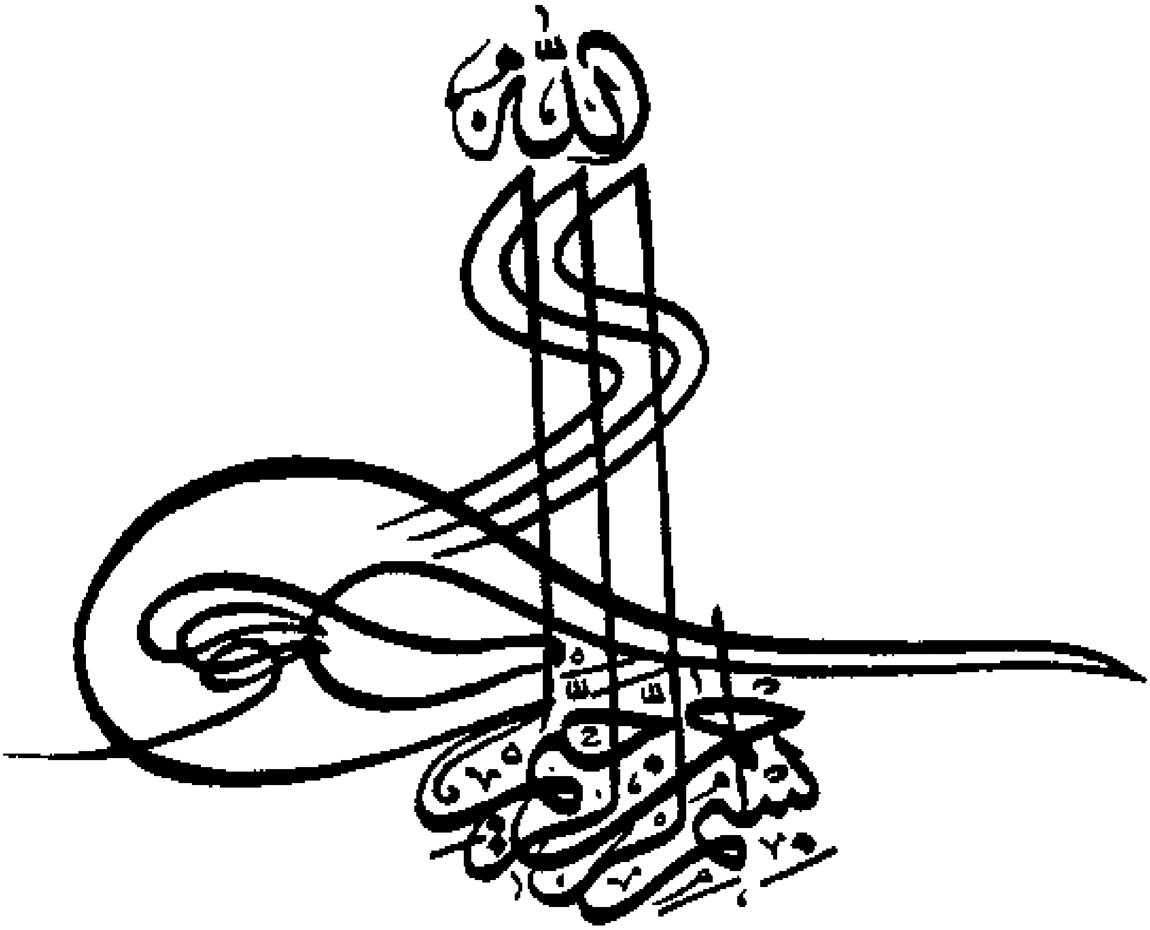
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

گرایش محض

عنوان:

روش هیروتا برای جواب های چند سولیتونی معادلات امواج آب های کم عمق

از :

سمانه زکریایی

استاد راهنما :

دکتر نصیرتقی زاده

تیر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر بزرگوار

مادر عزیز

و

همسر مهربانم

که گل های زندگیم هستند.

تقدیر و تشکر

سپاس بی کران ایزد منان را که در پرتو لایزالش توفیق آموختن میسر گردید تا منت پذیر آستان کبریایش گردیم.

