بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر

دانشجو:

اکرم آشیانی

استاد راهنما:

دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

استاد مشاور:

آقای سید رضا موسوی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: تیر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که همواره راهنمایی هایشان هدایتگر زندگی ام و دعایشان بدرقه راهم بوده است.

تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران از خداوند، در ابتدا مراتب سپاس و امتنان خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حمید رضا سلیمی مقدم که دانش لازم را در اختیارم قرار داده و راهنمایی های ایشان همواره برایم درس آموز بوده است، اعلام نموده و از استاد بزرگوار، جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفته و مرا در برطرف نمودن کاستی های آن یاری نموده اند، صمیمانه تشکر می کنم.

نسبت به زحمات آقایان دکتر زیره و دکتر نجفی خواه که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، بی نهایت سپاسگذارم.

همچنین همواره خود را مدیون حمایت های خانواده گرامیم دانسته و برایشان آرزوی سلامتی و بهروزی می نمایم.

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بیان مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلری پرداخته ایم. سپس مترهای راندرز را به عنوان حالت خاصی از مترهای فینسلری بیان نموده و برخی خصوصیات هندسی چنین مترهایی را مورد مطالعه قرار می دهیم. پس از آن مترهای راندرز تخت تصویری با S-انحنای ایزوتروپیک در نظر گرفته شده و قضیه طبقه بندی این نوع از مترها ارائه شده است. در نهایت به طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S-انحنای ایزوتروپیک می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: متر فینسلری، متر راندرز، متر تخت تصویری، انحنای پرچمی، S -انحنا.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱- مقاله "طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر" در چهل و یکمین کنفرانس ریاضی ایران در ارومیه.

۲- مقاله "برخی کاربردهای هندسه فینسلری در نسبیت عام انیشتین" در اولین همایش ملی الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم در جهرم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیشینه پژوهش

در ۱۸۵۴، ب. ریمان [۱] مفهوم انحنا را برای فضاهای با خانواده ای از ضرب های داخلی (مترهای ریمان) بیان کرد؛ در ۱۹۱۸ پ. فینسلر [۲] با جایگزینی خانواده نرم های مینکوفسکی به جای خانواده ضرب های داخلی این مفهوم را تعمیم داد. درضمن، آ. اینشتین [۳] نسبیت عمومی را با استفاده از هندسه ریمانی معرفی نمود. البته، آن زمان هنوز هندسه فضاهای فینسلری در مرحله اولیه بود. تا اینکه در ۱۹۲۶، ل. بروالد [۴] مفهوم ریمانی انحنا را به فضاهای فینسلری تعمیم داد و کمیت ناریمانی جدیدی را با استفاده از التصاق خودش کشف کرد. د. هیلبرت [۵] در سخنرانی ۱۹۰۰ پاریس، ۲۳ مساله را بیان کرد که مسائل چهارم و بیست و سوم در رده فینسلری قرار می گیرند. هندسه فینسلری کاربرد فراوانی در علوم طبیعی دارد.

متر راندرز روی منیفلد M ، یک متر فینسلری است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$F = \alpha + \beta,$$

که $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک متر ریمانی و $\beta_y = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M می باشد. مترهای راندرز ابتدا توسط فیزیکدان ج. راندرز [۶] در ۱۹۴۱ بیان شدند. پس از آن، این مترها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی

[۱] B. Riemann
[۲] P. Finsler
[۳] A. Einstein
[۴] L. Berwald
[۵] D. Hilbert
[۶] G. Randers

توسط ر. س. اینگاردن [۷] در ۱۹۵۷ به کار گرفته شدند، که اولین کسی بود که این نوع مترها را متر راندرز نامید.

همچنین، این مترها به طور طبیعی از مساله ناوبری یک فضای ریمانی (M,h) تحت تاثیر یک میدان نیروی خارجی W به وجود آمدند [۲۱] .

نشان داده شده که کوتاهترین مسیرهای زمانی ژئودزیک های یک متر راندرز $F=\alpha+\beta$ به وسیله رابطه

$$h(x,\frac{y}{F}-W_x)=1$$

به دست می آیند.

قضیه سختی مشهور اکبرزاده [۸] می گوید که هر متر فینسلری با انحنای پرچمی ثابت منفی روی منیفلد بسته، یک متر ریمانی است. اگر "انحنای پرچمی ثابت" به "انحنای پرچمی اسکالری" تغییر یابد، قضیه سختی زیر را داریم، یعنی،

هر متر فینسلری با انحنای پرچمی اسکالری منفی روی منیفلد بسته از بعد $n\geq 3$ باید یک متر راندرز باشد. (برای کسب اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۶] مراجعه شود.)

