وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

گروهی از ایزومتری‌ها در صفحه نااقلیدسی

نگارش

فاطمه معافی

استاد راهنما

دکتر علی پارسیان

شهریور ۱۳۹۲

بار الها

برای دوستی که قلب مرا شکست، مهربانی

برای آنکه روح مرا آزرد، بخشایش

و برای خویشتن خویش آگاهی و عشق میطلبم...

تقدیم به پدرم

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

تقدیم به همسرم

که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم

تقدیم به دلبندانم

که آسایش آنها آرامش من است

سپاس‌گزاری

اکنون که با عنایات یزدان پاک به مراحل نهایی کار خود نزدیک می‌شوم، وظیفه خود می‌دانم ارزنده‌ترین سپاس خود را به پیشگاه اساتید گرانقدرم تقدیم کنم.

بر خود لازم می‌دانم سپاس بی‌پایان خود را به استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر علی پارسیان که با زحمات بی‌شائبه، راهنمایی‌های خردمندانه و صبورانه و تشویق هایشان این‌جانب را در انجام امور آموزشی، پژوهشی، نگارش و تدوین این پایان‌نامه یاری فرمودند، تقدیم دارم و مراتب امتنان خالصانه خود را نسبت به ایشان ابراز دارم. هم‌چنین از اساتید ارجمند آقایان دکتر اسماعیل نظری و دکتر محمد اکبری که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند صمیمانه تشکر می کنم.

فاطمه معافی، شهریور ۹۲

چکیده

اساساً هر فضایی به جز فضای اقلیدسی را فضای نااقلیدسی و هر هندسه‌ای غیر از هندسه اقلیدسی را هندسه نااقلیدسی می نامند. که از این گونه هندسه ها تا کنون زیاد شناخته‌ایم ما در این مقاله توجه خود را به آن هندسه خاصی که به توسط گاوس، بویوئی، و لباچفسکی کشف شده و امروز هندسه هذلولوی نامیده می شود، محدود می‌سازیم. مدل‌های متفاوتی در هندسه هذلولوی از جمله مدل کیلی‌کلاین، مدل قرص پوانکاره، مدل نیم‌صفحه بالایی و مدل هذلولی‌گون صفحه هذلولوی مطرح است. الگوی مورد نظر ما مدل نیم‌صفحه بالایی صفحه مختصات می‌باشد و رویکرد آن بر اساس برنامه ارلانگن کلاین است که به هندسه به صورت عمل یک گروه روی یک فضا نگاه می‌کند. در این مقاله ابتدا یک مدل هندسه هذلولوی، یعنی مدل نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}$ را معرفی کرده و خط هذلولوی در $\mathbb{H}$ را تعریف می‌کنیم سپس یک گروه از تبدیلات $\mathbb{H}$ را معرفی می‌کنیم که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برد آنگاه یک عنصر طول قوس ناوردا روی $\mathbb{H}$ به‌دست می‌آوریم که وسیله ای برای محاسبه طول هذلولوی یک مسیر در $\mathbb{H}$ می‌باشد و در انتها یک متر طبیعی روی $\mathbb{H}$ بر حسب کوتاه‌ترین طول یک مسیر که دو نقطه را به هم وصل می‌کند، تعریف می‌کنیم و فاصله بین دو نقطه هذلولوی را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: خطوط هذلولوی، دایره هذلولوی، کره ریمان، گروه تبدیلات موبیوس، متر هذلولوی، طولپای هذلولوی، عنصر طول قوس هذلولوی، طول و فاصله هذلولوی.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

هندسه نااقلیدسی به‌خصوص هندسه هذلولوی، بخشی از ریاضیات است. یک دلیل این‌که جذابیت هندسه هذلولوی تداوم دارد آن است که حوزه‌های مختلفی شامل آنالیز مختلط، جبر مجرد، نظریه‌ی گروه‌ها، نظریه اعداد، هندسه دیفرانسیل و توپولوژی با بعد پایین و حوزه‌های فراوان دیگر در ارتباط با هندسه هذلولوی می‌باشند.

در فصل یک مدلی برای صفحه هذلولوی معرفی می‌کنیم. سپس خطوط هذلولوی موازی را در مورد آنها بیان می‌کنیم آنگاه برای یکسان کردن دو نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت، به مفهوم کره ریمان $\bar{\mathbb{C}}$ پرداخته و برخی از خواص پایه‌ای آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس با نشاندن H در $\bar{\mathbb{C}}$ فصل را به پایان می‌بریم.