بر خود لازم می دانم که از استاد گرانقدر و مهربانم آقای دکتر تقی زاده به خاطر زحمات فراوان، از آقای دکتر درستکار نماینده تحصیلات تکمیلی، از آقای دکتر بهروز فتحی و آقای دکتر جعفر بی آزار به عنوان داور، نهایت تشکر را داشته باشم.

همچنین از خانواده دوست داشتنیم،از پدر و مادر مهربانم، که در تمامی مراحل زندگیم، حامیان من بودند تشکر و قدردانی ویژه دارم.

فهرست

عنوان **صفحه**

چکیده

روش هیروتا برای جواب های چند سولیتونی معادلات امواج آب های کم عمق

سمانه زکریایی

ما در این پایان نامه علاقه مند هستیم ، که جواب های چند سولیتونی سه مدل معادله ی موج های آب کم عمق را به دست آوریم. سه مدل معادله به طور کامل انتگرال پذیر هستند. از روش دو خطی هیروتا برای تعیین جواب های چند سولیتونی این معادلات استفاده خواهیم کرد. روش tanh-coth را نیز برای به دست آوردن جواب یگانه سولیتون و سایر جواب های این سه معادله به کار خواهیم برد. مشخص خواهد شد که در روش دو خطی هیروتا، این سه معادله رابطه ی پراکندگی خطی متمایزی دارند ولی چند جمله ای های نمایی آن ها دارای ضرایب یکسان می باشد.

کلید واژه : روش دو خطی Hirota، روش Hereman ، روش tanh-coth، جواب های چند سولیتونی، معادله های موج

Abstract :

The Hirota, method for multiple – soliton solutions for equations of shallow water waves.

s. zakaryaiee

In this dissertation we are interested in obtaing multiple-soliton solutions for three model equations for shallow water waves. The three model are completely integrable. The Hirota bilinear method is used to determine multiple-soliton solutions for these equations. The tanh-coth method is used to obtain single soliton solutions and other solutions for these three models. The three models have different linear dispersion relations, but possess the same coefficients for the polynomials of exponentials.

Key word : Hirota bilinear method, Hereman method, tanh-coth method, Multiple-soliton solutions, Shallow water waves equations.

مقدمه

هیتارینتا[۱,۲] در مدل سازی امواج آب های کم عمق یک معادله ارائه داد که به همین نام مشهور است. به طور کامل انتگرال پذیر بودن و داشتن جواب های N-سولیتون این معادله به وسیله ی هیروتا [۱,۲] و هرمان [۳,۴]   اثبات می شود. دراین پایان نامه، این مدل به دو مدل کاملا انتگرال پذیر دیگر برای موج آب کم عمق توسعه داده می شود. از روش دو خطی هیروتا [۵] به طور گسترده ای برای حل دستی مسائل و همچنین برای جواب های چند سولیتونی استفاده می شود. روش دو خطی هیروتا قوی تر است و نسبت به روش های دیگر دارای خواص عمده ای است و این سبب کاربردی تر شدن این روش برای تعیین جوابهای چند سولیتونی خواهد بود.

معادله ی KdV را به صورت زیر داریم

$$u_{\mathrm{t}}+6uu_x+u_{xxx}=0. \qquad (۱)$$

در جملاتی که دارای عملگر دوخطی هستند [۵-۱] معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$D_{\mathrm{x}}(D_t+D_x^3)f.f=0. \qquad (۲)$$

در واقع رابطه ی (۲) صورت دیگری از رابطه ی (۱) است که با تعریف معمولی از عملگر دو خطی هیروتا [۵]،

$$D_t^n D_x^m\{a.b\}=\ (\partial_x-\partial_{x'})^n(\partial_t-\partial_{t'})^m a(x,t)b(x',t')\ |_{\,x=x',t=t'}\quad , \qquad (۳)$$

و بیان بعضی از جزئیات D- عملگرهای دو خطی هیروتا

$$\frac{D_t^2 f.f}{f^2}=u_{tt}\,dx\,dx,$$

$$\frac{D_t {D_x}^3 f.f}{f^2}=u_{xt}+3u\int u_t\,dx\,,$$

$$\frac{D_t^2 f.f}{f^2}=u\,, \qquad (۴)$$

$$\frac{D_x^4 f.f}{f^2}=u_{2x}+3u^2,$$

$$\frac{D_t D_x f.f}{f^2}=\ln(f^2)_{xt},$$

$$\frac{D_x^6 f.f}{f^2}=u_{4x}+15uu_{2x}+15u^3.$$

بیان شده است.

