دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

معرفی گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی

استاد راهنما :

دکتر اسماعیل فیضی

استاد مشاور:

دکتر حجت اله سامع

پژوهشگر :

ابراهیم فصاحت

بهمن ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

آقای ابراهیم فصاحت

تحت عنوان:

معرفی گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی

Introduction of locally compact quantum groups

به ارزش ٤ واحد در روز یکشنبه مورخ ١٣٨٩/١١/٢٤ساعت١٦-١٤ در محل آمفی تئاتر (١) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره ١٩/٨٥ درجه عالی ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
١	استاد راهنما	دکتر اسماعیل فیضی	استادیار-ریاضی-علوم-بوعلی سینا	

قدردانی

یاد خدا آرام بخش دلهاست.

خدای متعال را سپاس می‌گویم که توان آموختنم بخشید و از الطاف بی‌کرانش فرصتی مغتنم داد تا مرحله دیگری از فراگیری را به انتها برسانم.

اکنون که به خواست پروردگار این رساله پایان یافته است وظیفه خود می‌دانم از همکاری تمام کسانی که در انجام مراحل مختلف این کار مرا یاری داده‌اند صمیمانه سپاسگزاری نمایم. از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر اسماعیل فیضی و استاد مشاور گران‌قدرم جناب آقای دکتر حجت اله سامع که صبورانه طی این مدت مرا یاری و حمایت نمودند و از هیچ کوششی در خصوص آراستن دانشجویان به زیور علم و دانش دریغ نورزیده‌اند، کمال تشکر را دارم و برای آنها از خداوند منان سلامتی و توفیق روز افزون آرزومندم.

از جناب آقای دکتر محمد موسایی و همچنین جناب آقای دکتر مسعود امینی که زحمت داوری و بازخوانی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند بسیار سپاسگزارم.

بی‌نهایت احساس قدردانی و سپاس خود را تقدیم می‌دارم به خانواده بی‌همتایم، پدرم، تکیه‌گاه زندگیم، مادرم، اسطوره عشق و یار بی‌همتای زندگیم و خواهران و برادرم، عزیزان زندگیم. و در پایان از تمامی عزیزانی که در تکمیل این پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

کوشیدم و نوشتم به شکرانه معبود و هدایت خلق.

ابراهیم فصاحت

بهمن ماه ۸۹

دانشگاه بوعلی سینا

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه بوعلی سینا مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی		
عنوان: **معرفی گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی**		
نام نویسنده: ابراهیم فصاحت		
نام استاد/اساتید راهنما: دکتر اسماعیل فیضی		
نام استاد/اساتید مشاور: دکتر حجت اله سامع		
دانشکده : علوم پایه	گروه آموزشی: ریاضی	
رشته تحصیلی: ریاضی محض	گرایش تحصیلی: آنالیز	مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
تاریخ تصویب: ۸۸/۷/۱۵	تاریخ دفاع: ۸۹/۱۱/۲۴	تعداد صفحات: ۱۴۸

چکیده:

این پایان نامه به معرفی گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی در چارچوب نظریه جبر عملگرها، یعنی C^*-جبرها و جبرهای فون نویمان، خواهد پرداخت. این نظریه برگرفته شده از کار کاسترمن و واعظ [۱۵] و [۱۶] می باشد.

از نظر تاریخی اولین ایده در ایجاد اصول کوانتیزه کردن گروه‌های فشرده موضعی، تعمیم قضیه دوگانی پنتریاگین برای گروه‌های فشرده موضعی ناآبلی بوده است. از آنجا که دوگان یک گروه ناآبلی گروه نیست، بنابراین باید رسته بزرگتری که شامل گروه و دوگان آن باشد را جستجو کرد. بعد از کارهای پایه‌ای توسط تاناکا، کرین، کاتس و تاکساکی این مساله در دهه هفتاد به طور جداگانه توسط انوک و شوارتز [۷] کاتس و واینرمن [۱۲] و [۱۳] به طور کامل حل شد. ساختاری که آنها تعریف کردند جبرهای کاتس نامیده شد.