در فصل دوم ابتدا گروهی از تبدیلات $\mathbb{H}$ موسوم به $M\ddot{o}b^+$ را معرفی می‌کنیم که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برد. سپس یکی از اساسی‌ترین خواص این گروه را که روی $\bar{\mathbb{C}}$ به طور متعدی سه‌گانه یکتا عمل می‌کند مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس نسبت ناهمساز را معرفی کرده و نشان می‌دهیم به عنوان تابعی روی چهارتایی‌های متمایز $\bar{\mathbb{C}}$ تحت $M\ddot{o}b^+$ ناوردا می‌باشد. سپس تبدیلات موبیوس را دسته‌بندی کرده و یک نمایش ماتریسی برای آنها معرفی می‌کنیم. آنگاه به معرفی گروه تبدیلات موبیوس عام $M\ddot{o}b$ که شامل ترکیب‌های تبدیلات موبیوس $M\ddot{o}b^+$ و انعکاس‌ها می‌باشد می‌پردازیم و خاصیت مهم همدیسی اعضای $M\ddot{o}b$ را بیان می‌کنیم. سرانجام فصل را با معرفی تبدیلاتی که $\mathbb{H}$ را حفظ می‌کنند به پایان می‌بریم.

در فصل سوم بعد از تعیین زیر گروه $M\ddot{o}b(H)$ از $M\ddot{o}b$ که $\mathbb{H}$ را حفظ می‌کند، یک عنصر طول قوس ناوردا روی $\mathbb{H}$، یعنی وسیله‌ای برای محاسبه طول هذلولوی یک مسیر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}$ به دست می‌آوریم به طوری‌که طول هذلولوی یک مسیر تحت عمل $M\ddot{o}b(H)$ ناوردا است. این به آن معنی است که طول هذلولوی مسیر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}$ برابر با طول هذلولوی مسیر انتقال داده شده آن $\gamma \circ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}$ به ازای هر عضو γ در $M\ddot{o}b(H)$ باشد. حال می‌توانیم یک متر طبیعی روی $\mathbb{H}$ برحسب کوتاه‌ترین طول یک مسیر که دو نقطه را به هم وصل می‌کند، تعریف کنیم. سپس فاصله هذلولوی را محاسبه می‌کنیم

و در انتها طولپای هذلولوی را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم $Isom(H) = M\ddot{o}b(H)$. در این پایان نامه بیشتر از منابع [۱] و [۲] و [۳] استفاده شده است.

فصل ۱

معرفی هندسه هذلولوی

در این فصل ابتدا هندسه هذلولوی را معرفی کرده و سپس مدل نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}$ را برای صفحه هذلولوی تعریف می‌کنیم. سپس به تعریف خطوط هذلولوی و توازی آنها می‌پردازیم. آنگاه برای این‌که به ساخت گروه تبدیلات $\mathbb{H}$ کمک کرده باشیم به بررسی کره ریمان پرداخته و فصل را با نشاندن $\mathbb{H}$ در $\bar{\mathbb{C}}$ به پایان می‌بریم.

۱.۱ بنداشت‌های هندسه هذلولوی

هر هندسه‌ای غیر از هندسه اقلیدسی را هندسه نااقلیدسی گوییم، توجه خود را به آن هندسه خاصی که به توسط گاوس، بویوئی و لباچفسکی کشف شده و امروزه هندسه هذلولوی نامیده می‌شود محدود می‌سازیم. هندسه هذلولوی، هندسه‌ای است که ما با قبول همه بنداشت‌های هندسه نتاری به دست می‌آوریم ولی به جای اصل توازی هیلبرت نقیض آن را که بنداشت هذلولوی نام دارد می‌گذاریم.

هندسه نتاری هندسه‌ای است مشتمل بر همه قضایایی که می‌توان آنها را با استفاده از بنداشت‌های وقوع، میانبود، قابلیت انطباق و پیوستگی، بدون استفاده از بنداشت توازی ثابت کرد.

بنداشت‌های وقوع:

بنداشت اول وقوع: هر چه باشد نقطه p و هر چه باشد نقطه q که با p مساوی نیست فقط یک خط مانند L وجود دارد که بر p و q می‌گذرد.

