بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی دکتری رشته ی ریاضی گرایش آنالیز

شرایط بهینگی در مسائل نیمه نامتناهی غیرهموار

استاد راهنما:

دکتر صغری نوبختیان

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا پوریای ولی

پژوهشگر:

نادر کنزی

آذرماه ۱۳۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض (بهینه سازی) آقای نادر کنزی

تحت عنوان:

شرایط بهینگی در مسائل نیمه نامتناهی غیر هموار

در تاریخ ... ۸۷/۹/۷ ... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالـی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمدرضا پوربای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر نظام الدین مهدوی امیری	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر بیژن ظهوری زنگنه	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه

چکیده :

در این تحقیق ما ابتدا مسائل نیمه نا متناهی (SIP) غیر همواری را در نظر می گیریم که شـامل قیـد هـای نـا مـساوی هستند . چندین قید تعریفی برای این مسائل معرفی نموده وپس از ارائه نمودن روابط بین آن هـا چنـدین شـرط لازم وکـافی بـرای بهینگی یک نقطه ارائه خواهیم داد.

همچنین ما SIP هایی را در نظر خواهیم گرفت که مجموعه ی موجه آن ها توسط تعدادی نامتناهی از قید های مساوی و نامساوی و یک مجموعه ی مقید کننده تشکیل شده است . به منظور به دست آوردن شرایط بهینگی برای این مسائل ، ابتدا چنـدین قضیه ی تناوبی اثبات خو اهیم کرد ، و پس از معرفی چند قید تعریفی متناسب با آن ها ، شرایط لازم و کـافی KKT را ثابـت مـی نماییم .

در انتها ، توجه خود را به مسئله ی نیمه نا متناهی تعمیم یافته ی غیر هموار معطوف خواهیم کرد و بدون اسـتفاده از هـیچ گونه قید تعریفی ، شرط لازم FJ را برای آن ثابت می نماییم .

هدف اصلی این تحقیق ، کنار گذاشتن دو شرطی است که همه ی پیشنیان استفاده کرده اند : تحدب و مشتق پذیری.

واژگان کلیدی: مسئلهٔ نیمه نامتناهی – قید تعریفی – شرایط بهینگی – مخروط مماس – زیرمشتق کلارک – توابع منظم – مسئلهٔ نیمه نامتناهی تعمیم یافته .

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیشگفتار

۱—۱ تاریخچه

در این بخش تاریخچهٔ مختصری از بهینه سازیِ غیر خطی، قضیه های تناوبی، آنالیز غیرهموار، برنامه ریزی نیمه نامتناهی، و بهینه سازیِ غیرهموار را ارائه خواهیم داد. بدیهی است که در این بخش نیازی به معرفیِ مفاهیم ریاضی نخواهد بود.

۱—۱—۱ بهینه سازی غیر خطی

یک مسئلهٔ بهینه سازی غیر خطی، مسئله‌ای است که مجموعهٔ موجه آن توسط تعدادی متناهی از تساویها و نامساویها تعریف شده است که اولاً تمامیِ توابع هموار هستند و ثانیاً بُعد فضای مرجع متناهی است.

هرچند اکثر کتابها، فضای مورد بحث را فضای اقلیدسی با بعد متناهی فرض کرده اند، اما بعضی از مراجع (مانند [۱۱]) بعد آنرا نامتناهی در نظر گرفته‌اند و بعضی از منابع (مانند [۱۳۵]) فضای مورد بحث را یک منیفلد ریمانی فرض نموده‌اند.

• شرایط بهینگی:

در تاریخ بهینه سازی، اولین حکم مهمی که به چشم می خورد، قضیهٔ ضرایب لاگرانژ است که در سال ۱۷۸۸ ثابت شد. ناگفته نماند که روش مورد استفاده توسط لاگرانژ کاملاً جبری بود.

پس از او نام فارکاش و قضیهٔ مشهور وی که در سال ۱۹۰۲ ([۴۱]) منتشر شد خودنمائی می کند. وی ابتدا قضیهٔ تناوبیِ خود را ثابت کرد و بعد از آن به قضیهٔ بهینگی دست یافت ([۱۰] را ببینید). از آنجائی که او استاد فیزیک بود، قضیهٔ خود را در مکانیک تعادلی و اصول فوریه بکار برد که احکام وی در سال ۱۹۸۰ ([۱۳۳]) توسط پریکُپا تعمیم داده شد.