این منجر به مطالعه مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر می شود.

نشان داده می شود که برای یک متر فینسلری $F=F(x,y)$ با انحنای پرچمی اسکالری، اگر S -انحنا ایزوتروپیک باشد یعنی $S=(n+1)c(x)F$ آنگاه انحنای پرچمی باید به شکل زیر باشد:

$$K=\frac{3c_{x^m}y^m}{F}+\sigma, \tag{1.1}$$

که $\sigma=\sigma(x)$ و $c=c(x)$ توابع اسکالری هستند [۸].

این منجر به مطالعه مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالری با S -انحنای ایزوتروپیک می شود.

یک متر فینسلری F تخت تصویری گفته می شود اگر ژئودزیک های آنها روی زیرمجموعه های باز $\mathbb{R}^n$

[۷] R. S. Ingarden
[۸] Akbar Zadeh

خطوط راست باشند. مترهای فینسلری تخت تصویری روی $\mathcal{U}$ می توانند با معادلات زیر مشخص شوند:

$$G^i = P(x,y)y^i,$$

که برای هر $\lambda > ۰$ ، $P(x,\lambda y) = \lambda P(x,y)$ می باشد. به آسانی نشان داده می شود که هر متر تخت تصویری $F = F(x,y)$ از انحنای پرچمی اسکالر است. به علاوه، انحنای پرچمی برای این مترها به شکل زیر خواهد بود:

$$K = \frac{P^۲ - P_{x^m}y^m}{F^۲}.$$

قضیه بلترامی می گوید که یک متر ریمانی، تخت تصویری موضعی است اگر و فقط اگر از انحنای برشی ثابت باشد. این منجر به مطالعه مترهای فینسلری تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک می شود.

۲.۱ اهداف پایان نامه

هدف اصلی این پایان نامه طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S -انحنای ایزوتروپیک می باشد که در فصل ۵ به آن پرداخته می شود و قضیه اصلی، قضیه ۴.۲.۵ (بخش ۲.۵) است. در ضمن در فصل ۴ مترهای راندرز تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک طبقه بندی می شوند.

فصل ۲
مفاهیم مقدماتی

۱.۲ مقدمه

فرض کنید M منیفلد هموار حقیقی n -بعدی بوده و T_xM فضای مماس در $x \in M$ را نشان دهد. در این صورت $TM := \bigsqcup_{x\in M} T_xM$ کلاف مماس M با نگاشت تصویر متعارف $\pi := TM \to M$ می باشد. هر عضو TM به شکل (x,y) است که $x \in M$ و $y \in T_xM$ ؛ بنابراین نگاشت تصویر متعارف به شکل $\pi(x,y) := x$ است.

۲.۲ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

قراردادهایی که در سراسر این پایان نامه استفاده می کنیم به شرح زیر می باشد:

۱- از قرارداد جمع بندی اینشتین استفاده می کنیم، یعنی اگر اندیسی یک بار در بالا و یک بار در پایین تکرار شود، آنرا جمع بندی شده می نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ خودداری می نماییم و از اندیس های $i,j,k,\ldots \in \{۱,\ldots,n\}$ استفاده می کنیم.

۲- منیفلدها در این پایان نامه، هموار و متناهی البعد می باشند.

۳- $|.|$ و $<.,.>$ به ترتیب نرم اقلیدسی و ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ را نشان می دهند.

لازم به ذکر است، چنانچه هر کجا ارجاع داده نشده بود؛ آن مطلب از مرجع [۱۲] می باشد.

با توجه به قراردادهای ذکر شده، به بیان مفاهیم اساسی که برای طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر لازم می باشد، می پردازیم.

۱.۲.۲ متر فینسلری

در ابتدا لازم است تابع همگن را تعریف نماییم:

تعریف ۱.۲.۲ (تابع همگن). [۱] تابع $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را همگن مثبت از درجه r نسبت به y گوییم اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم:

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$$

اکنون متر فینسلری را تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۲.۲ (متر فینسلری). [۱] متر فینسلری روی منیفلد M، تابع پیوسته ای چون $F : TM \to [0, \infty)$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱- منظم بودن: F روی TM_0 هموار است که

$$TM_0 := TM \setminus \{0\} = \{y \in T_xM | y \neq 0, x \in M\}.$$

۲- همگن مثبت: تابع F نسبت به y همگن مثبت از درجه یک می باشد.

