بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم و تحقیقات و فناوری
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض
گرایش جبر

عنوان
بعد گرنشتاین مدول‌ها

استاد راهنما
دکتر شیرویه پیروی

استاد مشاور
دکتر محمد اخوی زادگان

توسط
زهرا رحیمی ملایی

مهر ۱۳۹۰

خدایا:

آتش مقدس شک را آن چنان در من بیفروز تا همه‌ی یقین‌هایی را که در من نقش کرده‌اند، بسوزد و آنگاه از پس توده‌ی این خاکستر، لبخند مهراوه بر لبهای صبح، یقینی شسته از هر غبار، طلوع کند.

تشکر و قدردانی

اکنون که با یاری خداوند متعال، کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، بدین وسیله از استاد بزرگوار، فرزانه و فرهیخته، استاد راهنمایم جناب آقای دکتر شیرویه پیروی که تجارب ارزشمندشان را در اختیار اینجانب قرار داده‌اند و مرا در تکمیل این پایان‌نامه یاری کرده‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. همچنین، از استاد بزرگوار، استادمشاورم، جناب آقای دکتر محمد اخوی زادگان که از راهنمایی‌های ایشان بهره برده‌ام، تشکر می‌کنم. از خدای منّان سلامتی و پیشرفت و توفیق روزافزون را برایشان آرزومندم.

زهرا رحیمی ملایی

تقدیم به خانواده‌ی عزیزم، مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور داشتن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی چند مفهوم و نتیجه از نظریه‌ی مدول‌ها، روی حلقه‌های جابجایی می‌پردازیم. بیشتر مطالب پیرامون بعد گرنشتاین و قضایای مربوط به آن است. دوگان اسلاندر، مدول‌های $k-$ بدون تاب و $k-$ امین syzygyها، برخی از نتایج مرتبط با بعد گرنشتاین هستند. دو دلیل زیر نمونه‌ای از دلایلی است که منجر به مطالعه‌ی بعد گرنشتاین شده است

(۱) مدول‌هایی که بعد تصویری متناهی دارند، بعد گرنشتاین متناهی نیز دارند؛

(۲) بعد گرنشتاین خصوصیات بهتری نسبت به بعد تصویری دارد. بخصوص در فرمول اسلاندر—بریجر این نتیجه مشهودتر است.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

ضرب تانسوری $R-$ مدول‌های M و N	$M \otimes N$
مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به M	$\mathrm{Ass}_R(M)$
موضعی‌شده‌ی R در $\mathfrak{p}$	$R_{\mathfrak{p}}$
حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$	$(R, \mathfrak{m})$
دوگان اسلاندر مدول M	$D(M)$
نگاشت ارزیاب طبیعی	σ_M
بُعد گرنشتاین M	$G-dim_R(M),\ G-dim(M)$
بُعد تصویری M	$pd_R(M)$
بُعد انژکتیو M	$id_R(M)$
هم‌ارزی تصویری	$\approx$
دوگان M	M^*
مجموعه‌ی $R-$ همریختی‌های از M به R	$\mathrm{Hom}_R(M, R)$

مقدمه

این پایان‌نامه برگرفته از مقاله‌ی

Gorenstein dimension of modules

نوشته‌ی Vlamider Masek است. در این پایان‌نامه بعد گرنشتاین مدول‌ها روی حلقه‌های جابجایی و نوتری تعریف می‌شود و به بررسی برخی از نتایج مانند دوگان اسلاندر، مدول‌های $k-$بدون تاب و $k-$ امین syzygyها می‌پردازد.

در مقاله‌ی

M. Auslander and M. Bridger, *Stable module theory,* Memoirs of the A. M. S., 94. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1969.