تا اینجا تمام مسائل فقط شامل قیدهای نامساوی بودند، تا اینکه در سال ۱۹۳۵ ([۲۵]) کاراتئودوری مسائل با قید تساوی را در نظر گرفت و در سال ۱۹۳۸ ([۱۵]) مسائل با قید تساوی توسط بِلیس مورد توجه خاص قرار گرفت. در همان هنگام بلیس در دانشگاه شیکاگو درسِ حساب تغییرات می داد. جائی که والِنتاین نیز در آنجا تدریس می کرد و این امر باعث آشنائی وی با این مسئله شد. والنتاین در سال ۱۹۳۸ ([۱۶۶]) احکام قابل توجهی بدست آورد. در سال ۱۹۳۹ ([۹۲]) شخصی به نام کاروش در تز دکتری خود که تحت نظر گِراوس می نوشت، جهشی در حل این مسئله ایجاد کرد. ناگفته نماند که کاروش مسائل شامل قید نامساوی را در نظر گرفت و حکم بسیار جالبی را با فرض نوعی شرطِ منظمی بدست آورد.

در سال ۱۹۴۸ ([۹۰]) شخصی به نام جان مسائل با قید نامساوی را در نظر گرفت و بدون فرض کردن هیچ شرط منظمی توانست حکمی ضعیفتر از حکم کاروش، ارائه دهد.

با ارائه شدن روش سیمبلکس در سالهای ۱۹۴۷ و ۱۹۴۸ و همچنین پیدا کردن روشهای دوگانی توسط نیومن([۱۲۶])، اکثریت بر آن شدند که این مفاهیم را برای مسائل غیر

خطی نیز تعمیم دهند. عنوان "برنامه ریزی غیر خطی" اولین بار توسط کان و تاکر در سال ۱۹۵۱ ([۹۶]) بکار برده شد. چون کار آنها در راستای کار کاروش بود حکم دوگانیِ ارائه شده توسط آنها را رابطهٔ کاروش—کان—تاکر می نامند.

- قیدهای تعریفی:

تفاوت عمدهٔ رابطه‌های فریز—جان و کاروش— کان—تاکر در این است که در رابطهٔ دوگانیِ فریز—جان ممکن است تابع هدف، اثر خود را از دست بدهد ولی در رابطهٔ کاروش—کان—تاکر تابع هدف، حتماً نقش ایفا می کند. برای رسیدن به این رابطهٔ قویتر به شرایط منظمی نیاز داریم که به قیدهای تعریفی معروفند. با توجه به اهمیت برنامه ریزی غیر خطی و شرایط بهینگی برای آنها، قیدهای تعریفی هم توسط بسیاری از نویسندگان مورد توجه قرار گرفتند، که معروفترینِ آنها عبارتند از اسلِیتر([۱۵۵])، آبادی([۱])، آرُو—هُریسز([۴])، کُتِل([۳۳])، گوییگنارد([۶۰])، مانگاساریان—فُرُمُویتز([۱۱۰])، و زانگویل([۱۷۰]). برای آشنایی با این قیدهای تعریفی می توان به مقالهٔ ([۱۲۹])، یا به کتاب ([۱۰۸]) مراجعه کرد.

- بهینه سازی محدب و دوگانگی:

در اکثر مسائل بهینه سازی شرایط بهینگی در یک همسایگی از نقطهٔ بهینه بررسی می شوند. ولی در نوعی مسئلهٔ بهینگی که به مسائل بهینه سازی محدب معروف است، این شرایط موضعی به صورت سرتاسری برقرارند. خواص بسیار خوبِ دیگری که می توان از مسائل محدب نام برد عبارتند از:

۱) یک جواب موضعی، جواب سرتاسری هم هست (خاصیت موضعی—سرتاسری).

۲) شرایط لازم، کافی نیز هستند.

۳) اکثر قضایای خوبِ دوگانی قابل اثباتند.

برای مطالعهٔ خواص خوب مسائل محدب می توان به کتاب ([۱۳۹]) مراجعه کرد.