بنداشت دوم وقوع: هر چه باشد خط L حداقل دو نقطه متمایز واقع بر L وجود دارد.
بنداشت سوم وقوع: سه نقطه متمایز وجود دارند چنان‌که هیچ خطی بر هر سه آنها واقع نمی‌شود.

بنداشت‌های میانبود:

بنداشت اول میانبود: اگر $A * B * C$ آنگاه A و B و C سه نقطه متمایزند که بر یک خط قرار دارند و $C * B * A$.

بنداشت دوم میانبود: دو نقطه متمایز B و D داده شده‌اند نقاطی مانند A و C و E بر خط BD قرار دارند چنان‌که $A * B * D$ و $B * C * D$ و $B * D * E$.

این بنداشت ما را مطمئن می‌سازد که نقاطی بین B و D وجود دارند و خط BD به نقطه B یا نقطه D تمام نمی‌شود.

بنداشت سوم میانبود: اگر A و B و C سه نقطه متمایز بر یک خط باشند آنگاه یکی و تنها یکی از آنها بین دو تای دیگر واقع است.

این بنداشت ما را مطمئن می‌سازد که خط دایره‌ای شکل نیست اگر نقاط ما بر دایره بودند آن وقت مجبور بودیم بگوییم که هر یک از آنها بین دو تای دیگر است.

بنداشت چهارم میانبود: (جدا سازی) به ازای هر خط L و هر سه نقطه A و B و C نا واقع بر L؛ الف) هر گاه A و B در یک طرف L و B و C هم در یک طرف L باشند آنگاه A و C هم در یک طرف L خواهند بود.

ب) هر گاه A و B در دو طرف L ، B و C هم در دو طرف L باشند آنگاه A و C در یک طرف L خواهند بود.

بنداشت‌های قابلیت انطباق:

بنداشت اول قابلیت انطباق: هر گاه A و B دو نقطه متمایز باشند و A' یک نقطه دلخواه آنگاه به ازای هر نیم‌خطی مانند r که از A' رسم شود فقط یک نقطه مانند B' بر r وجود دارد چنان‌که $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$.

بنداشت دوم قابلیت انطباق: هر گاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$ آنگاه $CD \cong EF$.
همچنین هر پاره‌خطی با خودش قابل انطباق است.

بنداشت سوم قابلیت انطباق: هر گاه $A * B * C$ و $A' * B' * C'$ و $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$، آنگاه $AC \cong A'C'$.

بنداشت چهارم قابلیت انطباق: هر گاه $\widehat{ABC}$ (که بنا بر تعریف زاویه، $\overrightarrow{AB}$ متقابل با $\overrightarrow{AC}$ نیست) و هم‌چنین نیم‌خط نامشخص $\overrightarrow{A'B'}$ که از A' خارج شده است داده شده باشند آنگاه

فقط یک نیمخط $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین خط $A'B'$ وجود دارد چنان‌که $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$
بنداشت پنجم قابلیت انطباق: هر گاه $\hat{A} \cong \hat{B}$ و $\hat{A} \cong \hat{C}$ آنگاه $\hat{B} \cong \hat{C}$.
بنداشت ششم قابلیت انطباق: هر گاه دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر قابل انطباق باشند آن دو مثلث قابل انطباقند.
بنداشت ارشمیدس: اگر AB و CD دو پاره‌خط باشند عددی مانند n وجود دارد چنان‌که هر گاه پاره‌خط CD را n بار بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$، ابتدا از A بگذاریم آنگاه به یک نقطه E می‌رسیم که $n \cdot CD \cong AE$ و B بین A و E است.
بنداشت ددکیند: فرض می‌کنیم مجموعه همه نقاط واقع بر یک خط L، از اجتماع دو زیر مجموعه $\sum_۱$ و $\sum_۲$ چنان تشکیل شده باشند که هیچ نقطه $\sum_۱$ بین دو نقطه $\sum_۲$ نباشد و به‌عکس. آنگاه یک نقطه منحصر به فردی مانند o بر L وجود دارد چنان‌که $p_۱ * o * p_۲$ اگر و تنها اگر $p_۱ \in \sum_۱$ و $p_۲ \in \sum_۲$ و $p_۱, p_۲ \neq o$.
بنداشت ددکیند نوعی عکس خاصیت جداسازی خط می‌باشد.
بنداشت هذلولوی: در هندسه هذلولوی یک خط L و یک نقطه p غیر واقع بر L وجود دارند چنان‌که دست کم دو خط موازی با L از نقطه p می‌گذرند.