لازم به ذکر است که در معادله (۱) ، $u(x,t)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$u(x,t)=2\frac{\partial^2\,ln\,f(x,t)}{\partial x^2}\,, \qquad (۵)$$

که در آن $f(x,t)$ با بسط زیر معین می شود،

$$f(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x,t), \qquad (۶)$$

و ε یک پارامتر کوچک است و $f_n(x,t)$ برای $(n = 1,2,\dots)$ توابع مجهولی هستند که با جانشین کردن معادله های اخیر در شکل دو خطی و حل معادله های حاصل و سپس با مساوی قرار دادن ضرایب جملات با توان های مساوی ε به دست می آیند.

نشان می دهیم که رابطه ی (۲) صورت دیگری از رابطه ی (۱) است.

با استفاده از رابطه ی (۵) معادله KdV به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 = 0, \qquad (۷)$$

از سوی دیگر با استفاده از تعریف عملگر دو خطی هیروتا یعنی رابطه ی (۳)، فرض می کنیم که عملگر $D_t D_x$ روی تابع $f.f$ اثر کند در این صورت داریم

$$\begin{aligned} D_t D_x\{f.f\} &= (\partial_{\mathrm{x}} - \partial_{\mathrm{x}'})\,(\partial_{\mathrm{t}} - \partial_{\mathrm{t}'})\{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{t}).\,\mathrm{f}(\mathrm{x}',\mathrm{t}')\}|_{\,x=x',t=t'} \\ &= f_{xt}f + f_{xt}f - f_t f_x - f_x f_t \\ &= 2(ff_{xt} - f_x f_t). \end{aligned} \qquad (۸)$$

ملاحظه می کنیم که این جملات دو جمله ی اول معادله ی (۷) ، با ضریب دو است. اکنون D_x^4 را روی $f.f$ اثر می دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D_x^4\{f.f\} &= (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'})^4\{f(x,t).\,f(x',t')\}|_{\,x=x',t=t'} \\ &= f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 6f_{xx}f_{xx} - 4f_x f_{xxx} + ff_{xxxx} \\ &= 2(ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2). \end{aligned} \qquad (۹)$$

مشاهده می شود که این جملات ادامه جملات رابطه ی (۷) می باشد، بنابراین با استفاده از روابط (۸) و (۹) این نتیجه به دست می آید که معادله KdV با استفاده از عملگر دو خطی هیروتا به صورت

$$D_x(D_t + D_x^3)f.f = 0,$$

نوشته می شود که همان رابطه ی (۲) است.

نوع جدید از معادله دو خطی با جای گزین کردن عملگر D_t به جای D_x

$$D_t(D_t + D_x^3)f.f = 0, \qquad (۱۰)$$

وسپس با استفاده از رابطه ی (۵) خواهیم داشت

$$u_{tt} + u_{xxxt} + 3(2u_x u_t + uu_{xt}) + 3u_{xx}\int u_t\, dx = 0. \qquad (۱۱)$$

معادله (۱۱) با استفاده از روابط (۴) نیز به صورت زیر به دست می آید.

از آنجایی که $f^2 \neq 0$ طرفین (۱۰) را در $\frac{1}{f^2}$ ضرب می کنیم داریم

$$\frac{D_t^2 f.f}{f^2} + \frac{D_t {D_x}^3 f.f}{f^2} = 0, \tag{۱۲}$$

با استفاده از روابط (۴)، معادله (۱۲) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$u_{tt}\, dx\, dx + u_{xt} + 3u \int u_t\, dx = 0, \tag{۱۳}$$