بسیاری از محققان به دنبال شرایط ضعیفتری بودند که بعضی از خواص مسائل محدب را داشته باشند. تابعهای نیمه‌محدب و شبه‌محدب که به ترتیب در سالهای ۱۹۴۹ ([۴۵]) و ۱۹٦۵ ([۱۰۹]) توسط دِفانتی، و مانگاساریان معرفی شدند، گامی مؤثر در این راستا بودند. در سالهای ۱۹۷۰ ([۱۲۷]) و ۱۹۹۳ ([۹۳]) مفهوم توابع شبه‌محدب، مستقل از شرط مشتقپذیری تعریف و بررسی شدند.

عملکرد دوگانی برای اولین بار توسط فِنچِل در سال ۱۹۵۱ ([۴۲]) معرفی شد. مفهوم دوگانگی در سالهای ۱۹٦۳ ([۱۴۱]) و ۱۹٦۷ ([۱۲۵]) به ترتیب توسط راکفِلِر، و مُریوُ، به صورت دقیق به کار گرفته شد. چون قضیهٔ دوگانی که توسط فِنچل معرفی شده بود، دقیق و صحیح نبود، راکفلر قضیهٔ وی را به صورت دقیق، بیان و اثبات کرد. مفهوم نقطهٔ زینی شکل و ارتباط آن با دوگانگی را گُلشتِین در سال ۱۹۷۲ ([۴۹]) بررسی و معرفی نمود.

جزئیات بیشتر از تاریخچهٔ دوگانگی را می توان در کتاب مشترک راکفلر و وِتس ([۱۴۰]) ملاحظه کرد.

- روشهای عددی برای بهینه سازی:

ابتدایی‌ترین روشهای عددی که به منظور تقریب زدن جواب بهینه یک مسئله می‌باشند را می توان در کارهای نیوتن، لاگرانژ، و کوشی پیدا کرد. در کارهای اُیلر، لایبنیتز، برنولی، و وایرشتراس هم می توان احکامی در این راستا ملاحظه کرد. ولی برای سالهای طولانی این نگرش به فراموشی سپرده شد، تا اینکه کار کردن با کامپیوترهای رقمی و ارائه الگوریتمهای عددی رواج پیدا کرد. چون این مبحث به تحقیق ما مرتبط نمی شود، بحث دقیق و کاربردی از از آنرا به کتاب [۱۳٦] ارجاع می‌دهیم.

۱—۱—۲ آنالیز غیر هموار

یکی از مهمترین گرایشهای آنالیز تغییرات، بررسی کردن مجموعه‌ها، توابع، و نگاشتهای مجموعه—مقدارِ ناهموار است. نتیجه مستقیمِ این بحثها تعمیم مفهوم مشتق و بکارگیری آن در بررسی مسائل بهینه سازی است.

• مخروطهای مماس و نرمال:

مفهوم مخروطمماس برای یک مجموعهٔ محدب، به صورت مقدماتی توسط مینکوفسکی در سال ۱۹۱۱ ([۱۱۴]) و توسط فنچل در سال ۱۹۵۱ ([۴۲]) معرفی شد.

اولین کسی که مفهوم مخروط مماس را برای یک مجموعهٔ دلخواه معرفی کرد، بُلیگاند بود. وی مخروطِ منسوب به خود را در سال ۱۹۳۲ ([۲۰]) تعریف کرد. مخروط فوق توسط فرانکُفسکی در نظریهٔ کنترل بکار گرفته شد ([۹]).

مخروط مماس منظم در سال ۱۹۷۹ ([۱۴۴]) توسط راکفلر معرفی شد ولی در سالهای ۱۹۷۳ ([۳۰]) و ۱۹۷۵ ([۳۱]) مفهوم مجموعه‌های منظم توسط کلارک تعریف شده بود. معرفی مخروطهایی که به صورت حد مخروطهای دیگر هستند و الزاماً محدب نیستند در سال ۱۹۷۶ ([۱۱۵]) توسط مُردُخویچ انجام شد. ایدهٔ وی توسط خود مردخویچ در سالهای ۱۹۸۰ ([۱۱۶])، ۱۹۸۴ ([۱۱۸])، و ۱۹۸۸ ([۱۱۹]) و توسط کِروگِر در سال ۱۹۸۵ ([۹۴])، و همچنین توسط ایوف در سالهای ۱۹۸۱ ([۸۴])، و ۱۹۸۴ ([۸۵]) تعمیم داده شد و به صورت یک تکنیک بسیار قوی ارائه شد. آنها با کارهای خود دروازهٔ جدیدی را به سوی محققانِ آنالیز تغییرات گشودند.

