دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آمارریاضی

عنوان

ماکسیمم آنتروپی تابع مفصل

استاد راهنما

دکترعین اله پاشا

تدوین

سلیمه مرادی

تابستان ۱۳۸۹

تقدیر وتشکر

شایسته است در این دفتر آخر فرصت را غنیمت دانسته و ازسعه صدر و محبت های پدرانه استاد راهنمای گرانقدر دکتر پاشا که مرا در رسیدن به این منزل وتدوین این پایان نامه یاری نمودند،کمال قدر دانی را بنمایم .

هم چنین از جناب آقایان دکتریاری و دکتر رحیم زاده که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را پذیرفتند سپاسگزارم وتوفیق روزافزون این عزیزان را از خداوند بزرگ خواستارم .

زیباترین آرزوها برای همراه و مشوق عزیزم سمانه

اظهار نامه

این پایان نامه بر ا سا س مقا لات زیر نوشته شده است :

[1] Ba Chu and S. Satchell (2009), The most entropic canonical copula with an application to"Style" investment, in Cambridge and London University.

[2] **Ba Chu and S. Satchell** (**2009**) , **Computing the most entropic copula in Cambrige University London** .

چکیده

تابع مفصل به عنوان یک راه کلی فرموله کردن یک توزیع چند متغیره مورد استفاده قرار می گیرد در حالی که به طور کلی انواع مختلفی از وابستگی می تواند وجود داشته باشد.
در این پایان نامه ضمن معرفی تابع مفصل وشرح خصوصیات آن به بیان آنتروپی پرداخته وبه دنبال یافتن تابع مفصلی با ماکزیمم آنتروپی هستیم .

واژگان کلیدی : توابع مفصل ، آنتروپی ، MEC , CCEM

رده بندی موضوعی۲۰۱۰ : 28D20

فهرست مطالب

مقدمه

پایه گذاری توابع مفصل در سال(۱۹۵۹) توسط اسکلارانجام شد و قضیه ای را بیان کرد که توزیع های تک متغیره رابه توزیع های چند متغیره پیوند می دهد .

هرچند محققان دیگری همچون ها فدینگ (۱۹۴۰) ، فرشه(۱۹۵۱) وکریمیدروف (۱۹۷۵) مطالعاتی پیرامون یافتن این تابع انجام داده اند اما هیچ یک به نتیجه مطلوب اسکلاردست نیافتند.

نلسن در سال (۱۹۹۱) به بررسی و مطالعه بیشتر این توابع پرداخت وخصوصیا تی چون وابستگی به کمک توابع مفصل وپایایی آن تحت تبدیلات یکنوا را مطرح کرد .امروزه به خا طر خصوصیات تابع مفصل کاربرد فراوانی در علوم مختلف به ویژه اقتصاد،بیمه و... دارد.

اصطلاح آنتروپی برای اولین در مبا حث ترمودینامیک مطرح شد، ورود آنتروپی در آمار را توسط بولتسمان (۱۸۷۷) در مکانیک آماری گازها نسبت داده اند. پلانک در سال (۱۹۰۶) به بیان صریح رابطه بین آنتروپی و احتمال پرداخت و مقاله شانون در سال (۱۹۴۸) مفهوم آنتروپی و مسائل پایه آن به صورت متداول بیان کرده است.

دراین پایان نامه سعی برآن شد که به بررسی رابطه بین آنتروپی و تابع مفصل بپردازیم.

این پایان نامه در ۲ فصل تنظیم گردیده است که فصل اول آن به توابع مفصل ، ویژگیها وخصوصیات آن ، مدلهای وابستگی ،نحوه ساخت ومعرفی تعدادی از خانواده های توابع مفصل می پردازد. لازم به ذکر است که خانواده های بیان شده در این مبحث به پارامتر نامعلومی بستگی دارد که برای استفاده از آنها نیاز به براورد آن براساس داده هی موجود
می باشدواز روش درستنمایی برای براورد این پارامترها استفاده می شود.