اگر از طرفین رابطه ی (۱۳) نسبت به x مشتقات اول و دوم را محاسبه کنیم داریم

مشق اول

$$\frac{d}{dx}(u_{tt}\, dx\, dx + u_{xt} + 3u \int u_t\, dx = 0),$$

$$u_{tt}\, dx + u_{xxt} + 3u_x \int u_t\, dx + 3uu_x = 0.$$

مشتق دوم

$$\frac{d}{dx}\left(u_{tt}\, dx + u_{xxt} + 3u_x \int u_t\, dx + 3uu_x = 0\right),$$

$$u_{tt} + u_{xxxt} + 3u_{xx} \int u_t\, dx + 6u_x u_t + 3uu_{xt} = 0\ ,$$

در نتیجه

$$u_{tt} + u_{xxxt} + 3(2u_x u_t + uu_{xt}) + 3u_{xx} \int u_t\, dx = 0\ .$$

نتیجه ی مهمی که حاصل می شود این است که معادله ی (۱۱) را می توان با دو بار مشتق گیری از رابطه ی (۱۳) به دست آورد.

با این عمل دو هدف دنبال می شود.

اول این که، دومین و سومین مدل معادله برای موج های آب کم عمق را با بسط مدل هیتارینتا [۲,۱] که در فصل اول این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته است، به دست خواهیم آورد. دوم این که از روش $tanh - coth$ [۷,۶] برای به دست آوردن جواب های یگانه سولیتون و همچنین جواب های متناوب این سه مدل معادله استفاده می شودکه این موضوع نیز در بخش دوم پایان نامه بررسی شده است. از روش هیروتا [۵] و روش هرمان [۴,۳] نیز برای تعیین جواب های چند سولیتونی [۹,۸,۷] این معادلات که در بخش سوم پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته است، استفاده خواهد شد.

فصل اول

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

الف) نکاتی از مقدمه معادله دیفرانسیل

۱-۱ تعریف معادله دیفرانسیل

هر رابطه ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسب به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می نامیم . اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل را معمولی (ODE) و اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) می نامند،

$$y''' + 3y' - (y')^2 + \sin x = 0,$$

معمولی و معادله ای از نوع زیر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial \mathrm{t}} = 0,$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند.

۱_۲ تعریف مرتبه معادله دیفرانسیل

مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می نامند.

۱-۳ تعریف درجه معادله دیفرانسیل

توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را درجه آن معادله دیفرانسیل می نامند.

۱-۴ تعریف

اگر $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به طوری که x_{k} و $k = 1,2, \dots, n$ ،n متغیر مستقل فرض شود، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در حالت کلی به صورت زیر می باشد

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}, \dots\right) = 0,$$

اگر F نسبت به u و مشتقات آن خطی باشد، معادله دیفرانسیل را خطی گویند،

اگر F نسبت به u و مشتقات آن غیر خطی باشد، معادله دیفرانسیل را غیرخطی گویند.

۱-۵ مثال

معادله

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + x \frac{\partial u}{\partial x} + 2u = sin\, x,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم و خطی است.

۱-۶ مثال

معادله

$$\frac{\partial u}{\partial x}+xu^2=0,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول وغیر خطی است.

۱-۷ تعریف

تابع $F(x,y)$ را همگن از رتبه n گویند، هر گاه

$$F(tx,ty)=t^n\,F(x,y).$$

۱-۸ تعریف

به ازای دنباله $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی عبارت

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1+\cdots+x_n+\cdots \qquad (۱-۸-۱)$$

را یک سری نامتناهی می گویند و $S_n = x_1+\cdots+x_n$ را مجموع جزئی nام سری (۱-۸ ۱) می گویند. اگر $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ، سری (۱-۸-۱) را همگرا گویند.به عنوان مثال $\sum_{n=1}^{\infty} ra^{n-1}$ را سری هندسی گویند، وقتی که $|a|<1$ سری هندسی همگرا است و مجموع آن برابر است با

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r(1-a_n)}{1-a}=\frac{r}{1-a}.$$

۱-۹ تعریف

$(V,+,\times)$ را یک فضای برداری روی میدان F می گویند هر گاه به ازاء هر c_1, c_2 از F و هر x, y, z از V داشته باشیم