ورونوویچ [۳۲] کوانتوم SU(۲) را به عنوان یک C^*-جبر همرا ه با هم ضرب معرفی کرد، ویژگی‌های SU(۲) چنان شبیه به گروه بود که می‌شد آن را به عنوان گروه کوانتمی در نظر گرفت، اما این مثال در رسته جبرهای کاتس قرار نگرفت، بنابراین رسته جبرهای کاتس نمی‌تواند شامل همه گروه‌های کوانتمی باشد، پس باید به گسترش آن پرداخت.

اولین موفقیت در این راستا توسط ورونوویچ [۳۱] و [۳۳] بدست آمد وی موفق شد به طور ساده گروه های کوانتمی فشرده را تعریف و مهمتر از آن وجود و یکتایی حالت هار روی این فضاها را اثبات کند.

موفقیت‌های بعدی نگرش متفاوتی برای ما فراهم آورد. باج و اسکاندالیس [۲] مطالعه یکانی‌های ضربی را چنان ایجاد کردند که می‌توان آنها را به عنوان تعمیم عملگر کاتس-تاکساکی گروه‌های فشرده موضعی در نظر گرفت. آنها به یک یکانی ضربی، دو C^*-جبر به همراه هم ضرب چنان وابسته ساختند که دوگان یک دیگر محسوب می شدند، همچنین هم‌وارون آنها به طور چگال تعریف می‌شد. به این صورت آنها هر دو ساختار گروه‌های فشرده کوانتمی و جبرهای کاتس را بدست آوردند.

پارامتری از خودریختی‌های جبرهای فون نویمان هستند، بازسازی کرد. سپس مسودا و ناکاگامی [۲۰] جبرهای ورونوویچ و به طورکلی جبرهای کاتس را با استفاده از گروه‌های مقیاس فرمول بندی کردند. آنها توانستند دوگان را نیز در همان رسته بدست آورند، همچنین نظریه آنها مثال‌های شناخته شده یعنی گروه‌های کوانتمی فشرده و جبرهای کاتس را شامل می شد. به هر حال ایراد نظریه آنها وجود اصول و شرایط زیاد آن بود. سرانجام یک تعریف نسبتا ساده توسط کاسترمن و واعظ[۱۵] و [۱۶] ارایه گردید. به طور کلی برای تهیه این پایان نامه از [۱۷] که توسط کاسترمن نوشته شده استفاده شده است.

در اولین فصل تعاریف و ابزار مورد نیاز بیان و در فصل دوم سعی شده با بررسی گروه‌های فشرده موضعی و بازسازی آنها با ابزار جدید به ایده تعریف گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی پرداخته شود. در فصل سوم گروه‌های فشرده موضعی به همراه مثال‌هایی از این فضاها بیان شده است. در فصل چهارم ابزار پیشرفته تر این نظریه و تعریف گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی ارائه و سرانجام در فصل پنجم نیز به جمع بندی و ارایه نتایج به دست آمده در این فضاها پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: C^*-جبر، جبر فون نویمان، جبر هاپف، $*-$ جبر هاپف، گروه فشرده موضعی، دوگان گروه فشرده موضعی، نمایش‌های گروه فشرده موضعی، وزن، عملگرهای بسته، عملگرهای بسته پذیر، گروه کوانتمی فشرده، گروه کوانتمی فشرده موضعی

