
بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين
اياك نعبد و اياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم
صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم و لا الضالين

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رده‌بندی نیم گروه‌های کلیفورد

از

رؤیا جهان‌پناه

استادان راهنما

دکترعباس سهله
دکترمنصور هاشمی

شهریور ۸۶

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

ای کاش آنقدر دستهایم کوچک نبود تا می‌توانستم خورشید را پیشکش صفای وجودتان کنم . کاش آنقدر ضعیف نبودم و می‌توانستم کوهها را وادار به تعظیم در مقابل مقام بلندتان کنم . ای کاش می‌توانستم دریاها را برای قلب پر از مهرتان هدیه آورم .

پدر و مادر عزیز ، وجودتان سراپا نعمت است . بر دستان پر مهرتان بوسه می‌زنم و همیشه به شما نیازمندم . خرمنی از گلهای باغ عشق را با هزاران سپاس به جبران یکی از هزاران خوبیهایتان به شما تقدیم می‌کنم .

تقدیر و تشکر

مهربانا !
سپاس بیکران تراست . چه ، با نگاه گرم تو آغاز شدم ، در نسیم لطف تو بالیدم و دریا دریا محبّتت را نوشیدم و اینسان مرا از منّت چون خودی بی‌نیاز کردی و در بیکران هستی ، نعمتت را بر من تمام کردی . مرا انسان آفریدی و آموختی علم را و ایمان را و با همهٔ اینها توکّل را .

در اینجا لازم است از زحمات دلسوزانهٔ پدر ومادر و خواهران عزیزم ، که در تمام مراحل زندگی ، حامی و پشتیبان من بوده اند ، قدر دانی نمایم .
از زحمات بی دریغ استادان ارجمند ، جناب آقای دکتر عباس سهله و جناب آقای دکتر منصور هاشمی ، که با سعهٔ صدر و صرف وقت و دقت فراوان ، نکات اصلاحی ارزشمندی برای پایان نامه ارائه نموده‌اند ، تشکر و سپاسگذاری می نمایم .

از داوران گرامی ، جناب آقای دکتر حسین سهله و جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده و ناظر محترم ، جناب آقای دکتر بهروز فتحی و اساتید محترم گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم پایه کمال تشکر را دارم .

فهرست مندرجات

چکیده

ردهبندی نیم گروه‌های کلیفورد

رؤیا جهان پناه

در این پایان نامه نشان می‌دهیم هر $glt - bopi$ — نیم گروه کلیفورد ، به صورت جمع مستقیم تعداد متناهی از α — نیم گروه‌ها نوشته می‌شود و نیز نشان می‌دهیم فشرده سازی تک نقطه‌ای الکساندروف یک فضای گسسته‌ی ناشمارا ، دارای هیچ ساختار $bopi$ — نیم گروه معکوس (بخصوص کلیفورد) توپولوژیک نمی‌باشد .

واژه‌های کلیدی : نیم گروه‌های معکوس توپولوژیک ، نیم گروه‌های کلیفورد ، باند جابجایی ، α — نیم شبکه ، glt — نیم شبکه ، $bopi$ — نیم گروه .

ABSTRACT :

CHARACTERIZATION OF CLIFFORD SEMIGROUPS

ROYA JAHANPANAH

In this thesis, we show that every compact Clifford inverse *glt-bopi*-semigroup is a finite direct sum of α-semigroups and show that there exists no structure of topological inverse (especially Clifford) *bopi*-semigroup on the one-point Alexandroff compactification of an uncountable discrete space.

KEYWORDS : **Topological inverse semigroup, Clifford semigroup, Commutative band, α - semilattice, *glt* - semilattice, *bopi* - semigroup .**

مقدمه

این پایان نامه بر اساس مرجع [۱۰] تنظیم شده و شامل سه فصل می‌باشد . ابتدا خواص نیم شبکه های با ایده‌آل های اصلی باز را مورد بررسی قرار می‌دهیم ، سپس با تعریف مفاهیمی چون α — نیم شبکه ، glt — نیم شبکه و بررسی قضایای مربوطه ، این مفاهیم و قضایا را به نیم گروه‌های معکوس (بخصوص کلیفورد) توپولوژیک تعمیم داده و $bopi$ — نیم گروه را تعریف می‌کنیم . مطالب مذکور ، به صورت زیر دسته بندی شده‌اند .