۲.۱ مدل نیم صفحه بالایی

منظور از مدل، انتخاب یک فضای زمینه و انتخاب چگونگی و تعبیر اشیاء هندسی از قبیل نقطه و خط در این فضای زمینه می باشد، به‌طوری‌که تمام اصول هندسه هذلولوی در این مدل صدق کند. تعداد زیادی مدل برای صفحه هذلولوی وجود دارد. مدل صفحه‌ی هذلولوی که در این مقاله با آن کار میکنیم، مدل نیم صفحه‌ی بالایی است. [۲۵]
فضای زمینه این مدل نیم صفحه‌ی بالایی $\mathbb{H}$ در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ است که به صورت زیر تعریف میشود:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > ۰\}$$

از مفهوم عادی نقطه و هم‌چنین از مفهوم معمولی زاویه که $\mathbb{H}$ از $\mathbb{C}$ به ارث میبرد، استفاده می‌کنیم یعنی زاویه بین دو منحنی در $\mathbb{H}$ را زاویه بین منحنی‌ها وقتی که به‌عنوان منحنی در $\mathbb{C}$ تلقی شوند، تعریف می‌کنیم و این به‌نوبه خود زاویه بین خطوط مماس بر آنها است.
از آن جا که خطوط هذلولوی در $\mathbb{H}$ را بر حسب خطوط اقلیدسی و دوایر اقلیدسی در $\mathbb{C}$

تعریف خواهیم کرد لازم است بدانیم معادله خط اقلیدسی $ax + by + c = ۰$ بر حسب مختصات مختلط $z = x + iy$ در $\mathbb{C}$ به صورت مجموعه جواب‌های معادله

$$\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = ۰$$

که در آن $\gamma \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{C}$ و معادله دایره اقلیدسی $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = r^۲$ به‌صورت مجموعه جواب‌های معادله

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = ۰$$

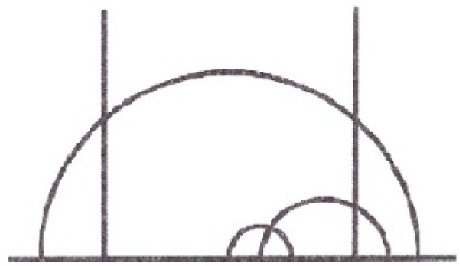
می‌باشد که در آن $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ و $\alpha \neq ۰$ و $\beta \in \mathbb{C}$.

همچنین اگر فرض کنیم $S^۱ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = ۱\}$ دایره یکه در $\mathbb{C}$ باشد و فرض کنیم A نیز یک دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی $re^{i\theta}$ با شرط $r > ۱$ و شعاع اقلیدسی $s > ۰$ باشد آن‌گاه $S^۱$ بر A عمود است اگر و فقط اگر $s = \sqrt{r^۲ - ۱}$. زیرا A و $S^۱$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر خطوط مماس بر آن‌ها در نقطه تقاطع بر هم عمود باشند.حال فرض می‌کنیم x یک نقطه $A \cap S^۱$ باشد و مثلث اقلیدسی T با رئوس مبدأ و $re^{i\theta}$ و x را در نظر می‌گیریم. اضلاع T که x را به دو رأس دیگر وصل می‌کنند، شعاع A و $S^۱$ هستند و لذا A و $S^۱$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر زاویه داخلی T در x برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد و این فقط و فقط وقتی اتفاق می‌افتد که قضیه فیثاغورس برقرار باشد یعنی $r^۲ = ۱^۲ + s^۲$.
حال آمادگی داریم خط هذلولوی در $\mathbb{H}$ را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. دو نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت وجود دارد که هر دو بر حسب اشیاء اقلیدسی در$\mathbb{C}$ تعریف می‌شوند. یکی اشتراک $\mathbb{H}$ با یک خط اقلیدسی در $\mathbb{C}$ است که بر محور حقیقی $\mathbb{R}$ در $\mathbb{C}$ عمود است. دیگری اشتراک $\mathbb{H}$ با یک دایره اقلیدسی با مرکزی روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ است.
در شکل (۱.۱)مثال‌هایی از خطوط هذلولوی در $\mathbb{H}$ نشان داده شده است.

