x}$ از L

موجود باشد بطوریکه $x\wedge \bar{x} = 0$ ، $x\vee \bar{x} = 1$.

مجموعه اعضای متمم‌دار L را با $B(L)$ نمایش می‌دهیم.

۱.۲.۶. قضیه [۱۰، ۶، ۲، ۱] یک مشبکه توزیع‌پذیر متمم‌دار همراه با اعمال "$\wedge$ ، $\vee$ ، $^{-}$" یک جبر بول است.

۱.۲.۷. قضیه [۱۰، ۷، ۲، ۱] برای هر z,y,x در مشبکه L دو شرط زیر با هم معادلند:

(۱) $x\wedge (y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$.

(۲) $x\vee (y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

۱.۲.۸. تعریف مشبکه L را کامل گوییم، هرگاه برای هر زیر مجموعه L' از آن، $supL'$ و $infL'$ در L موجود باشند. $supL'$ و $infL'$ را به ترتیب با $\vee L'$ و $\wedge L'$ نمایش می‌دهیم.

۱.۲.۹. تعریف فرض کنید L مشبکه باشد. دو عضو $x,y\in L$ مجزا نامیده می‌شوند اگر $z\leq x$ و $z\leq y$، نتیجه دهد که $z = 0$.

۱.۲.۱۰. تعریف فرض کنیم L یک مشبکه صفردار باشد. عنصر a^* از L را شبه متمم a گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $a\wedge a^* = 0$،

۲) اگر $x\in L$ بقسمی باشد که $a\wedge x = 0$ آنگاه $x\leq a^*$.

۱.۲.۱۱. تعریف زیر مجموعه ناتهی I از مشبکه L را یک ایده‌آل گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) اگر $a\in I$ و $b\in L$ و $b\leq a$، آنگاه $b\in I$.

(۲) اگر $a\in I$ و $b\in I$، آنگاه $a\vee b\in I$.

ایده‌آل تولید شده توسط مجموعه X را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$<X> = id(X) = \{y \in L \mid y \leq x_1 \vee \ldots \vee x_n,\ x_i \in X (i = 1, \ldots, n)\}$$

۱.۲.۱۲. تعریف (الف) ایده‌آل P از مشبکه L را اوّل گوییم، هرگاه برای هر $a,b \in L$، $a \wedge b \in P$ نتیجه دهد که $a \in P$ یا $b \in P$.

(ب) ایده‌آل اوّل P، ایده‌آل اوّل مینیمال متعلق به ایده‌ال I نامیده می‌شود، هرگاه:

(۱) $I \subseteq P$،

(۲) ایده‌آل اوّل Q که $Q \neq P$ و $I \subseteq Q \subseteq P$ وجود نداشته باشد.

یک ایده‌آل اوّل مینیمال متعلق به ایده‌آل صفر از یک مشبکه صفردار، یک ایده‌آل اوّل مینیمال نامیده می‌شود.

(پ) ایده‌آل سره M از L را یک ایده‌آل ماکسیمال گوییم، هرگاه $M \subseteq I \subseteq L$ که I ایده‌آلی از L است، نتیجه دهد که $I = L$ یا $I = M$.

قرارداد. از این پس فرض می‌کنیم که تمامی مشبکه‌ها توزیعپذیر و کامل و دارای "۰ و ۱" باشند. مگر خلاف آن ذکر شود.

۱.۲.۱۳. تعریف فرض کنید L یک مشبکه باشد یک عنصر a از L را فشرده گوئیم، هرگاه اگر $a \leq \vee X$، برای زیرمجموعه X از L برقرار باشد، آنگاه $a \leq \vee X_1$، برای زیرمجموعه‌ای متناهی از X مانند X_1 نیز برقرار باشد.

۱.۲.۱۴. تعریف فرض کنید L یک مشبکه کامل باشد. L را یک مشبکه جبری گوئیم، هرگاه هر عنصر L، سوپرمم تعدادی از عناصر فشرده L باشد.