نتایج بالا برای حلقه‌های ناجابجایی و غیر نوتری بدست آمده است. مهمترین مزیتی که این مقاله نسبت به مقاله‌ی بالا دارد، این است که، قضایا و نتایج عمومیت بیشتری دارند و ایجاد مدول‌هایی با شرایط فوق بسیار راحت‌تر شده است. در ادامه بعضی از کارهایی را که در این زمینه انجام شده است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در فصل اول، برخی از مفاهیم پایه، قضایا و لم‌هایی را که برای اثبات قضایای اصلی مورد نیاز هستند، را آورده‌ایم. در ابتدا دوگان اسلاندر را تعریف کرده‌ایم، سپس به بررسی رابطه‌ی مدول‌های $k-$بدون تاب و دوگان اسلاندر پرداخته‌ایم و در نهایت با معرفی pushforward کلی قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که درآن سه شرط زیر معادلند:

(۱) M مدول $k-$ بدون تاب است؛

(۲) M، $k-$ امین syzygy است؛

(۳) M در شرط $\tilde{S}_k$ صدق می‌کند.

فصل دوم را با تعریف بعد گرنشتاین صفر آغاز می‌کنیم، سپس بعد گرنشتاین متناهی را تعریف می‌کنیم. در ادامه‌ی فصل به رابطه‌ای که بعد گرنشتاین و رشته‌های دقیق دارند، می‌پردازیم. که برای این کار، نیاز به تعاریفی مانند ضرب رشته‌ای و دانستن قضایایی است، که آورده‌ایم. در انتها به رابطه‌ی بین بعد گرنشتاین و عمق حلقه‌های موضعی، می‌پردازیم.

در فصل سوم، فرمول اسلاندر—بریجر را با استفاده از بعد گرنشتاین اثبات کرده‌ایم. این فرمول قبلاً توسط اسلاندر و بریجر برای بعد تصویری اثبات شده است، که می‌توان ایراداتی بر آن وارد کرد، مانند

این که، ادعا شده است، اگر $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ رشته‌ای دقیق از $R-$ مدول‌ها باشد، که در آن P یک مدول تصویری است، آنگاه $\operatorname{depth}(K) = \operatorname{depth}(M) + 1$. که متأسفانه این فرمول هنگامی که $\operatorname{depth}(K) = \operatorname{depth}(P)$، درست نیست.
در انتهای پایان‌نامه $k-$ امین syzygy و حلقه‌های $q-$ گرنشتاین را تعریف کرده‌ایم.

فصل ۱

پیش زمینه

در سراسر این پایان‌نامه حلقه‌ها جابجایی و نوتری و مدول‌ها با تولید متناهی فرض شده‌اند، مگر این که خلاف آن ذکر شده باشد. همچنین برای مطالعه‌ی این پایان‌نامه آشنایی با مفاهیم مقدماتی حلقه، مدول و جبر همولوژی ضروری است.

۱.۱ دوگان اسلاندر

۱.۱.۱ تعریف. **فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$ مدول است. $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ را دوگان M می‌نامیم و با M^* نشان می‌دهیم. بنابراین $M^{**}=\mathrm{Hom}_R(M^*,R)$. مدول‌های M^* و M^{**} را به ترتیب دوگان و دوگان دوم M می‌نامیم و $-^*=\mathrm{Hom}_R(-,R)$ تابع دوگان نامیده می‌شود.**

۲.۱.۱ تعریف. همریختی طبیعی از M به M^{**} را با σ_M نشان می‌دهیم و آن را نگاشت ارزیاب طبیعی[۱] می‌نامیم. برای هر $m \in M$، $\sigma_M(m) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$ است. بنابراین $\sigma_M(m) : \mathrm{Hom}_R(M,R) \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی $\sigma_M(m)(f) = f(m)$ تعریف می‌شود، که در آن $f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$ است.

۳.۱.۱ تعریف.