• زیرمشتق

اولین زیرمشتق معرفی شده، زیرمشتق توابع محدب است که در سال ۱۹۶۳ ([۱۴۱]) توسط راکفلر معرفی شد. قدم اساسی بعدی در سال ۱۹۷۳ ([۳۰]) توسط کلارک برداشته شد که زیرمشتق را برای توابع موضعاً لیپ شیتز معرفی کرد. کلارک دو کار اساسی را محور تحقیقاتش قرار داد. اوّل معرفی مشتقِ جهتی توسط $\limsup$، دوّم محوریت دادن به تابع فاصله و معرفی مخروط مماس برای مجموعه‌های غیر محدب توسط این تابع.

در سال ۱۹۷۸ ([۱۳۰])، $\liminf$ برای تعریف زیرمشتق توسط پینُت در نظر گرفته شد که در سال ۱۹۸۱ ([۶]) مشتق هم مماس نامیده شد. زیر مشتق فوق در سال ۱۹۸۱ ([۸۵]) توسط ایوف، مشتقِ دینی نامیده شد (به افتخار دینی که در سال ۱۸۷۸ ([۳۷]) با $\liminf$ کار کرده بود).

راکفلر نیز در سالهای ۱۹۷۹ ([۱۴۳]) و ۱۹۸۱ ([۱۴۵]) دو زیرمشتق دیگر را معرفی کرد که تعمیمهایی از مشتقِ کلارک برای توابع غیر لیپ شیتز بودند.

در اینجا نیز معرفی زیرمشتقی که به صورت حدّ زیرمشتقهای دیگر تعریف می شود، و همچنین مستقل از مفهوم محدب سازی باشد، در سال ۱۹۷۶ ([۱۱۵]) توسط مردخویچ انجام شد. تحقیقات مشترک مردخویچ و کِروگِر در سال ۱۹۸۰ ([۹۵])، و همچنین تز دکتری کروگر به راهنمایی مردخویچ در سال ۱۹۸۱ ([۹۴]) منجر به تعریف زیرمشتقهای تقریبی، و فِرشه شد. اولین قوانین محاسباتی برای این زیرمشتقها را مردخویچ در سال ۱۹۸۴ ([۱۱۸]) پیدا شد. ایوف در سالهای ۱۹۸۴ ([۸۷])، ۱۹۸۶ ([۸۸])، و ۱۹۸۹ ([۸۹]) طِی مقالاتی، قدرت و اهمیت زیرمشتقِ مردخویچ را نمایان کرد.

برای دیدن ایده های دیگری در راستای تعریف زیرمشتق، می توان به مقالات میشل و پینوت در سالهای ۱۹۸۴ ([۱۱۲]) و ۱۹۹۲ ([۱۱۳])، و همچنین مقالهٔ تِریمَن در سال

۱۹۸۸ ([۱٦۵]) مراجعه کرد.

• نگاشتهای مجموعه—مقدار:

واسیلسکو که دانشجوی دکترای لِبِگ بود، در سال ۱۹۲۵ ([۱٦۷]) برای اولین بار نگاشتهای مجموعه— مقدار کراندارِ $\phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ را در نظر گرفت. در سال ۱۹۳۳ مفهوم پیوستگی و نیمه‌پیوستگی برای نگاشتهای $\phi : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$، به طور مستقل توسط بولیگاند([۲۱])، و کوراتوفسکی([۹۷]) معرفی شدند. جزئیات کار آنها را می توان در [۱۰٦] ملاحظه کرد.

مفهوم نیمه‌پیوستگی داخلی که در واقع به نوعی راه یافتن مفهوم تحدب به این نگاشتهابود، توسط راکفلر در سال ۱۹۷۱ ([۱۴۲]) معرفی شد. راکفلر در سال ۱۹۸۵ ([۱۴٦]) نگاشتهای شبه‌لیپ شیتز را تعریف کرد و آنها را با نگاشتهایی که اُبین در سال ۱۹۸۴ ([۷]) معرفی کرده بود (معروف به نگاشتهایی با خاصیت اُبین) مقایسه کرد.