در فصل اول ، به بیان مقدمات و تعاریف اولیه پرداخته شده است .

در فصل دوم ، به بررسی خواص نیم شبکه‌های با ایده‌آل های اصلی باز می‌پردازیم و α — نیم شبکه‌ها ، glt — نیم شبکه‌ها و $bopi$ — نیم گروه‌ها را تعریف کرده و قضایای مربوطه را بیان و اثبات می نماییم .

در فصل سوم ، با تعریف α — نیم گروه ، glt — نیم گروه و $bopi$ — نیم گروه ، مطالب عنوان شده در فصل دوم را به نیم گروه‌های معکوس (بخصوص کلیفورد) توپولوژیک تعمیم داده و دو نتیجه‌ی مهم را مطرح می‌کنیم .

ر

فصل ۱

تعاریف و مطالب پیشنیاز

در این فصل که مطالب آن برگرفته از مراجع [۱] ، [۲] ، [۳] ، [۴] ، [۵] ، [۸] و [۱۲] می‌باشد ، به بیان تعاریف و قضایای اولیه پرداخته ایم .

۱.۱ نظریه مجموعه ها

تعریف ۱—۱—۱.

رابطه‌ی R را روی مجموعه X مرتب جزئی گوییم ، هرگاه انعکاسی ، پادمتقارن و متعدی باشد.

رابطه‌ی مرتب جزئی R را روی مجموعه X مرتب کلی گوییم ، هرگاه برای هر $x,y \in X$ ، داشته باشیم $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$.

(X,R) را مجموعه‌ی مرتب جزئی (کلی) نامیم ، هرگاه رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X مرتب جزئی (کلی) باشد .

تعریف ۱—۱—۲.

فرض کنید $(X,\leqslant)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی و Y زیر مجموعه‌ی ناتهی X باشد . عنصر a در Y را

i) عنصر مینیمال مجموعه‌ی Y گوییم ، هرگاه برای هر $y \in Y$ ، اگر $y \leqslant a$ ، آنگاه $y = a$.

ii) عنصر مینیمم مجموعه‌ی Y نامیم ، هرگاه برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $a \leqslant y$.

تذکر ۱—۱—۳.

i) عنصر مینیمم (در صورت وجود) ، مساوی عنصر مینیمال است .

ii) در مجموعه‌ی مرتب کلی ، عنصر مینیمال ، مساوی عنصر مینیمم است و برعکس .

گزاره ۱—۱—۴.

اگر X مجموعه‌ی مرتب جزئی و Y زیرمجموعه‌ی ناتهی از X باشد ، آنگاه Y حداکثر یک عنصر مینیمم دارد . □

تعریف ۱—۱—۵.

i) گوییم $(X,\leqslant)$ در اصل مینیمال صدق می‌کند ، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی نا تهی از X ، دارای عنصر مینیمال باشد .

ii) $(X,\leqslant)$ را خوش ترتیب نامند هرگاه:

۱) $(X,\leqslant)$ در اصل مینیمال صدق کند.

۲) X مجموعه‌ی مرتب کلی باشد .

تعـــریف ۱—۱—٦.

فرض کنید (A,r) و(B,t) دو مجموعه‌ی مرتب باشند ، در این صورت گوئیم (A,r) با (B,t) متشابه است و می نویسیم $(A,r) \sim (B,t)$ ، هرگاه تابعی مانند $f : A \to B$ موجود باشد به طوری که

i) f تناظر یک به یک باشد ، که دراین صورت می‌نویسیم $A \cong B$ ،

ii) اگر $(x,y) \in r$ ، آنگاه $(f(x)\ ,\ f(y)) \in t$.

تابع f را حافظ ترتیب (تابع تشابه یا نگاشت تشابه) نامیم .