1) $x+y=y+x,$

2) $(x+y)+z=x+(y+z),$

3) $\exists p_0\in V \quad x+p_0=x,$

4) $\exists q\in V \quad x+q=p_0,$

5) $(c_1c_2)\times x=c_1\times(c_2x),$

6) $c_1(x+y)=c_1\times x+c_1\times y,$

7) $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z).$

۱-۱۰ تعریف

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد W زیر فضایی از V است، اگر وتنها اگر

$$\forall\alpha,\beta\in W,\, c\in F:\ c\alpha+\beta\in W.$$

۱-۱۱ تعریف

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد، بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ عضو V را وابسته خطی می نامند، هرگاه اسکالرهای $c_1, \dots, c_n$ که همگی صفر نیستند وجود داشته باشدبه طوری که $c_1\alpha_1 + \cdots c_n\alpha_n = 0$ و مجموعه ای که وابسته نباشد مستقل خطی است.

۱ - ۱۲ تعریف پایه و بعد

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد زیر مجموعه نا تهی B از V یک پایهV می نامند، هرگاه B مستقل خطی باشد و فضایV را تولید کند، فضای V با بعد متناهی است، هرگاه یک پایه متناهی داشته باشد و بعد V را با $\dim(V)$ نشان می دهیم.

۱-۱۳ تعریف

فرض کنید U وV دو فضای برداری روی میدانF باشند، تابع $L: U \to V$ یک عملگر خطی است، هرگاه:

$$1) \quad \forall x, y \in U, \qquad L(x+y) = L(x) + L(y),$$

$$2) \quad \forall x \in U, \qquad \forall c \in F \qquad L(cx) = cL(x).$$

۱-۱۴ تعریف

تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x_0$ تحلیلی می نامند هر گاه سری توان به صورت زیر موجود باشد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}\ (x - x_0)^n,$$

به عبارت دیگر مشتق تابع $f(x)$ از هر مرتبه ای در نقطه $x = x_0$ موجود باشد.

۱-۱۵ تعریف

اگرA یک ماتریس ثابت $n \times n$ وI ماتریس ثابت همانی $n \times n$ باشد آن گاه چند جمله ای $\det(A - \lambda I) = 0$ را معادله مشخصه متناظر با ماتریس A گویند و ریشه های این چند جمله ای را مقادیر ویژه ماتریس A گویند. بردار غیر صفر x که در رابطه $Ax = \lambda x$ صدق کند بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ ماتریس A گویند.

۱-۱۶ تعریف جواب عمومی

به ازای هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعریف شده هر معادله ای بر حسب توابعی از متغیر های مستقل که در معادله دیفرانسیل بامشتقات جزئی صدق کند، جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق نامیده خواهد شد.

۱- ۱۷ تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه nام به یک دستگاه شامل n معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مرتبه nام زیر را در نظر می گیریم

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad y = y(x), \qquad (۱-۱۷-۱)$$

اگر از رابطه (۱-۱۷-۱) بتوان y^{n} را محاسبه نمود آنگاه داریم

$$y^{\mathrm{n}} = \mathrm{g}\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \qquad (۲-۱۷-۱)$$

معادله دیفرانسیل (۱-۱۷-۲) را صورت نرمال (۱-۱۷-۱) می نامند در این صورت با اختیار توابع زیر

$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y', \\ y_3 = y'', \\ \quad \vdots \\ y_n = y^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (۳-۱۷-۱)$$

و مشتق گیری از معادلات (۱-۱۷-۳) ، داریم

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2, \\ y_2' = y'' = y_3, \\ \quad \vdots \\ y_n' = y^n = g\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (۴-۱۷-۱)$$

حال اگر فرض کنیم

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

آنگاه با توجه به رابطه ی (۱-۱۷-۴) داریم

$$\begin{pmatrix} {y_1}'(x) \\ {y_2}'(x) \\ \vdots \\ {y_n}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{y}_2 \\ \mathrm{y}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, Y(x)) \\ f_2(x, Y(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, Y(x)) \end{pmatrix} = f\left(x, Y(x)\right),$$