اُبین در سال ۱۹۸۱ ([٦]) مفهوم مشتقِ گرافیک را برای نگاشتهای مجموعه—مقدار تعریف کرد که می توان جزئیات و پیشینهٔ آنرا در [۹] و [۸] ملاحظه کرد. در سال ۱۹۸۰ ([۱۱٦]) مردخویچ نگاشت غیرتحدب پذیر را معرفی کرد که در سال ۱۹۸۴ ([۸٦]) توسط ایوف هممشتق نامیده شد. کارهای عمیق و اساسیِ مردخویچ در سال ۱۹۹۴ ([۱۲۰])، و همچنین شاوُ و مردخویچ در سال ۱۹۹۷ ([۱۲۱]) اهمیت و کاربرد این مفهوم را هر چه بیشتر نمایان ساخت.

۱–۱–۳ بهینه سازی غیرهموار

در اینجا آن دسته از مسائل بهینه سازی که توابع قید و تابع هدف، همگی موضعاً لیپ شیتز هستند مدّ نظر ما هستند. در سال ۱۹۶۳ ([۱۴۱])، راکفلر و مُریوُ ([۱۲۴]) مستقل از هم مسئلهٔ بهینه کردن تابع f روی زیر مجموعه A از $\mathbb{R}^n$ را به یک مسئلهٔ بهینه سازیِ بدون قید که تابع هدف آن از پایین نیمه‌پیوسته است، تبدیل کردند. لازم به ذکر است که خودِ مفهومِ از پایین نیمه‌پیوسته، توسط بِئِر در سال ۱۸۹۹، در تز دکترایش معرفی شده بود.

انتخاب یک تابع لاگرانژینِ مناسب موضوع بحث بسیاری از محققان بود تا اینکه کلارک ([۲۹]) در کتاب خود یک لاگرانژین خوب را معرفی کرد. مردخویچ در سالهای ۱۹۸۰ ([۱۱۶]) و ۱۹۸۱ ([۱۱۷]) احکام وی را تعمیم داد و در سالهای ۱۹۷۹ ([۷۸])، ۱۹۸۱ ([۷۹])، و ۱۹۸۲ ([۸۰])، هیریارت–اوروتی با بیان جزئیات و مثالهای متنوع احکام وی را تحکیم کرد. تاریخچهٔ کامل از کارهای قدیمیتر در این زمینه را می توان در [۸۱] یافت.

در سال ۱۹۹۲ ([۱۲۸])، پاپالاردُ قید تعریفی مانگاساریان–فروموونیز را برای این مسئله‌ها تعریف کرد و احکام بدست آمده توسط گاووین در سال ۱۹۷۷ ([۴۶]) را تعمیم داد. لی در سال ۲۰۰۰ ([۱۰۱]) یازده نوع قید تعریفی (از جمله آبادی، گوییگنارد، اسلیتر، کُتِل، و غیره) را برای این مسئله تعریف کرده و روابط بین آنها را ارائه داد. تاریخچهٔ قدیمیتری از قیدهای تعریفی را می توان در کتابهای مردخویچ ([۱۲۳، ۱۲۲])، و راکفلر و وِتس ([۱۴۰]) پیگیری کرد.

با وجود آنکه آنالیز محدب نقش به‌سزایی در پیشرفت نظریهٔ بهینه سازی بازی کرد، ولی از آنجایی که اکثر مسائل کاربردی محدب نبودند ، بسیاری از محققان به دنبال شرایط ضعیفتری بودند که بتوان از آنها شرط موضعی–سرتاسری را بدست آورد. شاید بتوان گفت

هیچ تعریفی به اندازهٔ مفهوم توابع اینوِکس به این هدف نزدیک نشده است.

توابع اینوکس برای اولین بار توسط هَنسُن در سال ۱۹۸۱ ([۶۸]) در حالت مشتقپذیر تعریف شدند. برای حالت غیرهموار در سالهای ۱۹۹۵ ([۱۳۱])، ۱۹۹۰ ([۱۳۸])، و ۱۹۸۶ ([۳۴]) به ترتیب توسط فُنگ، رِیلَند، و گِراوِن معرفی شد. هَنسُن در سال ۱۹۹۹ ([۶۷]) نقش این توابع را در شرایط بهینگی نشان داد، و براندااس در سال ۲۰۰۳ ([۲۲]) اهمیت آنها در قضیه‌های تناوبی را آشکار کرد.