همان‌طور که در ابتدای بخش گفتیم تمام بنداشت‌های هندسه هذلولوی در مدل نیم‌صفحه بالایی صدق می‌کنند. برای نمونه بنداشت اول وقوع را در این مدل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۲.۲.۱. *به ازای هر دو نقطه متمایز p و q در $\mathbb{H}$ یک خط هذلولوی یکتای l در $\mathbb{H}$ وجود دارد که از p و q میگذرد.*



شکل ۱.۱: خطوط هذلولوی در$\mathbb{H}$

اثبات. دو حالت برای بررسی وجود دارد. ابتدا فرض می‌کنیم $Re(p) = Re(q)$
در این صورت خط اقلیدسی L با معادله $L = \{z \in C| \ Re(z) = Re(p)\}$، بر محور حقیقی عمود است و از دو نقطه p و q میگذرد. لذا خط هذلولوی $l = L \cap \mathbb{H}$ خط هذلولوی مطلوب است که از p و q میگذرد.
حال فرض می‌کنیم $Re(p) \neq Re(q)$.
از آن‌جا که خط اقلیدسی گذرنده از p و q دیگر بر $\mathbb{R}$ عمود نیست، باید یک دایره اقلیدسی بسازیم که مرکز آن روی R باشد و از نقاط p و q بگذرد. فرض می‌کنیم L_{pq} پاره‌خط اقلیدسی باشد که p را به q وصل می‌کند و فرض می‌کنیم K عمودمنصف L_{pq} باشد. در این‌صورت هر دایره اقلیدسی که از p و q می‌گذرد، مرکز آن روی K قرار دارد. چون p و q قسمت‌های حقیقی نامساوی دارند، خط اقلیدسی K موازی $\mathbb{R}$ نیست و لذا K و $\mathbb{R}$ در یک نقطه یکتای c یکدیگر را قطع می‌کنند.
فرض کنیم A دایره اقلیدسی به مرکز نقطه تقاطع c و با شعاع $|c - p|$ باشد. لذا A از p می‌گذرد. چون c روی K قرار دارد، بنابراین $|c - p| = |c - q|$ و لذا A از نقطه q نیز می‌گذرد. دراین‌صورت $l = A \cap \mathbb{H}$ خط هذلولوی مطلوب است که از p و q می‌گذرد.
یکتایی خط هذلولوی مار بر p و q از یکتایی خطوط اقلیدسی و دوایر اقلیدسی مورد استفاده در ساختن آن، نتیجه می‌شود. به این ترتیب اثبات قضیه ۲.۲.۱ تمام است. □

بنابراین با توجه به استدلال به کار رفته در قضیه ۲.۲.۱ اگر l خط هذلولوی در $\mathbb{H}$ مار بر p و q باشد، می‌توانیم l را بر حسب p و q به‌طور صریح بیان کنیم.
وقتی که p و q دارای قسمت‌های حقیقی مساوی باشند، دیدیم که $l = L \cap \mathbb{H}$ که در آن L خط اقلیدسی $L = \{z \in \mathbb{C}| \ Re(z) = Re(p)\}$ است. اما اگر p و q دارای قسمت‌های

حقیقی نامساوی باشند خط $l = A \cap \mathbb{H}$ که در آن A دایره اقلیدسی است با مرکزی روی $\mathbb{R}$ و مار بر p و q که مرکز اقلیدسی c و شعاع اقلیدسی r دایره A را بر حسب p و q محاسبه می‌کنیم.

فرض کنیم L_{pq} پاره خط اقلیدسی متصل کننده p به q باشد. $\frac{۱}{۲}(p+q)$ نقطه وسط L_{pq} است و شیب L_{pq} برابر $m = \frac{Im(q)-Im(p)}{Re(q)-Re(p)}$ است.K عمود منصف L_{pq} از نقطه $\frac{۱}{۲}(p+q)$ گذشته و دارای شیب $\frac{Re(p)-Re(q)}{Im(q)-Im(p)} = -\frac{۱}{m}$ است و لذا K دارای معادله زیر است:

$$y - \frac{۱}{۲}(Im(p)-Im(q)) = [\frac{Re(p)-Re(q)}{Im(q)-Im(p)}](x - \frac{۱}{۲}(Re(p)+Re(q))$$

c مرکز اقلیدسی A محل برخورد K با محورx ها است که به‌صورت زیر است:

$$c = [-\frac{۱}{۲}(Im(p)+Im(q))][\frac{Im(q)-Im(p)}{Re(p)-Re(q)}] + \frac{۱}{۲}(Re(p)+Re(q)) =$$