فهرست مندرجات

۱ تعاریف اولیه ۴

۱.۱ C^*-جبرها ۸

۲.۱ عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت ۱۲

۳.۱ جبرهای فون نویمان ۲۰

۴.۱ ضرب تانسوری ۲۵

۵.۱ آنالیز هارمونیک ۳۴

۶.۱ هاپف جبرها ۳۸

۲ ساختار دوگان در گروه‌های فشرده موضعی ۴۵

۱.۲ گروه فشرده موضعی آبلی ۴۵

۲.۲ نظریه ایمارد ۴۷
۳.۲ بازسازی ساختار گروه فشرده موضعی G با ابزار C^*−جبرها . . . ۵۱
۳ گروه‌های کوانتمی فشرده ٦۵
۱.۳ نظریه هم‌نمایش ۷۱
۲.۳ مثال‌هایی از گروه‌های کوانتمی فشرده ۷٦
۳.۳ نمایش منظم چپ گروه کوانتمی فشرده ۹۰
۴ گروه کوانتمی فشرده موضعی ۹۴
۱.۴ نگاشت‌های خطی بسته ۹۵
۲.۴ نظریه وزن ۹۷
۳.۴ عنصر پیمانه‌ای ۱۰٦
۴.۴ گروه کوانتمی فشرده موضعی در قالب جبرهای فون نویمان . . . ۱۱۳
۵.۴ دوگان گروه کوانتمی فشرده موضعی ۱۲۲

۶.۴ نسخه C^*–جبری گروه‌های کوانتمی فشرده موضعی ۱۳۳

۵ بحث و نتیجه گیری ۱۳۶

۶ واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۴۲

فصل ۱

تعاریف اولیه

امروزه یکی از ساختمان‌های مهم ریاضیات مدرن فضای نرم‌دار کامل یا همان فضاهای باناخ می‌باشند. در واقع بسیاری از مسائل ریاضی می‌تواند به شکل فضای باناخ مطرح گردد و سپس با استفاده از ابزارهای قوی موجود در این نظریه حل شود. گستره‌ی کاربردهای فضاهای باناخ در حال حاضر فقط به ریاضیات محدود نمی‌شود و شاخه‌های مختلف علم را در برمی‌گیرد.

تعریف ۱.۰.۱ **فضای باناخ** : فضای نرم‌دار A را فضای باناخ گویند، هرگاه متر القا شده از نرم آن، A را به یک فضای متریک کامل تبدیل کند.

مثال ۲.۰.۱

الف) فرض کنید (X, M, μ) فضای اندازه باشد. برای هر $1 \leq p < \infty$، فضای برداری $L^p(X, \mu)$ متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$، فضای باناخ است. همچنین فضای برداری $L^\infty(X)$، متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به

گونه‌ای که $\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 \ : \ \mu(\{x : \ |f(x)| > a \ \}) = 0\} < \infty$، فضای باناخ است.

ب) فرض کنید X فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد. $M(X)$ مجموعه اندازه‌های رادون مختلط روی X با نرم $\|\mu\| := |\mu|(X)$ فضای باناخ است.

تعریف ۳.۰.۱ جبر باناخ : فضای باناخ A همراه با نگاشت دو خطی $(a, b) \mapsto ab$ به نام ضرب، به گونه‌ای که برای هر $a, b, c \in A$ رابطه‌های $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ و $(ab)c = a(bc)$ برقرار باشند، را جبر باناخ گویند.

جبر باناخ A را جابجایی گویند، هر گاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$. و آن را یکدار گویند، هر گاه عنصر $e \in A$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $ae = ea = a$. همچنین A را داری واحد تقریبی کراندار گویند، هر گاه تور $\{e_i\}_{i\in I}$ روی A چنان موجود باشد که $\sup_{i\in I} \ \|e_i\| < \infty$ و برای هر $a \in A$ داشته باشیم $e_i a \longrightarrow a$ و $ae_i \longrightarrow a$.

مثال ۴.۰.۱

الف) فرض کنید X فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد. $C_\circ(X)$ مجموعه توابع مختلط مقدار پیوسته که در بی نهایت به صفر میل می‌کنند. با نرم یکنواخت و ضرب نقطه‌ای جبر باناخ جابجایی است.