تعـــریف ۱—۱—۷.

فرض کنید (A,r) یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $a \in A$. دراین صورت مجموعه‌ی

$$S_a(A) \ = \ \{\ x \mid x \in A\ ,\ xra\ \}$$

را قطعه‌ی ابتدایی A در a گوییم .

قـــضیه ۱—۱—۸ .

i) رابطه‌ی $\sim$ (درتعریف ۱—۱—٦) ، در مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های مرتب ، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است .

ii) هر دو مجموعه‌ی خوش ترتیب دلخواه ، یا متشابهند و یا یکی از آن ها با قطعه‌ی ابتدایی از دیگری متشابه است .

□

قـــضیه ۱—۱—۹ .

فرض کنید (A,r) و (B,t) مجموعه‌های مرتب و متشابه باشند و $f : A \to B$ تابع تشابه باشد . در این صورت

i) اگر a یک عنصر مینیمم (A,r) باشد ، آنگاه $f(a)$ یک عنصر مینیمم (B,t) است و برعکس .

ii) اگر b یک عنصر ماکسیمم (A,r) باشد ، آنگاه $f(b)$ یک عنصر ماکسیمم (B,t) است و برعکس .

برهان : رجوع شود به مرجع [۲] ، قضیه‌ی ۱۳ (صفحه‌ی ۱۰۹) . □

قضیه ۱—۱—۱۰ .

فرض کنید (A,r) یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A \cong B$. در این صورت رابطه‌ی ترتیبی مانند r^* در B وجود دارد به طوری که $(A,r) \sim (B,r^*)$. □

تعریف ۱—۱—۱۱.

فرض کنید X یک مجموعه باشد . در صورتی که X متناهی باشد ، عدد اصلی X را تعداد اعضای X تعریف می کنیم . عدد اصلی مجموعه‌ی X را با $|X|$ ، عدد اصلی $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ (الف صفر) و عدد اصلی $\mathbb{R}$ را با $\aleph$ (الف) نشان می‌دهیم . همچنین عدد اصلی بعد از $|X|$ را با $|X|^+$ نشان می‌دهیم .

گزاره ۱—۱—۱۲.

i) عدد اصلی دو مجموعه‌ی نامتناهی A و B فقط و فقط وقتی مساویند که این دو مجموعه همعدد باشند ، یعنی $A \cong B$.

ii) مجموعه‌ی X ناشمارا است ، اگر و تنها اگر $|X| > \aleph_0$.

iii) اعضای هر رده‌ی هم ارزی ، دارای اعداد اصلی متساویند و اعداد اصلی اعضای متعلق به رده های هم ارزی متمایز، متمایزند .

iv) اگر α و β دو عدد اصلی باشند ، آنگاه فقط و فقط یکی از روابط $\alpha < \beta$ ، $\beta < \alpha$ یا $\alpha = \beta$ برقراراست .

v) اگر (A,r) و (B,t) دو مجموعه‌ی مرتب کلی باشند ، آنگاه عدد اصلی دو مجموعه با هم برابرند ، اگر و تنها اگررابطه‌ی ترتیبی مانند r^* موجود باشد به طوری که $(A,r) \sim (B,r^*)$.

تعریف ۱—۱—۱۳.

فرض کنید X یک مجموعه باشد . X را یک عدد ترتیبی گوییم ، هرگاه برای هر $a \in X$ ، داشته باشیم $a \subseteq X$. کلاس

همه‌ی اعداد ترتیبی را با Ω نشان می‌دهیم . برای هر $\alpha \in \Omega$ قرار می‌دهیم

$$\Omega(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid \beta \leq \alpha\} .$$

رابطه‌ی $\leq$ را روی $\Omega(\alpha)$ بدین صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $\gamma, \beta \in \Omega(\alpha)$ می‌نویسیم $\gamma \leq \beta$ اگر $\Omega(\gamma) \subseteq \Omega(\beta)$. فرض کنید α و β دو عدد ترتیبی دلخواه باشند ، دراین صورت یکی و تنها یکی از روابط $\alpha < \beta$ ، $\alpha = \beta$ یا $\beta < \alpha$ برقرار است . مجموعه‌ی $\Omega(\alpha)$ تحت عمل $\leq$ خوش ترتیب است و عدد ترتیبی آن α می باشد . اولین عدد ترتیبی نامتناهی که همان عدد ترتیبی $\mathbb{N}$ است را با ω نشان می دهیم . عدد ترتیبی بعد ازعدد ترتیبی λ را با λ^+ نشان می دهند .