$$\frac{۱}{۲}[\frac{(Im(p))^۲ - (Im(q))^۲ + (Re(p))^۲ - (Re(q))^۲}{Re(p)-Re(q)}] =$$

$$\frac{۱}{۲}[\frac{|p|^۲ - |q|^۲}{Re(p)-Re(q)}]$$

شعاع اقلیدسی به‌صورت زیر است:

$$r = |c-p| = |\frac{۱}{۲}[\frac{|p|^۲ - |q|^۲}{Re(p)-Re(q)}] - p|$$

تعریف ۳.۲.۱. دو خط هذلولوی موازی [۱] هستند، چنان‌چه مجزا از هم باشند.

در هندسه اقلیدسی خطوط موازی وجود دارند. در واقع اگر L یک خط اقلیدسی بوده و a یک نقطه $\mathbb{C}$ باشد که روی L قرار نداشته باشد، آنگاه یک و فقط یک خط K وجود دارد که از a می‌گذرد و با L موازی است.

[۱] Parallel

در واقع، در هندسه اقلیدسی خطوط موازی، متساوی‌الفاصله [۲] نیز می‌باشند؛ یعنی اگر L و K خطوط اقلیدسی موازی باشند و اگر a و b نقاطی روی L باشند در این‌صورت فاصله اقلیدسی a تا K برابر است با فاصله اقلیدسی b تا K .
در هندسه هذلولوی، توازی به‌طور کامل متفاوت عمل می‌کند.

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنیم l یک خط هذلولوی در $\mathbb{H}$ باشد و p یک نقطه از $\mathbb{H}$ باشد که روی l قرار ندارد. در این‌صورت تعداد نامتناهی خط هذلولوی متمایز وجود دارند که از نقطه p می‌گذرند و با l موازی می‌باشند.*

اثبات. دو حالت برای بررسی وجود دارد. ابتدا فرض می‌کنیم l مشمول در یک خط اقلیدسی مانند L باشد. از آن‌جا که p روی L قرار ندارد، بنابراین یک خط اقلیدسی K وجود دارد که از p می‌گذرد و با L موازی است. چون L بر $\mathbb{R}$ عمود است، نتیجه می‌شود که K نیز بر $\mathbb{R}$ عمود است. بنابراین یک خط هذلولوی در $\mathbb{H}$ که از p بگذرد و با l موازی باشد عبارت است از $K \cap \mathbb{H}$.
برای ساختن یک خط هذلولوی دیگر که از p بگذرد و با l موازی باشد، یک نقطه x روی $\mathbb{R}$ بین L و K را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A دایره اقلیدسی باشد که مرکز آن روی $\mathbb{R}$ است و از نقاط x و p می‌گذرد. می‌دانیم که چنین دایره‌ای وجود دارد زیرا که $Re(x) \neq Re(p)$.

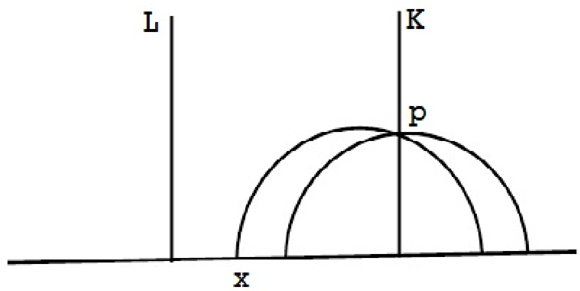
با توجه به نحوه ساختن، A و L مجزا می‌باشند و در نتیجه خط هذلولوی $A \cap \mathbb{H}$ از l مجزا است. یعنی $A \cap \mathbb{H}$ خط هذلولوی دومی است که از نقطه p می‌گذرد و با l موازی است. از آن‌جا که تعداد نامتناهی نقطه روی $\mathbb{R}$ بین K و L وجود دارد، این نحوه ساختن، تعداد نامتناهی خط هذلولوی متمایز به دست می‌دهد که از p می‌گذرند و با l موازی می‌باشند. تصویری از این پدیده در شکل (۲.۱) نشان داده شده است.

حال فرض می‌کنیم l مشمول در یک دایره اقلیدسی A باشد. فرض کنیم D دایره اقلیدسی باشد که هم‌مرکز [۳] با A باشد و از نقطه p بگذرد از آن‌جا که دوایر هم‌مرکز مجزا هستند و دارای مرکز یکسانی می‌باشند، یک خط هذلولوی گذرنده از p و موازی با l عبارت است از $D \cap \mathbb{H}$.