بنابراین خواهیم داشت

$$Y'(\mathrm{x}) = f\left(x, Y(x)\right),$$

که یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

ب) شرایط وجود جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

۱-۱۸ وجود یکتایی جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

شرط لیپ - شیتس

تابع $f(x,y)$ با دامنه ی $D\subseteq R^{n+1}$ نسبت به y در شرط لیپ _شیتس صدق می کند هرگاه

$$\exists k>0\ ,\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D;$$
$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le \mathrm{k}|\mathrm{y}_1-\mathrm{y}_2|.$$

قضیه ی پیکارد

اگر D یک مجموعه باز در فضای $R^{\mathrm{n}+1}$ باشد به طوری که $(x_0,y_0)\epsilon D$ و اعداد ثابت و مثبت a,b طوری در نظر گرفته شود که

$$R=\{(x,y)|\ ;\ |x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}\subseteq D.$$

اگر f روی D پیوسته باشد و در R نسبت به y در شرط لیپ شیتس صدق کند، با تعریف

$$A=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),$$
$$M=\max\big(f(x,y)\big),$$

که در آن $(x,y)\in R$ است.

آنگاه معادله دیفرانسیل $y'=\mathrm{f}(x,y)$ دارای یک جواب منحصر بفرد $y(x)$ با شرط اولیه $y(x_0)=y_0$ می باشد که روی بازه (x_0-A,x_0+A) تعریف شده است،

به طوری که

$$|y(x)-y_0|\le \mathrm{MA}\quad ,\qquad \mathrm{A}>0.$$

برهان

ابتدا ثابت می کنیم هر جواب $y(x)$ از معادله دیفرانسیل

$$y'=f(x,y), \qquad (۱-۱۸-۱)$$

جوابی از معادله انتگرالی زیر $y(x_0)=y_0$با شرط اولیه

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)dt, \qquad (۱-۱۸-۲)$$

می باشد و برعکس، هر جواب معادله انتگرالی (۱-۱۸-۲) جوابی از معادله دیفرانسیل (۱-۱۸-۱) باشرط اولیه $y(x_0)=y_0$ خواهد شد. اگر فرض کنیم که $y(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل $y'=\mathrm{f}(x,y)$ با شرط اولیه $y(x_0)=y_0$ باشد آنگاه با انتگرال گیری نسبت به x از طرفین معادله دیفرانسیل (۱-۱۸-۱) داریم

$$\int_{x_0}^{\mathrm{x}} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}} f(t, y(t))d\mathrm{t} \ ,$$

پس

$$\int_{x_0}^{\mathrm{x}} dy(t) \ = \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}} f(t, y(t))dt,$$

در نتیجه

$$y(x) = y(0) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt.$$

اگر فرض کنیم $y(x)$ جوابی از معادله ی انتگرالی (۱-۱۸-۲) باشد، آنگاه داریم

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) , \\ y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = y(0) . \end{cases}$$

حال ثابت می کنیم که معادله انتگرالی (۱-۱۸-۲) دارای جواب یکتای $\mathrm{y(x)}$ ، $y(x_0) = y_0$ است.

دنباله ی $\{\mathrm{y_n(x)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 , \\ y_n(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \ . \end{cases}$$

با اختیار

$$(x_0 - A, x_0 + A) = (x_0 - A, x_0) \cup (x_0, x_0 + A),$$

ابتدا مراحل اثبات را در بازه $(x_0, x_0 + A)$ انجام می دهیم، به همین ترتیب در بازه ی $(x_0 - A, x_0)$ نیز اثبات می شود.

نخست نشان می دهیم

$$\forall x \in (x_0, x_0 + A) \Longrightarrow \big(x, y_n(x)\big) \in R.$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + A) \Longrightarrow x_0 < x < x_0 + A \Longrightarrow 0 < x - x_0 < A,$$

در نتیجه داریم

$$|x - x_0| < a_0 \ . \qquad (۱ - ۱۸ - ۳)$$

از طرف دیگر داریم

$$y_n(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt,$$

بنابراین

$$|y_n(x) - \mathrm{y}_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt\right| \le \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt$$

$$\le M \int_{x_0}^{x} dt = M(x - x_0)$$