مثال ۱—۱—۱۴.

مجموعه های

$$\emptyset \; , \; \{\emptyset\} \; , \; \{\emptyset , \{\emptyset\}\} \; , \; \{\emptyset , \{\emptyset\}, \{\emptyset , \{\emptyset\}\}\} \; , \; \ldots$$

اعداد ترتیبی هستند که به ترتیب ، متناظر بااعداد ۰ ، ۱ ، ۲ و . . . می‌باشند . عمل جمع در اعداد ترتیبی به صورت زیر تعریف می شود :

$$\emptyset + \{\emptyset\} = \{\emptyset , \{\emptyset\}\} \equiv 0 + 1 = 1 ,$$

$$\{\emptyset\} + \{\emptyset , \{\emptyset\}\} = \{\emptyset , \{\emptyset\}, \{\emptyset , \{\emptyset\}\}\} \equiv 1 + 2 = 3 , \ldots$$

قضیه ۱—۱—۱۵ .

اعداد ترتیبی دو مجموعه‌ی خوش ترتیب با هم برابرند ، اگر و تنها اگر دو مجموعه‌ی مرتب ، متشابه باشند .

□

تعریف ۱—۱—۱۶.

عدد ترتیبی λ را عدد ترتیبی حدی گوییم ، اگر و تنها اگر

i) عدد ترتیبی α وجود داشته باشد ، به طوری که $\alpha < \lambda$ ،

ii) برای هر $\beta < \lambda$ (که β عدد ترتیبی است) ، عدد ترتیبی مانند γ موجود باشد ، به طوری که $\beta < \gamma < \lambda$.

به طور معادل ، یک عدد ترتیبی ، عدد ترتیبی حدی می باشد ، اگر و تنها اگر مساوی سوپریمم همه‌ی اعداد ترتیبی قبل از خودش باشد .

۲.۱ جبر

تعـریف ۱—۲—۱.

مجموعه‌ی ناتهی S همراه با یک عمل دوتایی با خاصیت شرکت پذیری را نیم گروه گوییم . که شرکت پذیری یعنی

$$r.(s.t) = (r.s).t \quad (r, s, t \in S) .$$

نیم گروه S را نیم گروه بدیهی نامیم ، هـرگاه دارای یک عنصر باشد .

تعـریف ۱—۲—۲.

گوییم عناصر s و t در نیم گروه S جابجا می‌شوند اگر $st = ts$.

مرکز S شامل تمام اعضایی از S است که با هر عنصر S جابجا می‌شوند و آنرا با $Z(S)$ نشان میدهیم .

نیم گروه S را جابجایی یا آبلی گوییم ، هـــرگاه $Z(S) = S$ ، یعنی هر دو عنصر S با هم جابجا شوند .

مـــثال ۱—۲—۳.

$\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ تحت عمل جمع یا ضرب معمولی ، نیم گروه های آبلی اند .

نمـادگذاری ۱—۲—۴.

برای هر عنصر t از نیم گروه S نگاشت $r_t : S \to S$ $(l_t : S \to S)$ با ضابطه‌ی $r_t(s) = ts$ $(l_t(s) = st)$ را انتقال راست (به‌ترتیب چپ) S نامیم .

برای زیر مجموعه‌های A و B از نیم گروه S تعریف می‌کنیم :

$$AB = \bigcup_{t \in B} At = \bigcup_{t \in A} tB = \{st : s \in A, t \in B\} .$$

تعـریف ۱ــ۲ــ۵.

عنصر e از نیم گروه S را همانی راست (چپ) برای S گوییم ، اگر برای هر $s \in S$ ، $se = s$ (به‌ترتیب $es = s$) باشد .