برای ساختن خط هذلولوی دومی که از p بگذرد و با l موازی باشد، یک نقطه دلخواه x را

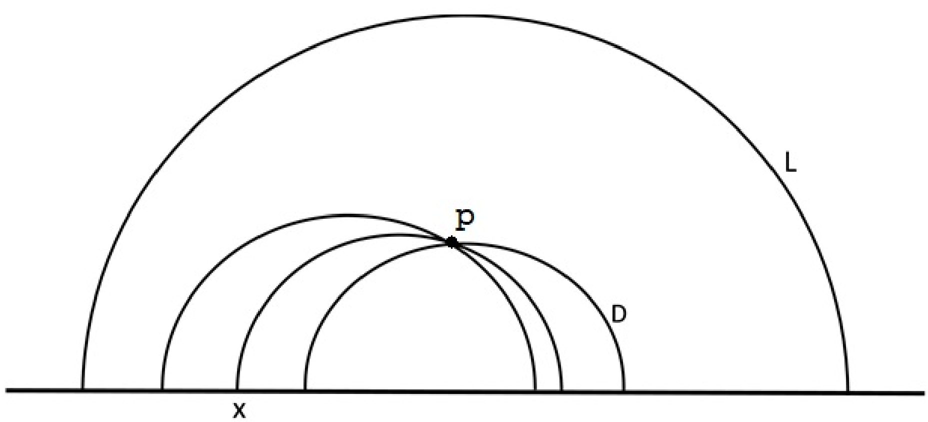
[۲] Equidistant

[۳] Concentric



شکل ۲.۱: تعدادی از خطوط هذلولوی موازی

روی R بین A و D انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم E دایره اقلیدسی با مرکزی روی R باشد که از نقاط x و p می‌گذرد. باز با توجه به نحوه ساختن، E و A مجزا می‌باشند و در نتیجه $E\cap\mathbb{H}$ یک خط هذلولوی است که از p می‌گذرد و با l موازی است.
مانند بالا، چون تعداد نامتناهی نقطه روی $\mathbb{R}$ بین A و D موجودند، بنابراین تعداد نامتناهی خط هذلولوی موجودند که از p می‌گذرند و با l موازی هستند. تصویری از این پدیده در شکل (۳.۱) نشان داده شده است.



شکل ۳.۱: تعدادی از خطوط هذلولوی موازی

به این ترتیب اثبات قضیه ۴.۲.۱ کامل می‌شود. □

مثال ۵.۲.۱. *می‌خواهیم دو خط هذلولوی در $\mathbb{H}$ ارائه دهیم که از i گذشته و با خط هذلولوی $l=\{z\in\mathbb{C}|\ Re(z)=۳\}\cap\mathbb{H}$ موازی باشند. یک خط هذلولوی که از i گذشته و موازی l*

باشد، محور موهومی مثبت $I = \mathbb{H} \cap \{Re(z) = ۰\}$ است. برای پیدا کردن خط هذلولوی دوم نقطه‌ای مانند x روی R بین ۰ و ۳ مثل ۲ $= x$ و دایره اقلیدسی A با مرکز روی R در نظر می‌گیریم که از ۲ و i بگذرد. با توجه به قضیه ۱. ۲. ۲ مرکز اقلیدسی A به صورت $c = \frac{۳}{۴}$ و شعاع اقلیدسی A برابر $r = \frac{۵}{۴}$ است. از آن‌جا که قسمت حقیقی هر نقطه روی A حداکثر ۲ است، خط هذلولوی $A \cap \mathbb{H}$ خطی هذلولوی است که از i گذشته و موازی l است.

مثال ۶.۲.۱. *این‌بار می‌خواهیم دو خط هذلولوی در H ارائه دهیم که از i گذشته و با خط هذلولوی $l = A \cap \mathbb{H}$ موازی باشند به طوری‌که A دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی ۲ و شعاع اقلیدسی ۱ می‌باشد. دایره اقلیدسی D مار بر i و هم‌مرکز با A دارای مرکز اقلیدسی ۲ و شعاع اقلیدسی $|(۲-) - i| = \sqrt{۵}$ است و لذا یک خط هذلولوی مار بر i و موازی A به صورت $A \cap \mathbb{H}$ است. برای ساختن خط هذلولوی دوم از یک نقطه x روی $\mathbb{R}$ بین A و D شروع می‌کنیم، مثل ۴$- = x$. فرض کنیم E دایره اقلیدسی با مرکز روی $\mathbb{R}$ و مار بر ۴$-$ و i باشد. بنابر قضیه ۱. ۲. ۲ مرکز اقلیدسی E به صورت $c = -\frac{۱۵}{۸}$ بوده و شعاع اقلیدسی آن $r = \frac{۱۷}{۸}$ است.*