در فصل دوم ابتدا به بیان مفهوم آنتروپی ، تعاریف آنتروپی ، آنتروپی متغیرهای گسسته وپیوسته وآنتروپی شانون ، آنتروپی نسبی و فاصله کولبگ- لایبلر پرداخته ودر نهایت نیز اصل ماکسیمم انتروپی رابیان می کنیم . درپایان فصل نیز تابع مفصل با ماکزیمم آنتروپی مطرح می شود که با MEC و $MECC$ نیز نمایش داده می شود، که مخفف عبارت
Most Entropy Copula Canonical است. توابع $MECC$ کاربرد فراوانی در اقتصاد وبورس دارند وبا کمک روشهای مبتنی بر ضرایب لاگرانژ که جودر سال(۱۹۹۹) بیان کرده به دست می آید . این روشها یکی براساس توزیع های حاشیه ای یکنواخت وگشتاورهای توام ودیگری براساس گشتاورهای توزیع های حاشیه ای یکنواخت می باشد.

فصل اول

توابع مفصل وویژگی های آن

۱- ۱تعاریف ومفاهیم تابع مفصل

تابع مفصل و کاربردهای آن در آماراز جمله مباحث مهم و نسبتاً جدید است.

ساختار توزیع های توأم و بررسی ویژگیهای آنهاباتوزیع‌های حاشیه ای معلوم درصورت عدم استقلال متغیرها کار پیچیده‌ای است. توا بع مفصل به د لیل سا ختار توابع توزیع چند متغیره و بد ست آوردن رابطه بین توزیع توام چند بعدی بابعدهای پایین ترمورد توجه بوده و همچنین جهت بررسی وابستگی بین متغیرها بصورت ناپارامتری در سالهای اخیر مورد توجه آماردانان قرار گرفته است .

۱-۱-۱ تعاریف اولیه

تعریف۱-۱-۱: فرض کنید S_1, S_2 **دو زیر مجموعه غیر تهی از** $\mathbf{R}$ **،** H **یک تابع حقیقی مقدار با دامنه** S_1, S_2 **و** $B=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ **و** $B\subset S_1\times S_2$ **باشد ، آنگاه حجم** H **راکه درمستطیل B قرار دارد به صورت زیر تعریف می کنیم:**

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \qquad (۱-۱-۱)$$

به عبارت دیگر:

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2}\Delta_{x_1}^{x_2}H(x,y),$$

$$\Delta_{x_1}^{x_2}H(x,y) = H(x_2,y) - H(x_1,y)$$

$$\Delta_{y_1}^{y_2}H(x,y) = H(x,y_2) - H(x,y_1).$$

تعریف۱-۱-۲ : تابع حقیقی مقدار H **رادوصعودی گوییم هرگاه برای هر** $B\subset DomH$,

$$V_H(B) \geq 0$$

مثال۱-۱-۱: تابعی H با دامنه $I=[0,1]$ وضابطه زیررا درنظربگیرید

$$H(x,y)=(2x-1)(2y-1)$$

برای B دلخواه و $B\subset I^2$ داریم:

$$\begin{aligned}V_H(B)&=(2x_2-1)(2y_2-1)-(2x_2-1)(2y_1-1)\\&\quad+(2x_1-1)(2y_2-1)-(2x_1-1)(2y_1-1)\\&=(2x_2-1)(2y_2-1-2y_1+1)+(2x_1-1)(2y_2-1-2y_1+1)\\&=2(y_2-y_1)2(x_2-x_1)\geq 0\ .\end{aligned}$$

با مثال بالا نشان دادیم که تابع H دوصعودی است هر چندتابع H به ازای هر $y\in(0,\frac{1}{2})$ نزولی نسبت به x وبا لعکس به ازای هر $x\in(0,\frac{1}{2})$ نزولی نسبت به y می باشد.

لازم به یادآوری است که درادامه منظوراز I بازه $[0,1]$ می باشد.

تعریف۱-۱-۳ : تابع حقیقی مقدار H بادامنه S_1,S_2 راجهت دار گویند اگر به ازای a کوچکترین عضو S_1 و b کوچکترین عضو S_2

$$H(a,y)=H(x,b)=0\,.$$

لم۱-۱-۱::فرض کنید H تابعی دو صعودی وجهت دار با دامنه غیر تهی $S_1\times S_2\subset R$ باشد ، آنگاه H نسبت به هر مولفه اش غیر نزولی است .