یک عنصر همانی راست که همچنین یک عنصر همانی چپ نیز باشد را عنصر همانی گوییم . عنصر همانی را غالباً با نماد ۱ نشان میدهند و اگر S نیم گروهی با همانی ۱ باشد ، برای هر $s \in S$ تعریف می‌کنیم $s^{\circ} = ۱$.

یک نیم گروه ممکن است دارای چندین همانی راست (چپ) باشد . هر نیم گروه با عضو همانی چپ و راست ، دارای عضو همانی است و عضو همانی یک نیم گروه ، منحصر بفرد می‌باشد .

مــثال ۱ــ۲ــ۶.

فرض کنید S نیم گروهی شامل تمام ماتریس هایی به شکل

$$\begin{bmatrix} \circ & x \\ \circ & ۱ \end{bmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$

تحت عمل ضرب ماتریس هاباشد ، آنگاه هر عضو S ، همانی‌راست S است .

نمــادگذاری ۱ــ۲ــ۷.

اگر نیـم گروه S دارای عـضو هـمانی نباشد، می‌توان نـماد جدید ۱ را به S با تعریف $s = ۱s = s۱$ برای هر $s \in S \bigcup \{۱\} = S^{۱}$ اضافه کرد . اگر S دارای عضو همانی باشد ، آنگاه $S^{۱} = S$.

تعـریف ۱ــ۲ــ۸.

عنصر e از نیم گروه S ، عنصر خودتوان نامیده می‌شود ، اگر $e^{۲} = e$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر خودتوان نیم گروه S را با $E(S)$ نشان می‌دهیم . نیم گروه S را نیم گروه خودتوان یا باند نامیم ، اگر $E(S) = S$. یک نیم گروه خودتوان آبلی را نیم شبکه گوییم .

بطور مثال اگر S_1 و S_2 دو مجموعه‌ی ناتهی باشند آنگاه $S_1 \times S_2$ با ضرب

$$(s_1, s_2)(t_1, t_2) = (s_1, t_2)$$

یک نیم گروه خودتوان است .

هر مجموعه‌ی مرتب کلی با ضرب $x * y = min\{x, y\}$ ، مثال دیگری از یک نیم شبکه است .

تعـــریف ۱ــ۲ــ۹.

فرض کنید S یک نیم گروه و T یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از S باشد ، در این صورت

i) اگر $T^2 \subset T$ ، یعنی اگر T باعمل ضرب در S یک نیم گروه باشد ، آنگاه T یک زیر نیم گروه S است .

ii) اگر $TS \subseteq T$ ، آنگاه T یک ایده‌آل راست S است .

iii) اگر $ST \subseteq T$ ، آنگاه T یک ایده‌آل چپ S است .

iv) اگر T هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست S باشد، آنگاه T یک ایده‌آل (دوطرفه) در S است .

اگر T یک نیم گروه (ایده‌آل) باشد و $T \neq S$ ، آنگاه T را یک زیرنیم گروه (ایده‌آل) سره نامیم .

تعـــریف ۱ــ۲ــ۱۰.

فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از نیم گروه S باشد . اشتراک تمام زیرنیم گروه‌های (ایده‌آل‌های چپ ، ایده‌آل‌های راست و ایده‌آل‌های) S که شامل A باشند ، زیرنیم گروه (به‌ترتیب ایده‌آل چپ ، ایده‌آل راست و ایده‌آل) تولید شده بوسیله‌ی A نامیده می‌شود . زیرنیم گروه تولید شده بوسیله‌ی A را با $\langle A \rangle$ نشان می‌دهیم . اگر $S = \langle A \rangle$ ، گوییم A یک مولد نیم‌گروه S می‌باشد .

تعـــریف ۱ــ۲ــ۱۱.