قدرت توابع اینوکس برای مسائلِ شامل قید نامساوی است، و برای مسائل شامل قید تساوی کارایی ندارند. در سال ۲۰۰۳ ([۱۵۱]) مفهوم توابع اینفاین توسط سَش تعریف شد. او در سال ۲۰۰۴ ([۱۵۲]) مفهوم مفید و مهمّ اینوکس—اینفاین را نیز معرفی کرده و برای مسائل شامل مساوی و نامساوی به کار گرفت. بعضی از مؤلفان در سدد تعمیم مفهوم اینوکس برآمدند. از آن جمله می توان به مقالات [۳، ۱۰۷، ۱۶۹، ۱۳] مراجعه کرد.

ناگفته نماند که این روالِ تعمیم همچنان ادامه دارد و می توان ادعا کرد یکی از مفاهیمی است که در ۲۵ سال گذشته بیشترین توجه بهینه سازان را به خود جلب کرده است.

۱—۱—۴ مسئله نیمه‌نامتناهی

یک مسئلهٔ نیمه‌نامتناهی که آنرا با SIP نمایش می دهیم، مسئلهٔ بهینه سازیی است که تعداد قیدهای نامساوی آن دلخواه (شاید نامتناهی) است و فضای مرجع، یک فضای اقلیدسی با بُعد متناهی است. یک حالت خاص مهمّ موقعی است که تمامی توابع خطی باشند که آنرا با LSIP نمایش می دهیم.

اولین مقاله در زمینهٔ LSIP در سال ۱۹۲۴ ([۶۶]) توسط هار نوشته شد. دیگر کسی به

این موضوع نپرداخت تا اینکه چارنِس، کُپِر، و کُرتانک در دو مقالهٔ مشترک خود در سالهای ۱۹۶۲([۲۶]) و ۱۹۶۳([۲۷]) اهمیت SIP را در بررسی مسائل اقتصادی، نظریهٔ بازیها، مکانیک و آمار نشان دادند.

چاپ شش کتاب، این مسئله را به شکل یکی از مسائل بسیار قابل توجه در بهینه سازی درآورد. این شش کتاب عبارتند از [۲۳، ۷۷، ۴۷، ۱۶۴، ۴۴، ۷۰].

تحقیقات اصلی در نظریهٔ SIP در سه راستا صورت می‌گیرند: ۱– شرایط بهینگی ۲– دوگانگی ۳– روشهای عددی.

- شرایط بهینگی، قیدهای تعریفی، و قضایای تناوبی:

تئوری بهینگی در SIP را می توان بررسی شرایط و معرفی روشهایی برای بدست آوردن رابطهٔ KKT برای این نوع مسائل دانست. اولین قید تعریفی برای LSIP را برُسُسکی در ۱۹۸۲([۲۳]) عنوان کرد که تعمیمی بود از قید تعریفی اسلیتر. گِلاشُف و گُستافسُن در سال ۱۹۸۳([۴۷]) تعمیمهایی از احکامی که بِنتال در سال ۱۹۸۰([۱۴]) ارائه داده بود را بیان کردند و نهایتاً این احکام برای مسائل پیوسته در سال ۱۹۸۸([۲۸]) توسط کریستُر عنوان و اثبات شدند. شرط بهینگی کُلمُگُرُف نیز در سال ۱۹۸۴ ([۲۴]) توسط بِرُسُسکی برای SIPها ثابت شد.

اولین قدم اساسی را گُبِرنا، لُپِز، و پاستُر با مقالهٔ مشترک خود در سال ۱۹۸۱([۵۸]) برداشتند. آنها شرط فارکاش–مینکوفسکی (FM) را برای LSIPها تعریف کردند. لِئون و وِرچِر در سالهای ۱۹۹۲([۹۸]) با استفاده از قید تعریفی مانگاساریان–فروموویتز (MFCQ) توانستند رابطهٔ KKT را ثابت کنند. گُبِرنا و لُپِز در سالهای ۱۹۹۲([۵۴، ۵۵]) و ۱۹۹۵([۵۶]) با استفاده از قیدهای تعریفیِ دیگری، رابطهٔ KKT را برای LSIP بدست

آوردند. برای ملاحظهٔ رده‌های خاصی از LSIPها می توان به مقالات [۲] و [۱۱۱] مراجعه کرد.