برهان : کا فی است نشان دهیم نگاشت $t\to H(t,y_2)-H(t,y_1)$ روی S_1 غیر نزولی است .

مستطیل , $B=[a,t]\times[y_1,y_2]$ وقتی a کوچکترین عضو S_1 است رادرنظربگیرید دراین صورت :

$$V_H(B)=H(t,y_2)-H(t,y_1)+H(a,y_2)-H(a,y_1)=H(t,y_2)-H(t,y_1)$$

وبا توجه به دو صعودی بودن تابع H داریم :

$$H(t,y_2)-H(t,y_1)\geq 0$$

و اثبات تمام است .

وبه طور مشابه می توان نشان داد که به ازای هر $t\in S_2$ نگاشت $t\to H(x_2,t)-H(x_1,t)$ روی S_2 غیر نزولی است .

تعریف۱-۱-۴: تابع $C':S_1\times S_2\to I^2$ را یک زیر مفصل دوبعدی گوییم ، هرگاه

الف) $S_1\times S_2\subset I^2$

ب) C' تابع جهت دار ودوصعودی باشد ،

ج) برای هر $u\in S_1, v\in S_2$ $C'(1,v)=v$ و $C'(u,1)=u$

یعنی برد C' نیز زیرمجموعه I .

تعریف(۱-۱-۵):تا بع $C:I^2\to I$ رایک مفصل دو بعدی گوییم هرگاه:

الف) برای هر $v\in I$, $u\in I$

$C(u,0)=C(0,v)=0$ و $C(u,1)=u$ ، $C(1,v)=v$.

ب) به ازای هر مجموعه چون B که $B\subset I^2$ ، $V_H(B)\geq 0$.

تعریف۱-۱- ۶ : تابع مفصل دو بعدی یک زیر مفصل دو بعدی با دامنه I^2 می باشد.

همچنین تابع مفصل، تابع توزیع چند متغیره روی مکعب واحد nبعدی با توابع حاشیه ای یکنواخت بر I می باشدکه تعمیم تعریف بالااست.

تعریف ۱-۱-۷ : تابع مفصل حاصلضرب برای دو متغیر u,v به صورت زیرتعریف می شود :

$$\pi(u,v)=u.v$$

نتیجه: دو متغیر تصادفی پیوسته X,Y باتابع توزیع $F(X)$ و $G(Y)$ رامستقل گوییم اگربه ازای هر x,y در R

$$\pi(F(x),G(y))=C(F(x),G(y))$$

۱-۱-۲خواص تابع مفصل

الف) اگر C یک تابع مفصل باشد به ازای هر $(u,v)\in I^2$ داریم

$$W(u,v)=\max(u+v-1,0)\le C(u,v)\le \min(u,v)=M(u,v) \qquad ۱-۱-۲$$

نامساوی بالا به کران های بالا وپایین فرشه- هافدینگ معروف است.

به آسانی می توان نشان داد $M(u,v),W(u,v)$ نیز توابع مفصل هستند.

ب) تابع مفصل C نسبت به هر مولفه اش غیرنزولی است وبه عبارت دیگر

$$0\le C(u_2,v)-C(u_1,v)\le u_2-u_1$$

و $$0\le C(u,v_2)-C(u,v_1)\le v_2-v_1$$

ج) تابع مفصل در نامساوی لیپ شیتز صدق می کند:

$$|C(u_2,v_2)-C(u_1,v_1)|\le |u_2-u_1|+|v_2-v_1| \qquad (۱-۱-۳)$$

د) باتوجه به یکنوایی تابع مفصل به ازای $u\in I, v\in I$ مشتقات جزیی موجود و

$$0\le \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\le 1 \qquad 0\le \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\le 1$$

$$0\le \frac{\partial C(u,v)}{\partial u\partial v}\le 1$$

اثبات الف)

$$C(u,v)\le C(1,v)=v \qquad , \; C(u,v)\le C(u,1)=u$$

نامساوی های بیان شده بالا نتیجه می دهد $C(u,v)\le \min(u,v)$

مستطیل $B=[u,1]\times[v,1]$ رادر نظر بگیرید

$$V_H(B)=C(1,1)-C(1,v)+C(u,v)-C(u,1)=1-v-u+C(u,v)\ge 0$$

و $C(u,v)\ge 0$

ازدونامساوی بالانتیجه می شود $C(u,v) \ge \max(0, u+v-1)$

اثبات ب وج به آسانی بااستفاده از روابط بیان شده قبلی حاصل می شوند .