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \ x \in X\}, \qquad (f.g)(x) = f(x)g(x), \qquad (f, g \in C_\circ(X))$$

$C_\circ(X)$ یکدار است اگر و تنها اگر X فشرده باشد. همچنین $C_\circ(X)$ دارای واحد تقریبی کراندار می‌باشد. توجه کنیم اهمیت مطالعه $C_\circ(X)$ در استفاده آن به

عنوان مدل مکانیک کلاسیک (نیوتنی) می‌باشد، که در حالت جبرهای عملگری همان مدل C^*−جبرهای جابجایی می‌باشد. در ادامه این موضوع را روشن‌تر بیان خواهیم کرد.

ب) $M_n(\mathbb{C})$ مجموعه ماتریس های $n \times n$ مختلط با ضرب ماتریسی و نرم $\|A\| = \sup\{|A(x)| : \ \|x\| \leq ۱\}$ جبر باناخ ناجابجایی و یکدار می‌باشد.

ج) فضای $L^\infty(X)$ با ضرب نقطه‌ای جبر باناخ جابجایی و یکدار است.

هر جبر باناخ غیر یکدار، در جبر باناخ یکدار قابل نشاندن است. در واقع اگر A جبر باناخ غیر یکدار باشد، فضای برداری $\tilde{A} = A \bigoplus \mathbb{C}$ با ضرب و نرم

$$(a, \lambda)(b, \nu) = (ab + \lambda b + \nu a, \lambda\nu), \qquad \|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

برای هر $a, b, c \in A$ و $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$، جبر باناخ با یکه $(۰, ۱)$ می‌باشد. A با نگاشت $a \mapsto (a, ۰)$ در $\tilde{A}$ قابل نشاندن است، بنابراین می‌توان A را به عنوان ایده‌آلی از $\tilde{A}$ در نظر گرفت، در واقع A ایده‌آل اساسی $\tilde{A}$ می‌باشد، یعنی اگر برای $a \in A$ داشته باشیم $a\tilde{A} = \{۰\}$ و $\tilde{A}a = \{۰\}$ آنگاه a صفر باشد.

قضیه **۵.۰.۱ نمایش ریس**[۱] : فرض کنید X فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد، برای هر $\mu \in M(X)$ نگاشت I_μ با ضابطه $I_\mu(f) = \int f d\mu$ برای هر $f \in C_\circ(X)$، عضوی از $C_\circ(X)^*$ می‌باشد، در این صورت نگاشت $\mu \mapsto I_\mu$ یکریختی طولپا از $M(X)$ به $C_\circ(X)^*$ می‌باشد، بنابراین $M(X) \cong C_\circ(X)^*$.

اثبات. قضیه (۵.۷)[۴]. □

همان‌طور که در مثال (۵.۱.۱) دیده شد برای فضای فشرده موضعی و هاسدورف X، $C_\circ(X)$ جبر باناخ جابجایی است. اکنون سوالی به وجود می‌آید که آیا هر جبر باناخ

[۱] Reisz Representation Theorem

جابجایی را می‌توان به صورت $C_\circ(X)$ نمایش داد؟ در حالت کلی این امر صحیح نیست در ادامه خواهیم دید که با اعمال شرایطی بر جبر باناخ جابجایی این امر تحقق خواهد یافت.

فرض کنید A جبر باناخ جابجایی باشد. یک مشخصه روی A، تابع مختلط مقدار ناصفر خطی، پیوسته و ضربی روی A می‌باشد. مجموعه مشخصه‌های روی A را فضای مشخصه A گویند و با نماد $\Omega(A)$ نمایش می‌دهند. با توجه به قضیه باناخ آلاغلو $\Omega(A)$ فضای فشرده موضعی و هاسدورف می‌باشد. اگر A یکدار باشد، آنگاه $\Omega(A)$ فشرده است[۲۱]. برای هر $a \in A$ نگاشت

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\tau) = \tau(a), \qquad (\tau \in \Omega(A))$$

عضوی از $C_\circ(\Omega(A))$ است که آن را تبدیل گلفاند a گویند.