(۱) $R-$ مدول M را بدون تاب[۲] گوییم، هرگاه نگاشت ارزیاب طبیعی $\sigma_M : M \longrightarrow M^{**}$ یک به یک باشد. یعنی $Ker(\sigma_M) = K_M = 0$؛

(۲) $R-$ مدول M را بازتابی[۳] گوییم، هرگاه نگاشت ارزیاب طبیعی σ_M یکریختی باشد. یعنی $C_M = Coker(\sigma_M) = K_M = 0$.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنید M یک $R-$ مدول و (π) یک نمایش تصویری برای M باشد

$$P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0 \qquad (\pi)$$

که در آن P_0 و P_1 دو $R-$ مدول تصویری هستند. دوگان اسلاندر M[۴] با $D(M)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$D(M) = Coker(u^* : P_0^* \longrightarrow P_1^*)$$

تعریف می‌شود. دوگان (π) رشته‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{u^*} P_1^* \longrightarrow D(M) \longrightarrow 0 \qquad (\pi^*)$$

را نتیجه می‌دهد.

۵.۱.۱ تعریف. دو مدول M و N را هم‌ارز تصویری[۵] گوییم، هرگاه مدول‌های تصویری P و Q موجود باشند که $M \oplus P \cong N \oplus Q$ و می‌نویسیم $M \approx N$. رابطه‌ی $\approx$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی

---

[۱] natural evaluation map
[۲] torsionless
[۳] reflexive
[۴] Auslander dual of M
[۵] projectively equivalent

کلاس $R-$ مدول‌های با تولید متناهی است.
به وضوح دوگان اسلاندر به نمایش تصویری به کار برده شده در تعریف وابسته است. بنابراین $D(M)$ تعریف شده در تعریف ۴.۱.۱ را با $D_\pi(M)$ نشان می‌دهیم.

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$ مدول و (π) و (ρ) دو نمایش تصویری برای M باشند

$$P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0 \qquad (\pi)$$

$$Q_1 \xrightarrow{v} Q_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0. \qquad (\rho)$$

(π) غالب اکید[۶] (ρ) نامیده می‌شود، هرگاه همریختی $\phi_i : P_i \longrightarrow Q_i$ برای $i = 0, 1$ موجود باشد که:

(۱) ϕ_i برای $i = 0, 1$ پوشا باشد؛

(۲) ϕ_0 بالا رفته‌ی id_M و ϕ_1 بالا رفته‌ی ϕ_0 باشد، به طوری که نمودار

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{u} & P_0 & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \\ \phi_1 \downarrow & & \phi_0 \downarrow & & \| & & \\ Q_1 & \xrightarrow{v} & Q_0 & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

جابجایی شود؛

(۳) نگاشت $\bar{u} : K_1 \longrightarrow K_0$ القاء شده توسط u پوشا باشد، که در آن $K_i = Ker(\phi_i)$ برای $i = 0, 1$.

۷.۱.۱ لم مار[۷]. فرض کنیم M, M', M'' و N, N', N''، $R-$ مدول باشند و نمودار زیر با سطرهای دقیق جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \psi' \downarrow & & \psi \downarrow & & \psi'' \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & & \end{array}$$

در این صورت رشته‌ی

$$0 \longrightarrow Ker\psi' \longrightarrow Ker\psi \longrightarrow Ker\psi'' \longrightarrow Coker\psi' \longrightarrow Coker\psi \longrightarrow Coker\psi'' \longrightarrow 0$$

دقیق است.

---
[۶] strictly dominates
[۷] snake lemma

برهان. برای اثبات به قضیه‌ی ٦.٥ در [۹] مراجعه شود. □

۸.۱.۱ قضیه. فرض کنیم (π) و (ρ) دو نمایش تصویری برای $R-$ مدول M باشند. در این صورت
$$D_\pi(M) \approx D_\rho(M).$$