اثبات د) با توجه به خصوصیت ب وج $\left|C(u,v_2)-C(u,v_1)\right| \le \left|v_2-v_1\right|$

که نتیجه می دهد $\left|\dfrac{C(u,v_2)-C(u,v_1)}{v_2-v_1}\right| \le 1$

وبا عنایت به غیر نزولی بودن تابع مفصل نسبت به هر مولفه

$$v_2 - v_1 \ge 0 \qquad , \; C(u,v_2)-C(u,v_1) \ge 0$$

واثبات تمام است.

تعریف۱-۱-۹ : اگر $f(x), f(y)$ تابع چگالی احتمال دومتغیر تصادفی X,Y باشند ، آن گاه

$$f(x,y) = c(F(x),F(y)).f(x).f(y)$$

و $c(u,v)$ تابع چگالی مفصل نامیده می شود :

$$\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u\,\partial v} = c(u,v) \; .$$

تعریف۱-۱- ۱۰ تابع مفصل $U\left|V=v\right.$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$P(u\left|V=v\right.) = C_v(u) = P(U \le u\left|\,V=v\right.) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} .$$

تعریف۱-۱-۱۱ تابع توزیع H با دامنه R^2 دارای خصوصیات زیر می باشد :

الف H) یک تابع دو صعودی است.

ب) $H(\infty,\infty)=1,\; H(x,-\infty)=H(-\infty,y)=0$ که جهت داربودن تابع H رانتیجه می دهد .

مثال۱-۱-۲ : تابع H بادامنه R^2 با ضابطه زیر رادر نظر بگیرید

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(\exp(y)-1)}{x+2y-1} & (x,y) \in [-1,1]\times[0,\infty] \\ 1-\exp(-y) & (x,y) \in (1,\infty]\times[0,\infty] \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$G(y)=\begin{cases} o & y\in[-\infty,0) \\ 1-\exp(-y) & y\in[0,\infty] \end{cases}$$

و

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\in[-\infty,-1] \\ \dfrac{x+1}{2} & x\in[-1,1] \\ 1 & o.w \end{cases}$$

$H(x,0)=0\,,H(-1,y)=0 \Leftarrow$ H جهت دار است .

قضیه زیر مهم ترین قضیه در توابع مفصل است واسکلاربا بیان این قضیه راه را برای مطالعات بیشتر وکاربرد این توابع در علوم دیگر باز کرد.

قضیه۱-۱-۱اسکلار(۱۹۵۹): تابع توزیع توام H با توابع توزیع حاشیه‌ای

F,G رادرنظربگیرید،آن گاه تا بع مفصلی مانند C وجود دارد به طوریکه به ازای هر x,y در R

$$H(x,y)=C(F(x),G(y))$$

وبه بیان دیگر: برای هر توزیع F,G وتابع مفصل C می توان تابع توزیع توام H باتوابع حاشیه ای F,G ساخت .

اگر F,G پیوسته باشند ، C یکتا است.

به دلیل طولانی و پیچیده بودن از برهان قضیه بالاصرف نظر می کنیم ، برای مطالعه برهان به مرجع [8] رجوع کنید.

با استفاده از قضیه اسکلار می توان تابع چگالی مفصل رابه دست آورد:

$$f(x_1,...,x_n)=\partial F=\frac{\partial C(F_1(x_1),...,F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1)...\partial F_n(x_n)}.\prod f_i(x_i)$$

$$=c(F_1(x_1),...,F_n(x_n)).\prod f_i(x_i)$$

ودرنتیجه :

$$c(F_1(x_1),...,F_n(x_n)) = \frac{f(x_1,..,x_n)}{\prod f_i(x_i)}$$

با توجه به قضیه بالا کران فرشه –هافدینگ رامی توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\max(F(x)+G(y)-1,0) \le H(x,y) \le \min(F(x),G(y)).$$

تابع مفصل بقا

درمباحثی از علوم مختلف که بحث بر زنده ماندن وعمر بیشتر یک پدیده ویا یک سیستم است از این تابع صحبت می شود .