قضیه ۱.۰.۶ **نمایش گلفاند**: فرض کنید A جبر باناخ جابجایی باشد. در این صورت نگاشت $a \mapsto \hat{a}$ از A به $C_\circ(\Omega(A))$ همریختی، نرم کاهشی می باشد. یعنی برای هر $a \in A$ داریم $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$.

در ادامه به بررسی و تعریف مفهومی روی جبرهای باناخ می‌پردازیم که نگاشت قضیه نمایش گلفاند توسط آن یکریختی شود. در واقع این مفهوم تعمیم عمل مزدوج اعداد مختلط به ساختار جبرهای باناخ می‌باشد.

تعریف ۱.۰.۷ **$*-$جبرباناخ** : یک برگشت روی جبر A نگاشت یاد خطی $a \mapsto a^*$ از A به A می‌باشد، به گونه‌ای که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$. جبر باناخ A همراه با برگشت $*$ به گونه‌ای که برای هر عضو $a \in A$ رابطه $\|a^*\| = \|a\|$ برقرار باشد را $*-$جبر باناخ گویند.

مثال ۸.۰.۱

الف) $C_\circ(X)$ که X فضای فشرده موضعی و هاسدورف است. با برگشت $f^* = \bar{f}$، $*-$جبر باناخ است.

ب) $M_n(\mathbb{C})$ با برگشت $(a_{ij})^* = (\bar{a_{ji}})$، $*-$جبر باناخ است.

ج) $L^\infty(X)$ با برگشت $f^* = \bar{f}$، $*-$جبر باناخ است.

۱.۱ C^*-جبرها

در واقع ویژگی مورد نظر که باید بر ساختمان جبر باناخ جابجایی وجود داشته باشد که بتوان آن را به صورت $C_\circ(X)$ که X فضای فشرده موضعی و هاسدورف است، نمایش داد، ویژگی C^*-جبر بودن است. فرض کنید A، $*-$جبر باناخ باشد، اگر برای هر $a \in A$ رابطه $\|a^*a\| = \|a\|^2$ برقرار باشد، دراین صورت A را C^*-جبر گویند.

مثال ۱.۱.۱ جبرهای باناخ $C_\circ(X)$، $M_n(\mathbb{C})$ و $L^\infty(X)$ در مثال قبل C^*-جبر می‌باشند.

نشان داده شده است که برای گروه فشرده موضعی غیربدیهی G، $L^1(G)$ یک C^*-جبر نیست. در بخش‌های بعدی به طور مفصل‌تری به این فضاها اشاره خواهیم کرد. قضیه زیر به سوال قبلی به طور کامل پاسخ خواهد داد.

قضیه ۲.۱.۱ گلفاند : فرض کنید A یک C^*-جبر جابجایی ناصفر باشد، در این صورت نگاشت $a \mapsto \hat{a}$ از A به $C_\circ(\Omega(A))$، $*-$یکریختی طولپا است.

اثبات. قضیه (۲.۱.۱۰) [۲۱]. □

بنابراین

C^*–جبرهای جابجایی $\longleftrightarrow$ فضای فشرده موضعی و هاسدورف

$$X \quad \longleftrightarrow \quad A = C_\circ(X)$$

تعریف **۳.۱.۱** فرض کنید A یک C^*–جبر باشد و $a \in A$، در این صورت a را حقیقی یا خود الحاقی [۲] گویند، هرگاه $a = a^*$، آن را نرمال [۳] گویند، هرگاه $aa^* = a^*a$، آن را تصویر [۴] گویند، هرگاه $a^* = a = a^۲$. اگر A یکدار باشد، a را یکانی [۵] گویند، هرگاه $aa^* = a^*a = ۱$. a را مثبت [۶] گویند، هرگاه $b \in A$ وجود داشته باشد که $a = b^*b$. مجموعه عناصر مثبت A را با A^+ نمایش می‌دهند، که یک مخروط [۷] بسته[۲۱] است. و با توجه به این مفهوم می‌توان رابطه ترتیبی $a \leq b \Longleftrightarrow b - a \in A^+$ را روی مجموعه عناصر خود الحاق A یعنی A_{sa} تعریف کرد.