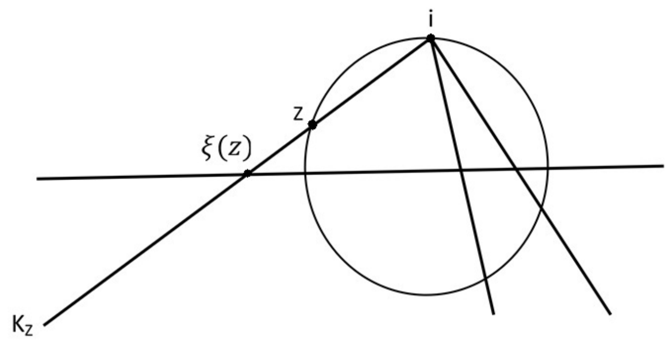
و چون دوایر $\{z \in \mathbb{C} | \; |z + ۲| = ۱\}$ و $\{z \in \mathbb{C} | \; |z + \frac{۱۵}{۸}| = \frac{۱۷}{۸}\}$ از هم جدا هستند لذا خط هذلولوی $E \cap \mathbb{H}$ یک خط هذلولوی مار بر i است که موازی l می‌باشد.

۳.۱ کره ریمانی

برای تعیین تبدیلاتی از $\mathbb{H}$ که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند، ابتدا به یکسان کردن دو نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت، یعنی خطوط مشمول در یک خط اقلیدسی و خطوط مشمول در یک دایره اقلیدسی، می‌پردازیم. ایده اساسی و کلیدی ما عبارت است از مشاهده این نکته که هر دایره اقلیدسی را می‌توان با اضافه کردن یک نقطه تنها به یک خط اقلیدسی به دست آورد.

برای تصریح، فرض می‌کنیم $S^۱$ دایره یکه در $\mathbb{C}$ باشد و تابع $\xi : S^۱ - \{i\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که به‌این ترتیب تعریف می‌شود: به ازای هر نقطه z در $S^۱ - \{i\}$، فرض کنیم K_z خط اقلیدسی گذرنده از z و i باشد و قرار می‌دهیم $\xi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$. این تابع

خوش‌تعریف است، زیرا K_z و $\mathbb{R}$ هم‌دیگر را در یک نقطه یکتا قطع می‌کنند، به این شرط که $Im(z) \neq ۱$. شکل (۴.۱)را ببینید. این عمل را تصویر کنج‌نگاری [۴] می‌نامیم. بر حسب



شکل ۴.۱: تصویر کنج‌نگاری

مختصات دکارتی معمولی صفحه، محور حقیقی $\mathbb{R}$ در $\mathbb{C}$ متناظر با محور x ها است و در نتیجه $\xi(z)$ طول از مبدأ خط K_z است. با انجام محاسبه، می‌بینیم که K_z دارای شیب زیر است:

$$m = \frac{Im(z) - ۱}{Re(z)}$$

وعرض از مبدأ آن برابر ۱ است. بنابراین معادله K_z عبارت است از:

$$y - ۱ = \frac{Im(z) - ۱}{Re(z)}x$$

به ویژه، طول از مبدأ K_z عبارت است از:

$$\xi(z) = \frac{Re(z)}{۱ - Im(z)}.$$

هم‌چنین اگر بخواهیم ضابطه صریح $\xi^{-۱} : \mathbb{R} \longrightarrow S^۱ - \{i\}$ را به دست آوریم به ازای هر نقطه c متعلق به $\mathbb{R}$ دو حالت را در نظر می‌گیریم: اگر $c = ۰$، آن‌گاه خط اقلیدسی L_c مار برز و مبدأ ، $S^۱$ را در $\pm i$ قطع می کند و لذا $\xi^{-۱}(۰) = -i$.
به ازای یک نقطه مفروض $c \neq ۰$ در $\mathbb{R}$، معادله خط L_c مار بر c و i به صورت زیر است:

[۴] Stereographic projection