تابع آن رابه صورت زیر نشان داده وتابع بقا نامیده می شود :

$$\overline{F}(x) = p(X \ge x) = 1 - F(x)$$

وتابع بقا برای دو متغیر X,Y تصادفی با تابع توزیع توام H به صورت زیر تعریف می شود

$$\overline{H}(x,y) = p(X \ge x, Y \ge y)$$

وتوابع حاشیه ای آن رابا $\overline{F}(x),\overline{G}(y)$ نمایش می دهیم به طوری که $\overline{F}(x) = \overline{H}(x,\infty)$ و $\overline{G}(y) = \overline{H}(\infty,y)$ می باشد.

با استفاده از قضیه اسکلار(۱-۱-۷) داریم:

$$\overline{H}(x,y) = 1 - F(x) - G(y) + C(F(x),G(y))$$

$$= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1-\overline{F}(x), 1-\overline{G}(y)).$$

۱-۱-۳تابع مفصل و متغیرهای تصادفی

لم۱-۱-۲ : فر ض کنید X,Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع توام H باشند ، آن گاه

الف) اگربه ازای هر $(x,y) \in R^2$, $p(X \le x, Y \ge y) = 0$ یا $p(X \ge x, Y \le y)$
آن گاه H درحد بالایی فرشه صدق می کند .

ب) اگربه‌ازای‌هر $(x,y) \in R^2$, $p(X \le x, Y \le y) = 0$ یا $p(X \ge x, Y \ge y) = 0$

آن گاه H درحد پایینی فرشه صدق می کند

اثبات الف) فرض کنید F,G توزیع‌های حاشیه‌ای H با شند به راحتی ثابت می شود که

$$F(x)=H(x,y)+p(X\le x,Y\ge y)$$

و

$$G(y)=H(x,y)+p(X\ge x,Y\le y)$$

از دو رابط بالا نتیجه می شوداگر $\min(p(X\le x,Y\ge y),p(X\ge x,Y\le y))=0$

آن گاه $H(x,y)=M(F(x),G(y))$

اثبات قسمت ب مشابه اثبات الف است .

قضیه ۱-۱-۱ (پایایی) : فر ض کنید X,Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع مفصل C باشند ، آن گاه

الف) اگر α و β توابع یکنوا افزایشی روی R_x,R_y (برد)باشند، آن گاه رابطه $C_{\alpha(x)\beta(y)}=C_{x,y}$ همواره برقرار است.

ب) اگر α و β توابع یکنوا نزولی روی R_x,R_y باشند ، آن گاه رابطه زیر همواره برقرار است.

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v)=u+v-1+C_{x,y}(1-u,1-v)$$

ج) اگر α یکنوا صعودی و β توابع یکنوا نزولی روی R_x,R_y باشند آنگاه رابطه زیر همواره برقرار است

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v)=u-C_{x,y}(u,1-v)$$

د)اگر α یکنوا نزولی و β توابع یکنوا صعودی روی R_x,R_y باشند، آن گاه رابطه زیر همواره برقرار است

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v)=v-C_{x,y}(1-u,v)$$

برهان: اثبات بند های قضیه شبیه به هم است به عنوان نمونه به اثبات قسمت‌الف و ج می پردازیم

اثبات الف) فرض کنید F_2,G_2,F_1,G_1 به ترتیب تابع توزیع متغیرهای $\beta(Y),\alpha(X),X,Y$ باشند با توجه به افزایشی بودن α و β داریم:

$$F_2(x)=P(\alpha(X)\le x)=P(X\le \alpha^{-1}(x))=F_1(\alpha^{-1}(x))$$

وبه طور مشابه : $G_2(y)=G_1(\beta^{-1}(y))$.