لازم به ذکر است که منظور از مخروط زیر مجموعه‌ای از A است که نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر اعداد مثبت بسته باشد. برای مثال اگر $f \in C_\circ(X)$ آنگاه f مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) \geq \circ$.

تبصره **۴.۱.۱** قدر مطلق هر عنصر C^*–جبر A، مانند a به صورت $|a| := (aa^*)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می شود. a را می‌توان به صورت $a = Re(a) + iIm(a)$ نمایش داد که در آن $Re(a) = \frac{a^*+a}{۲}$ و $Im(a) = \frac{a^*-a}{۲i}$ که هر دو خود الحاق می‌باشند. هر عضو خود الحاق b را می‌توان به صورت تفاضل دو عنصر مثبت b^+ و b^- نمایش داد $b = b^+ - b^-$ که در آن $b^+ = \frac{۱}{۲}(|b| + b)$ و $b^- = \frac{۱}{۲}(|b| - b)$. اگر C^*–جبر A یکدار باشد و a در گوی واحد

---

[۲] self-adjoint

[۳] normal

[۴] projection

[۵] unitary

[۶] positive

[۷] cone

بسته A باشد، آنگاه $1 - a^2 \in A^+$ و عناصر

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2} \quad , \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}$$

یکانی هستند و $a = \frac{1}{2}(u + v)$. بنابراین هر C^*−جبر یکدار ترکیب خطی عناصر یکانی خود می‌باشد. برای بررسی این مطالب به صفحه ۴۵ مرجع [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۵.۱.۱ اگر A یک $*$−جبر باشد، آنگاه حداکثر یک نرم روی A وجود دارد که A را تبدیل به C^*−جبر می‌کند.

اثبات. نتیجه (۲.۱.۲) [۲۱]. □

توجه کنیم که در قضیه قبل منظور این است که اگر روی C^*−جبر A نرم دیگری وجود داشته باشد که C^*−نرم باشد، آنگاه این نرم با نرم A برابر می‌شود.

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنید A یک $*$−جبر باناخ و B یک C^*−جبر باشد و نگاشت $\pi : A \longrightarrow B$، $*$−همریختی باشد، در این صورت π نرم کاهشی است، یعنی برای هر $x \in A$ داریم $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. و اگر π یک به یک باشد، آنگاه π طولپا است.

اثبات. قضیه (۲.۱.۷)[۲۱]. □

تعریف ۷.۱.۱ تابع مختلط مقدار w روی C^*−جبر A را مثبت گویند، هرگاه برای هر $x \in A^+$ داشته باشیم $w(x) \geq 0$. مجموعه تابع‌های خطی و مثبت روی A را با A_+^* نمایش می‌دهند، که یک مخروط بسته در A^* است.

تابعی خطی و مثبت ω روی C^*−جبر A خود به خود پیوسته می‌باشد (قضیه (۱.۳.۳)[۲۱]). یک حالت[8] روی C^*−جبر A تابعی خطی و مثبت با نرم یک است.

[8] state

همچنین اگر A یک C^*–جبر یکدار باشد، آنگاه تابعی خطی و کراندار ω روی A مثبت است اگر و تنها اگر $\|\omega\| = \omega(1)$. قضیه (۳.۳.۴)[۲۱] را ببینید.

مثال ۸.۱.۱ برای C^*–جبر $C_\circ(X)$ با توجه به قضیه نمایش ریس $C_\circ(X)^*_+$ با مجموعه اندازه‌های مثبت، رادون و متناهی روی X متناظر می‌شود.