۱.۲.۱۵ مثال فرض کنیم A یک مجموعه باشد مجموعه تمام زیر مجموعه‌های A همراه با

۷ و ۸ که بصورت

$$\vee B = \bigcup_{B_\alpha \in B} B_\alpha \ , \ \wedge B = \bigcap_{B_\alpha \in B} B_\alpha$$

تعریف می‌شوند بنا به [۴، ۳] یک مشبکه جبری است که در آن B زیرمجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های A است.

۱۶. ۲. ۱. **تعریف** فرض کنید L و L' مشبکه باشند. تابع $f:L \to L'$ را همریختی مشبکه‌ها گوییم، هرگاه:

(۱) f حافظ ترتیب باشد، یعنی اگر برای $x,y \in L$ داشته باشیم $x \leq y$ آنگاه $f(x) \leq f(y)$.

(۲) $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$.

یادداشت تعریف فوق معادل است با:

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \text{ و } f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \ , \forall \ x,y \in L \ .$$

تذکر فرض کنیم L_1 و L_2 دو مجموعه جزئاً مرتب باشند در این صورت $h:L_1 \to L_2$ همومرفیسم است هرگاه برای هر x و y متعلق به L_1 که $x \leq y$، آنگاه $f(x) \leq f(y)$.

۱۷. ۲. ۱. **تبصره** فرض کنیم L یک مشبکه کامل باشد و $C(L)$ مجموعه تمام عناصر فشرده L باشد. چون $0 \in C(L)$ است بنابراین $C(L) \neq \varnothing$.

۱۸. ۲. ۱. **تعریف** فرض کنیم $C(L)$ مجموعه تمام عناصر فشرده یک مشبکه کامل L باشد. یک زیرمجموعه غیرتهی I از $C(L)$ را ایده‌آل گوئیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) اگر $a \in I$ و $b \in I$ آنگاه $a \vee b \in I$،

(۲) اگر $a \in I$ و $b \in C(L)$ و $b \leq a$ آنگاه $b \in I$.

۱. ۲. ۱۹. قضیه [۱۳. ۳. ۲، ۶] فرض کنیم L یک مشبکه کامل باشد. L یک مشبکه جبری است اگر و فقط اگر مشبکه ایده‌الهای $C(L)$ با L ایزومرفیسم باشد.

۱. ۲. ۲۰. تعریف I را یک ایده ال استونی از مشبکه L گوئیم، هرگاه I توسط زیرمجموعه‌ای از $B(A)$ تولید شود.

تبصره طبق تعریف ایده‌آل تولید شده، I ایده‌آل استونی از L است اگر و فقط اگر برای هر $x\in I$ یک $e\in I\cap B(L)$ با $x\leq e$ وجود داشته باشد.

۱. ۲. ۲۱. تعریف I را یک فرا ایده‌آل استونی از مشبکه L گوئیم، هرگاه:

(۱) I یک ایده‌آل استونی سره باشد.

(۲) $I\cap B(L)$ ایده‌الی اوّل باشد.

۱. ۲. ۲۲. تعریف فرض کنید I و J ایده‌آلهایی از مشبکه L باشند، $I\vee J$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I\vee J = \langle I\cup J\rangle = \{x\in L \mid x\leq i\vee j \,,\, i \in I \,,\, j \in J\}$$

۱. ۲. ۲۳. لم اگر L یک مشبکه توزیعپذیر باشد آنگاه:

$$I\vee J = \{i\vee j \mid i \in I \,,\, j \in J\} .$$

اثبات فرض کنیم $t\in I\vee J$ طبق تعریف داریم: $t\leq i\vee j \,,\, i \in I \,,\, j \in J$.

بنابراین: $t = t\wedge(i\vee j)$.

$$t = t\wedge(i\vee j) = (t\wedge i) \vee (t\wedge j) .$$

چون $t\wedge i<i$ و $i \in I$ بنابراین طبق تعریف ایده‌آل داریم $t\wedge i \in I$. چون $t\wedge j<j$ و $j \in J$ بنابراین داریم: $t\wedge j \in J$. فرض کنیم $t\wedge i=i'$ و $t\wedge j=j'$ آنگاه داریم: $t=i'\vee j',\ i' \in I \,,\, j' \in J$