برهان. قضیه را در دو مرحله اثبات خواهیم کرد. در مرحله‌ی اول با شرط اضافی این که (π) غالب اکید (ρ) است. در مرحله‌ی بعد نشان خواهیم داد که نمایش تصویری (σ) وجود دارد که غالب اکید (π) و (ρ) است .
مرحله‌ی اول
فرض کنیم (π) غالب اکید (ρ) باشد. در این صورت نمودار زیر با سطرها و ستون‌های دقیق

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
K_1 & \xrightarrow{\bar{u}} & K_0 & \longrightarrow & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
P_1 & \xrightarrow{u} & P_0 & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \\
\phi_1\downarrow & & \phi_0\downarrow & & \| & & \\
Q_1 & \xrightarrow{v} & Q_0 & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

موجود است. از آنجا که Q_i ها تصویری هستند، نتیجه می‌شود که ستون‌ها شکافته شده هستند. بنابراین K_i ها تصویری هستند. همچنین $\bar{u}$ نیز شکافته شده است. دوگان نمودار $(*)$، نمودار جابجایی زیر است

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M^* & \longrightarrow & Q_0^* & \longrightarrow & Q_1^* & \longrightarrow & D_\rho(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M^* & \longrightarrow & P_0^* & \longrightarrow & P_1^* & \longrightarrow & D_\pi(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & K_0^* & \xrightarrow{\bar{u}^*} & K_1^* & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

که در آن $K := Coker(\bar{u}^*)$. با استفاده از لم ۷.۱.۱ رشته‌ی دقیق
$$\circ \longrightarrow D_\rho(M) \longrightarrow D_\pi(M) \longrightarrow K \longrightarrow \circ$$
بدست می‌آید. از طرفی همریختی $\bar{u}^*$ یک به یک و شکافته شده از مدول‌های تصویری است. در نتیجه K تصویری است. بنابراین $D_\pi(M) \cong D_\rho(M) \oplus K$ و در نتیجه
$$D_\pi(M) \approx D_\rho(M).$$

مرحله‌ی دوم

فرض کنیم (π) و (ρ) دو نمایش تصویری برای $R-$ مدول M باشند. نمایش تصویری (σ) را طوری برای $R-$ مدول M ایجاد می‌کنیم که غالب اکید (π) و (ρ) باشد. همریختی $h : P_\circ \oplus Q_\circ \longrightarrow M$ را با ضابطه‌ی $h(p_\circ, q_\circ) = f(p_\circ) + g(q_\circ)$ تعریف می‌کنیم. به وضوح h یک نگاشت پوشا است . حال فرض کنیم $\alpha : E \longrightarrow P_\circ \oplus Q_\circ$ یک همریختی از مدول تصویری با تولید متناهی E به $Ker(h)$ باشد. بنابراین رشته‌ی

$$E \xrightarrow{\alpha} P_\circ \oplus Q_\circ \xrightarrow{h} M \longrightarrow \circ$$

دقیق است. حال توسیع نمایش‌های تصویری
$$P_۲ \xrightarrow{u'} P_۱ \xrightarrow{u} P_\circ \xrightarrow{f} M \longrightarrow \circ \qquad (\pi)$$
و
$$Q_۲ \xrightarrow{v'} Q_۱ \xrightarrow{v} Q_\circ \xrightarrow{g} M \longrightarrow \circ \qquad (\rho)$$
نمایش تصویری (σ) برای M است، که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم
$$E \oplus P_۲ \oplus Q_۲ \xrightarrow{w} P_\circ \oplus Q_\circ \xrightarrow{h} M \longrightarrow \circ \qquad (\sigma)$$
و در آن
$$w(e, p_۲, q_۲) := \alpha(e).$$
به وضوح (σ) دقیق است. ادعا می‌کنیم (σ) غالب اکید (π) و (ρ) است. از آنجا که (σ) به صورت تقارنی از (π) و (ρ) ایجاد شده است، کافی است نشان دهیم (σ) غالب اکید (ρ) است. فرض کنیم $\phi_\circ$ بالا رفته‌ی id_M باشد. در این صورت

$$g\phi_\circ = f.$$

حال $\chi_0 : P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow Q_0$ را با ضابطه‌ی $\chi_0(p_0, q_0) = \phi_0(p_0) + q_0$ تعریف می‌کنیم. χ_0 پوشا است و $g\chi_0 = h$. فرض کنیم همریختی $\delta : E \longrightarrow Q_1$ بالا رفته‌ی χ_0 است. در این صورت نمودار