بنابراین به ازای هر $x,y\in R$ داریم:

$$\begin{aligned}C_{\alpha(x)\beta(y)}(F_2(x),G_2(y))&=P(\alpha(X)\le x,\beta(Y)\le y)\\&=P(X\le \alpha^{-1}(x),Y\le \beta^{-1}(y))\\&=C_{X,Y}(F_1(\alpha^{-1}(x),G_1(\beta^{-1}(y))\\&=C_{X,Y}(F_2(x),G_2(y)).\end{aligned}$$

اثبات ج)

$$\begin{aligned}C_{\alpha(x)\beta(y)}&=p(\alpha(X)\le x,\beta(Y)\le y)=p(X\ge \alpha^{-1}(x),Y\ge \beta^{-1}(y))\\&=p(X\ge \alpha^{-1}(x))-p(X\ge \alpha^{-1}(x),Y\le \beta^{-1}(y))\\&=p(X\ge \alpha^{-1}(x))-p(y\le \beta^{-1}(y))+p(X\le \alpha^{-1}(x),Y\le \beta^{-1}(y))\\&=1-F(\alpha^{-1}(x))+G(\beta^{-1}(y))+C_{X,Y}(1-F(\alpha^{-1}(x),1-G(\beta^{-1}(y))\\&=1-u-v+C_{X,Y}(1-u,1-v)\ .\end{aligned}$$

قضیه بالا بیانگراین مطلب است که توزیع توابع یکنوا ازمتغیرهای تصادفی رابه کمک توابع مفصل به دست آورد.

درادامه ما نتایج ارائه شده قبلی رابه مفاصل n بعدی (مفاصل چند متغیره)توسیع می دهیم .

۱-۱-۴توابع مفصل چند متغیره

تابع n بعدی وحقیقی مقدار $H:S\longrightarrow R$ بادامنه $S_1,\dots,S_n=S\subset R^n$ رادرنظر بگیرید.

تعریف۱-۱- ۱۲ : به ازای دو بردار $b=(b_1,\dots,b_n)$ و $a=(a_1,\dots,a_n)$ گوییم $a<b$ اگر به ازای هر $k=1,2\dots,n$ ، $a_k<b_k$

تعریف۱-۱-۱۳ :فرض کنید $a<b$ وحجره n بعدی $B=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ رادرنظر بگیرید $c=(c_1,\dots,c_n)$, راگو شه های یک حجره n بعدی B گوییم وقتی به ازای هر $k=1,2\dots,n$ ، c_k مساوی a_k یا b_k باشد .

تعریف ۱-۱-۱۴: فرض کنید B یک حجره n بعدی در $[a,b]$ باشدکه تمام گوشه های آن زیر مجموعه دامنه H باشند. آن گاه حجم H در B را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V_H(B) = \sum Sgn(c)H(c) \ ،$$

که c مجموعه تمام گوشه های B است ، $c = \{c_1,..., c_n\}$

و $Sgn(c)$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Sgn(c) = \begin{cases} 1 & , \ c_k = a_k \ , \ k = even \\ -1 & , \ c_k = a_k \ , \ k = odd \end{cases}$$

وبه عبارت دیگر حجم H که در حجره n بعدی B محصوراست به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_H(B) = \Delta_{a_n}^{b_n} ... \Delta_a^{b_1} H(t)$$

$$\Delta_a^b H(t) = H(t_1,..., t_{k-1}, b, t_{k+1},..., t_n) - H(t_1,..., t_{k-1}, a,..., t_n).$$

مثال(۱-۱- ۵) : **فرض کنید** H یک تابع۳بعدی و حقیقی مقدار بادامنه R^3 باشد

حجم H درمکعب $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$ رابه صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$\begin{aligned} V_H(B) = & [H(x_2, y_2, z_2) - H(x_2, y_2, z_1)] \\ & -[H(x_1, y_1, z_2) - H(x_1, y_1, z_1)] \\ & -[H(x_1, y_2, z_2) - H(x_1, y_2, z_1)] \\ & +[H(x_2, y_1, z_2) - H(x_2, y_1, z_1)] \end{aligned}$$

.

تعریف(۱-۱-۱۵) : تابع حقیقی مقدار H را n صعودی گویند اگر برای هر B دردامنه H داشته باشیم $V_H(B) \geq 0$,.