اگر e یک عنصر خودتوان در نیم گروه S باشد ، آنگاه حداقل یک زیرگروه از S شامل e یعنی $\{e\}$ موجود است . اجتماعی از تمام زیرگروه‌های S شامل e ، زیرگروه ماکسیمال S شامل e نامیده می‌شود که آن را با $H(e)$ نشان می‌دهیم . اگر ۱ یک همانی S باشد ، آنگاه $H(1)$ گروه واحدهای S نامیده می‌شود .

گـزاره ۱ــ۲ــ۱۲.

فرض کنید S یک نیم گروه باشد و $e \in E(S)$ ، آنگاه $H(e)$ یک زیرگروه از S با عضو همانی e است و

$$H(e) = \{t \in eSe : e \in St \cap tS\} .$$

□

تعـــریف ۱ــ۲ــ۱۳.

فرض کنید S و T دو نیم گروه باشند . در این صورت نگاشت $\theta : S \to T$ را همریختی نامیم ، هرگاه برای هر $s, s' \in S$ داشته باشیم

$$\theta(ss') = \theta(s)\ \theta(s') .$$

یک همریختی که ۱ــ۱ و برو باشد را یکریختی گوییم .

فرض کنید $\theta : S \to T$ یک همریختی از نیم گروه S به توی نیم گروه T باشد ، آنگاه $\theta(S)$ زیر نیم گروه T است و علاوه بر آن داریم :

i) اگر A ایده‌آل چپ (ایده‌آل راست ، ایده‌آل و زیرنیم گروه) S باشد ، آنگاه $\theta(A)$ ایده‌آل چپ (به‌ترتیب ایده‌آل راست ، ایده‌آل و زیرنیم گروه) $\theta(S)$ است .

ii) اگر B ایده‌آل چپ (ایده‌آل راست ، ایده‌آل و زیرنیم گروه) T باشد ، آنگاه $\theta^{-1}(B)$ ایده‌آل چپ (به‌ترتیب ایده‌آل راست ، ایده‌آل و زیرنیم گروه) S است .

تعـــریف ۱ــ۲ــ۱۴.

رابطه‌ی هم ارزی R روی نیم گروه S ، یک همنهشتی نامیده می‌شود ، اگر $(s,t) \in R$ و $u \in S$ نتیجه دهد :

$$(us, ut), (su, tu) \in R .$$

فرض کنید $s \in S$. مجموعه‌ی تمام اعضای S مانند t به قسمی که $(s,t) \in R$ را کلاس هم ارزی (رده هم ارزی) شامل s نامیم .

تعـــریف ۱—۲—۱۵.

یک ایده‌آل چپ (ایده‌آل راست ، ایده‌آل) از نیم گروه S ، مینیمال گفته می‌شود ، اگر به طور سره شامل هیچ ایده‌آل چپ (به‌ترتیب ایده‌آل راست ، ایده‌آل) دیگری از S نباشد .

یک نیم گروه می‌تواند دارای چند ایده‌آل راست و چپ مینیمال باشد . ولی هر نیم گروه شامل حداکثر یک ایده‌آل مینیمال است . ایده‌آل مینیمال S را در صورت وجود با $M(S)$ نشان می‌دهـند .

تعـــریف ۱—۲—۱۶.

نیم گروه S را ساده‌ی چپ (راست) می نامیم ، هرگاه شامل ایده آل های چپ (راست) سره نباشد . S را ساده گوییم ، هرگاه شامل هیچ ایده آل دوطرفه‌ی سره نباشد .

مـــثال ۱—۲—۱۷.

فرض کنید S مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس های به شکل

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad x, y \in (0, \infty)$$

باشد . اگر عمل ضرب را همان ضرب ماتریس هاتعریف کنیم ، آنگاه S ساده است ولی نه ساده‌ی چپ و نه ساده‌ی راست است . زیرا به عنوان نمونه ، زیرمجموعه‌ی S با شرط $y > 1$ یک ایده آل چپ سره و زیر مجموعه‌ی S با شرط $y > 2x$ یک ایده آل راست سره از S می باشند .

قـــضیه ۱—۲—۱۸ .