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{\alpha} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{h} & M & \longrightarrow & 0 \\ \delta \downarrow & & \chi_0 \downarrow & & \| & & \\ Q_1 & \xrightarrow{v} & Q_0 & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

جابجایی است. همچنین $\chi_1 : E \oplus P_2 \oplus Q_2 \longrightarrow Q_1$ را با ضابطه‌ی $\chi_1(e, p_2, q_2) = \delta(e) + v'(q_2)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} v\chi_1(e, p_2, q_2) &= v\delta(e) + vv'(q_2) \\ &= \chi_0 w(e, p_2, q_2). \end{aligned}$$

بنابراین نمودار

$$\begin{array}{ccccccc} E \oplus P_2 \oplus Q_2 & \xrightarrow{w} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{h} & M & \longrightarrow & 0 \\ \chi_1 \downarrow & & \chi_0 \downarrow & & \| & & \\ Q_1 & \xrightarrow{v} & Q_0 & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

جابجایی است. حال نشان می‌دهیم χ_1 پوشا است. $q_1 \in Q_1$ را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه $v(q_1) \in Q_0$ و

$$h(0, v(q_1)) = f(0) + gv(q_1) = 0.$$

پس

$$(0, v(q_1)) \in Ker(h) = Im(\alpha).$$

بنابراین $e \in E$ موجود است که، $\alpha(e) = (0, v(q_1))$. در نتیجه

$$\begin{aligned} v\delta(e) &= \chi_0 \alpha(e) \\ &= \chi_0(0, v(q_1)) \\ &= v(q_1). \end{aligned}$$

بنابراین

$$q_1 - \delta(e) \in Ker(v) = Im(v').$$

پس

$$q_1 = \delta(e) + v'(q_2) = \chi_1(e, 0, q_2).$$

از آنجا که $q_2 \in Q_2$، نتیجه می‌شود $q_1 \in Im(\chi_1)$.
حال قرار می‌دهیم $K_i = Ker(\chi_i)$ برای $i = 0, 1$. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که همریختی $\bar{w} : K_1 \longrightarrow K_0$ القاء شده توسط w پوشا است. اگر $(p_0, q_0) \in Ker(\chi_0)$، آنگاه $\phi_0(p_0) = -q_0$. از طرفی

$$\begin{aligned} h(p_0, q_0) &= f(p_0) + g(q_0) \\ &= f(p_0) - g\phi_0(p_0) \\ &= f(p_0) - f(p_0) = 0. \end{aligned}$$

پس

$$(p_0, q_0) \in Ker(h)$$

بنابراین

$$Ker(\chi_0) \subseteq Ker(h) = Im(\alpha).$$

لذا $\alpha \in E$ موجود است که $\alpha(e) = (p_0, q_0)$. حال

$$v\delta(e) = \chi_0\alpha(e) = 0.$$

پس

$$\delta(e) \in Ker(v) = Im(v').$$

بنابراین $q_2 \in Q_2$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\delta(e) = v'(q_2)$. در نتیجه $(e, 0, -q_2) \in K_1$. سرانجام

$$w(e, 0, -q_2) = \alpha(e) = (p_0, q_0).$$

□

۹.۱.۱ نتیجه. اگر $M \approx 0$ (M تصویری باشد)، آنگاه $D(M) \approx 0$ ($D(M)$ تصویری است). همچنین اگر M_1 و M_2 دو $R-$ مدول باشند، آنگاه

$$D(M_1 \oplus M_2) \approx D(M_1) \oplus D(M_2).$$

برهان. با توجه به فرض نمایش تصویری

$$P_1 = \circ \xrightarrow{u} P_\circ = M \xrightarrow{f=id_M} M \longrightarrow \circ$$