تعریف(۱-۱-۱۶) : **تابع حقیقی مقدار** H **بادامنه** $S=\{S_1,\dots,S_n\}$ **را درنظر بگیرید وقتی** S_K **مجموعه غیر تهی و** a_k **کوچکترین گوشه** S_K **باشد،**

H **را جهت دار گوییم اگر به ازای هر** $t:(t_1,\dots,t_n)$ **متعلق به دامنه ,** H $H(t)=0$ **اگرحداقل یکی از** t_i **هابرابر** a_i **باشد.**

تعریف(۱-۱-۱۷) : **فرض کنید** b_k **بزرگترین عضو** S_k **و** S_k **غیر تهی باشد ، توزیع های حاشیه ای** H **رابه صورت زیر تعریف می کنیم:**

توزیع حاشیه ای تک متغیره(یک بعدی) به ازای هر $x\in sk$:

$$H_K(x)=H(b_1,..,b_{k-1},x,b_{k+1},\dots,b_n),$$

حاشیه ای دو متغیره(دوبعدی) به ازای هر $x\in sk$ **و** $y\in s_m$:

$$H_{K,m}(x,y)=H(b_1,..,b_{k-1},x,b_{k+1},\dots,b_{m-1},y,b_{m+1},\dots,b_n)$$

و. . . .

مثال (۱-۱-۶) : **تابع** H **با دامنه** $[-1,1]\times[0,\infty]\times[0,\pi]$ **وضابطه زیررا در نظر می گیریم**

$$H(x,y,z)=\frac{(x+1)(\exp(y)-1)\sin z}{x+2\exp(y)-1}$$

$H(x,y,0)=0$ $H(-1,y,z)=H(x,0,z)=$ **در نتیجه** H **جهت داراست.**

توابع حاشیه‌ای تک بعدی :

$$,H_1(X)=H(x,\infty,\pi/2)=\frac{x+1}{2}$$

$$,H_3(z)=H(1,\infty,z)=\sin z$$

$$H_2(y)=H(1,y,\pi/2)=1-\exp(-y).$$

توابع حاشیه ای دو بعدی:

$$, H_{1,2}(x,y) = H(x,y,\pi/2) = \frac{(x+1)(\exp(y)-1)}{x+2\exp(y)-1}$$

$$H_{2,3}(y,z) = H(1,y,z) = \frac{(1-\exp(y))\sin z}{2} \quad ,$$

$$H_{1,3}(x,z) = H(x,\infty,z) = \frac{(x+1)\sin z}{2} .$$

حال به بیان مطالب اساسی در مفصل n بعدی می پردازیم

تعریف(۱-۱-۱۸) : **تابع** n **بعدی** $C : I^n \longrightarrow I$ **تابع مفصل است اگر:**

الف) **به ازای هر** $u \in I^n$ ، $C(u) = 0$ **اگرحداقل یکی از** $u_i = 0$ ،

و $C(u) = C(1,...,1,u_k,1,..,1) = u_k$ **اگربه ازای هر** $u_i = 1$ **,** $i = 1,..,n \neq k$

ب)به ازای هر $a,b \in I^n$ **وقتی** $a < b$ **باشد:**

$$V_C([a,b]) \geq 0 .$$

مثال(۱-۱-۷) : **تابع** $C : I^3 \rightarrow I$ **باضابطه زیررادر نظربگیرید**

$$C(u,v,w) = w.\min(u,v) \quad ,$$

$$, C(0,v,w) = C(u,0,w) = C(u,0,w) = 0$$

$$C(1,v,1) = 1 \times \min(1,v) = v \quad , \quad C(1,1,w) = w \times \min(1,1)$$

$$, C(u,1,1) = 1 \times \min(u,1) = u$$

برای هر B **دلخواه‌که** $B \subset I^3$ **و** $B = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ **داریم:**

$$, V_C(B) = \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} = (b_3 - a_3) \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} \min(u,v) \geq 0$$

$$C_{1,2} = C(u,v,1) = \min(u,v) = M(u,v) \quad \text{و} \quad C_{2,3} = C(1,v,w) = \pi(v,w)$$

$$C_{1,3} = C(u,1,w) = w.v = \pi(u,w) .$$

با مثال بالا نشان دادیم که هر توزیع حاشیه ای k بعدی مفصل n **بعدی خود یک تابع مفصل است.**