بُروین در سال ۱۹۸۱ ([۱۷]) برای اولین بار یک SIP محدب را در نظر گرفت، و توانست مسئله‌ای با تعداد متناهی قید بسازد که همان جواب را داشته باشد. لُپِز و وِرچِر در سال ۱۹۸۳ ([۱۰۳]) با استفاده از خواص نقطهٔ زینی شکل توانستند رابطهٔ KKT را برای یک SIP محدب ثابت کنند.

خاصیت FM در سال ۱۹۹۹ ([۱۳۴]) توسط پونِت و پس از او توسط فاجاردُ و لپز([۳۹]) برای SIPهای محدب تعمیم داده شد و منجر به اثبات روابط KKT شد. در سال ۲۰۰۰ ([۱۰۰]) لی، ناهاک، و سینگر قید تعریفی آبادی را برای SIP محدب تعریف کردند و در سال ۲۰۰۴ ([۱۵٦]) اِستِین قیدهای تعریفی آبادی، و و مانگاساریان—فروموویتیز را برای SIPهای مشتقپذیر تعریف نمود.

بالاخره در سالهای ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸ طِی مقالاتِ [۱۷۱، ۳٦، ۱۹] قیدهای تعریفیِ پایه‌ای و کُتِل برای یک SIP با توابع از پایین نیمه‌پیوسته تعریف شدند و روابط KKT اثبات گشتند.

اولین قضیهٔ تناوبی نیمه نامتناهی توسط هار در سال ۱۹۲۴ ([٦٦]) بیان شد که وی یک سیستم خطی با قیدهای نامساوی را در نظر گرفت. تعمیمهای قضیهٔ فارکاش برای حالت نیمه نامتناهی توسط شو در سال ۱۹٦٦ ([۱۷۲]) و فان در سال ۱۹٦۸ ([۴۰]) انجام شد. بعد از چاپِ دو مقالهٔ معروفِ گوبیِنِر در سالهای ۱۹۸۷ ([٦۳]) و ۱۹۸۹ ([٦۴])، سه مقالهٔ [٦۵، ۴۸، ٦۹] را می توان مهمترین کارهای انجام شده در راستای بدست آوردن قضایای تناوبی مناسب برای SIPها دانست. بالاخره در سال ۲۰۰۵ ([۱۰۲]) لُپِز و لِگاس توانستند

تعمیمهای مناسبی از قضیهٔ فارکاش را بیان و اثبات کنند.

• دوگانگی:

هدفِ بحث دوگانگی برای SIP، اولاً معرفی یک دوگان مناسب برای آن است، و ثانیاً بدست آوردن شرایطی است که جهشِ دوگانگی صفر باشد. در سالهای ۱۹٦۲ ([۲٦]) و ۱۹٦۵ ([۳۸]) این اهداف برای LSIPها بدست آمد. مهمترین گامها برای رسیدن به این اهداف برای یک SIP محدب را می توان در منابع [۱۵۴، ۵۳، ۵۲، ۵۱، ۵۰، ۸۳، ۱٦] ملاحظه کرد. فهرست کاملی از منابع موجود در این زمینه را می توان در [۵۷] یافت.

• روشهای عددی:

اولین مقاله در راستای تقریب جواب بهینه برای یک SIP نوسط گُستافسُن و کُتانک در سال ۱۹۷۳ ([٦۱]) نوشته شد. روشهای عددی بسیاری برای SIPها معرفی شده‌اند که همهٔ آنها را می توان در پنج رده طبقه بندی کرد:

A) روشهای جدا کننده

B) روشهای کاهش دهنده

C) روشهای معاوضه گر

D) روشهای سیمپلکس وار

E) روشهای نزول دهنده

سیر تکاملی این روشها، و همچنین مثالها و منابع آنها را می توان در [۷٦، ۴۳، ٦۲، ۷۱] یافت. برای دیدن الگوریتمهای کامپیوتری همراه با جزئیاتِ لازم، می توان به منابع [۱۳۷، ۱۰۴، ۷۲، ۵۹] رجوع کرد.