فرض کنید S یک نیم گروه باشد ، در این صورت S ساده‌ی چپ (راست) است ، اگر و تنها اگر برای هر $t \in S$ داشته باشیم $St = S$ ($tS = S$) . همچنین S ساده است ، اگر و تنها اگر برای هر $t \in S$ ، $StS = S$.

□

گـــزاره ۱—۲—۱۹.

فرض کنید S یک نیم گروه باشد . در این صورت

i) یک ایده‌آل چپ L از S مینیمال است ، اگر و تنها اگر برای هر $s \in L$ داشته باشیم $Ls = Ss = L$.

ii) اگر S ایده‌آل چپ مینیمال داشته باشد ، آنگاه هر ایده‌آل چپ S شامل یک ایده‌آل چپ مینیمال است .

iii) ایده‌آل I از S مینیمال است ، اگر و تنها اگر برای هر $s \in I$ ، داشته باشیم $SsS = I$. در این حالت $IsI = I$ (برای هر $s \in S$) . در اصل ایده آل های مینیمال ، ساده هستند .

□

تعــریف ۱ــ۲ــ۲۰.

فرض کنید E یک باند باشد . برای هر e و f در E قرار می‌دهیم $e \leqslant f$ ، اگر و تنها اگر $e = fe = ef$. می‌توان نشان داد که رابطه‌ی $\leqslant$ ، یک ترتیب جزئی روی E می‌باشد .

تعــریف ۱ــ۲ــ۲۱.

عنصر خودتوان e در E را عنصر ماکسیمال (مینیمال) E گوییم ، هرگاه به ازای هر f در $E\backslash\{e\}$ داشته باشیم $e \neq ef$ ($f \neq ef$) . زیر مجموعه‌ی همه‌ی عناصر خودتوان ماکسیمال E را با $MaxE$ نشان می‌دهیم .

قــضیه ۱ــ۲ــ۲۲ .

فرض کنید S یک نیم گروه و e خودتوانی در S باشد ، آنگاه روابط زیر معادلند :

i) Se یک ایده آل چپ مینیمال S است .

ii) eS یک ایده آل راست مینیمال S است .

iii) $eSe(= eS \cap Se)$ زیر گروه ماکسیمال S شامل e می باشد .

□

تعــریف ۱ــ۲ــ۲۳.

فرض کنید S یک نیم گروه و e عضو خودتوان در S باشد ، e را خود توان مینیمال S گویند ، اگر در روابط (i) و (ii) قضیه‌ی قبل صدق کند .

گـزاره ۱ــ۲ــ۲۴.

فرض کنید S یک نیم گروه باشد ، در این صورت

i) هر عضو خودتوان مینیمال S ، عضو $M(S)$ (ایده‌آل مینیمال S) است .

ii) اگر S یک عضو خودتوان مینیمال داشته باشد ، آنگاه $M(S) = L \cap R$ ، که L یک ایده‌آل چپ مینیمال و R یک ایده‌آل راست مینیمال S است .

□

۳.۱ توپولوژی

تعـــریف ۱ــ۳ــ۱.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و همچنین فرض کنید $E \subseteq X$ و $p \in X$ ، در این صورت

i) نقطه‌ی p را یک نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی E گوییم ، هرگاه هر همسایگی p ، شامل نقطه ای غیر از p ، مانند $q \in E$ باشد .

ii) p را نقطه‌ی تنهای (منفرد) E نامیم ، هرگاه p نقطه‌ی حدی E نباشد .

iii) مجموعه‌ی E را بسته گوییم ، هرگاه شامل تمام نقاط حدی‌اش باشد .

iv) نقطه‌ی p یک نقطه‌ی درونی E است ، هرگاه همسایگی باز از p مانند N موجود باشد ، بطوریکه $N \subseteq E$. مجموعه‌ی نقاط درونی E را با $int(E)$ یا E° نشان می دهیم .

v) مجموعه‌ی E را باز نامیم ، هرگاه هر نقطه‌ی E یک نقطه‌ی درونی‌اش باشد . به عبارت معادل $E = int(E)$.

تعـــریف ۱ــ۳ــ۲.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$. گوییم A در X چگال است ، هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، هر