قضیه ۹.۱.۱ **تجزیه ژردان**[۹] : فرض کنید w تابعی خطی، کراندار و حقیقی مقدار روی C^*–جبر A باشد، در این صورت تابعی‌های خطی و مثبت w_+ و w_- روی A وجود دارند که $w = w_+ - w_-$ و $\|w\| = \|w_+\| + \|w_-\|$.

اثبات. قضیه(۳.۳.۱۰) [۲۱]. □

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید A یک C^*–جبرباشد، در این صورت تور $\{u_i\}_{i\in I}$ از عناصر A^+ وجود دارد که

۱) برای هر $i \in I$ داریم $\|u_i\| \leq 1$.

۲) اگر $i \leq j$ آنگاه $u_i \leq u_j$.

۳) برای هر $a \in A$ داریم $u_i a \longrightarrow a$ و $au_i \longrightarrow a$.

بنابراین هر C^*–جبر دارای واحد تقریبی کراندار می‌باشد.

اثبات. نتیجه(۳.۱.۱) [۲۱]. □

یکی از ابزار مناسب برای C^*–جبرها امکان تعریف تابع‌های پیوسته روی عناصر نرمال آن‌ها می‌باشد. برای توضیح دقیق این مطلب نیاز به تعریف طیف عناصر C^*–جبر

[۹] Jordan Decomposition

داریم. فرض کنید a عنصری از C^*-جبر یکدار A باشد، مجموعه $\sigma(a)$ متشکل از $\lambda \in \mathbb{C}$ که $a - \lambda.1$ در A معکوس پذیر نیست را طیف a گویند. اگر a عضوی از C^*-جبر غیر یکدار A باشد، آنگاه طیف $\sigma(a)$ در C^*-جبر $\tilde{A}$ در نظر گرفته می‌شود. $\sigma(a)$ زیر مجموعه ناتهی و فشرده $\mathbb{C}$ و مشمول در گوی واحد بسته به شعاع $\|a\|$ می‌باشد. برای بررسی این نتایج به فصل اول مرجع [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۱۱.۱.۱ **حساب تابعی** [۱۰] : فرض کنید A یک C^*-جبر یکدار و a عنصر نرمال در A باشد. در این صورت $*$-همریختی یکدار و یکتا $\pi : C(\sigma(a)) \longrightarrow A$ به گونه‌ای که $\pi(i_{\sigma(a)}) = a$ وجود دارد. π را حساب تابعی (پیوسته) در a گویند و برای هر تابع $f \in C(\sigma(a))$ قرار می‌دهند $f(a) := \pi(f)$.

اثبات. قضیه (۱۳.۱.۲) [۲۱]. □

۲.۱ عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت

هم‌چنان که در قسمت قبل دیدیم به کمک قضیه گلفاند همه‌ی C^*-جبرهای جابجایی به صورت $C_\circ(X)$ می‌باشند. توجه کنیم که در حالت ناجابجایی این مسئله قابل طرح است که آیا مدلی کلی برای معرفی C^*-جبرها وجود دارد. از جمله C^*-جبرهای ناجابجایی فضای ماتریس‌های $n \times n$ مختلط، $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ می‌باشد، که با توجه به مفاهیم جبر خطی مقدماتی داریم $M_{n\times n}(\mathbb{C}) \cong L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. در حالت کلی تعمیم $\mathbb{C}^n$ همان فضاهای ضرب داخلی می‌باشد که حالت خاص فضاهای هیلبرت هستند. اکنون در این بخش به مفاهیم فضاهای هیلبرت و فضای عملگرهای کراندار روی آنها خواهیم پرداخت. در واقع مطالعه این مفاهیم برای مدل ناجابجایی قضیه گلفاند خواهد بود.

---
[۱۰] functional calculus