برای M موجود است. بنابراین رشته‌ی

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,R) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(P_\circ = M, R) \xrightarrow{u^*} \circ$$

دقیق است. پس

$$D(M) = Coker(u^*) = \circ.$$

رابطه‌ی دوم با استفاده از خواص فانکتور Hom بدست می‌آید. □

۱۰.۱.۱ نتیجه. اگر $M \approx N$ باشد، آنگاه $D(M) \approx D(N)$.

برهان.

$$\begin{aligned} M \approx N &\Rightarrow M \oplus N \approx \circ \\ &\Rightarrow D(M \oplus N) \approx \circ \\ &\Rightarrow D(M) \oplus D(N) \approx \circ \\ &\Rightarrow D(M) \approx D(N). \end{aligned}$$

□

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار و A، B دو $R-$ مدول باشند. در این صورت $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}(A, E_B))$ را $n-$امین مدول مشتق شده‌ی راست A گوییم و آن را با $\mathrm{Ext}^n_R(A,B)$ نشان می‌دهیم، که در آن E_B یک تحلیل انژکتیو برای B است.

۱۲.۱.۱ قضیه. M یک $R-$ مدول است. در این صورت رشته‌ی

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(D(M), -) \longrightarrow M \otimes - \xrightarrow{\sigma_M^-} \mathrm{Hom}(M^*, -) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(D(M), -) \longrightarrow \circ$$

دقیق است. همچنین برای هر $R-$ مدول دلخواه N رشته‌ی

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(D(M),N) \longrightarrow M\otimes N \xrightarrow{\sigma_M^N} \mathrm{Hom}(M^*,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(D(M),N) \longrightarrow 0$$

دقیق است. که در آن نگاشت σ_M^N به صورت $\sigma_M^N(m\otimes n)=\phi_{m,n}$ است و برای هر $u\in M^*$، $\phi_{m,n}$ با ضابطه‌ی $\phi_{m,n}(u)=u(m)n$ تعریف می‌شود.

برهان. برای اثبات به قضیه‌ی ۱.۶.۲ در [۲] مراجعه شود. □

۱۳.۱.۱ قضیه. فرض کنیم $\sigma_M : M \longrightarrow M^{**}$ نگاشت ارزیاب طبیعی با هسته و هم هسته‌ی K_M و C_M باشد. در این صورت یکریختی‌های زیر برقرار است

(۱) $K_M \cong \mathrm{Ext}^1(D(M),R)$؛

(۲) $C_M \cong \mathrm{Ext}^2(D(M),R)$.

علاوه بر آن، برای هر $i\geq 3$ داریم

$$\mathrm{Ext}^i(D(M),R)\cong \mathrm{Ext}^{i-2}(M^*,R).$$

برهان. نمایش تصویری زیر را برای M در نظر می‌گیریم

$$P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0. \qquad (\pi)$$

دوگان (π) رشته‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{u^*} P_1^* \longrightarrow D(M) \longrightarrow 0. \qquad (\pi^*)$$

است. (π^*) را به دو رشته‌ی مجزای زیر تفکیک می‌کنیم

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{\beta_0} N \longrightarrow 0 \qquad (\pi_0^*)$$

و

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta_1} P_1^* \longrightarrow D(M) \longrightarrow 0 \qquad (\pi_1^*)$$

که در آن $N := Coker(f^*)$ و $\beta_1\circ\beta_0 = u^*$. بنابراین دوگان (π_0^*) رشته‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{\beta_0^*} P_0^{**} \xrightarrow{f^{**}} M^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N,R) \longrightarrow 0 \qquad (\pi_0^{**})$$

است. به طور مشابه دوگان (π_1^*) عبارت است از