۳- تحدب قوی: برای هر $(x, y) \in TM_0$ ماتریس $[g_{ij}(x, y)]$ که به صورت زیر تعریف می شود معین مثبت است:

$$g_{ij}(x, y) := \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x, y) = F_{y^i}F_{y^j} + FF_{y^iy^j}.$$

که در آن $F_{y^i} = \frac{\partial F}{\partial y^i}$.

به زوج مرتب (M, F) منیفلد فینسلری می گویند.

توضیح ۳.۲.۲. [۱] با توجه به تعریف متر فینسلری می توان مشاهده کرد که تحدید یک متر فینسلری به صفحه مماس T_xM ، یک نرم مینکوفسکی است.

مثال ۴.۲.۲ (متر ریمانی). ساده ترین مثال از یک متر فینسلری، یک متر ریمانی است که در آن g_{ij} ها توابعی، فقط برحسب x می باشند.

متر های ریمانی، مهم ترین مترهای فینسلری می باشند. در زیر چند متر ریمانی خاص بیان شده است.

مثال ۵.۲.۲ (متر اقلیدسی استاندارد). فرض کنید $|.|$ نرم اقلیدسی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ باشد که

$$|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}.$$

$F = F(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F := |y| \qquad y \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{۱.۲}$$

F یک متر فینسلری روی $\mathbb{R}^n$ می باشد، که متر اقلیدسی استاندارد نامیده می شود.

مثال ۶.۲.۲ (متر کلاین). فرض کنید $B^n \subset (\mathbb{R}^n, |.|)$ گوی واحد استاندارد و

$$\alpha_{-1} := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1 - |x|^2}, \qquad y \in T_xB^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{۲.۲}$$

در این صورت α_{-1} یک متر ریمانی روی B^n می باشد که متر کلاین نامیده می شود. زوج (B^n, α_{-1}) مدل کلاین نامیده می شود.

مثال ۷.۲.۲ (مدل کروی تصویری). فرض کنید $S^n \subset (\mathbb{R}^{n+1}, |.|)$ کره واحد استاندارد باشد. برای $x \in S^n$ ، T_xS^n را به کمک روشی طبیعی با ابرصفحه ای در $\mathbb{R}^{n+1}$ مشخص می کنیم. فرض کنید:

$$\alpha_{+1} := |y|_0, \qquad y \in T_xS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{۳.۲}$$

که $|.|$ نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^{n+1}$ را نشان می دهد. اکنون فرض کنید S^n_+ و S^n_- به ترتیب نیم کره های بالایی و پایینی را نشان دهند و $\psi_\pm : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n_\pm$ نگاشت تصویر باشد که به شکل زیر تعریف شده است:

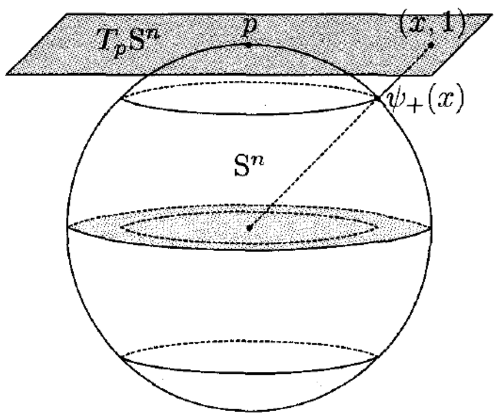
$$\psi_\pm(x) := \left(\frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{1+|x|^2}}\right).$$

$\psi_\pm$ خطوط مستقیم در $\mathbb{R}^n$ را به دایره های عظیمه روی $S^n_\pm$ می برد.

متر پول بک روی $\mathbb{R}^n$ از S^n_+ با ψ_+ به شکل زیر داده می شود:

$$\alpha_{+1} = \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1+|x|^2}, \qquad y \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{۴.۲}$$

زوج $(\mathbb{R}^n, \alpha_{+1})$ مدل کروی تصویری نامیده می شود.



شکل ۱.۲: مدل کروی تصویری

مترهای ریمانی در مثال های ۵.۲.۲ ، ۶.۲.۲ و ۷.۲.۲ در یک فرمول به شکل زیر بیان می شوند:

$$\alpha_\mu := \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1+\mu|x|^2}, \qquad y \in T_xB^n(r_\mu) \cong \mathbb{R}^n, \tag{۵.۲}$$

که اگر $\mu < 0$ ، آنگاه $r_\mu := \frac{1}{\sqrt{-\mu}}$ و اگر $\mu \geq 0$ ، آنگاه $r_\mu := +\infty$. متر α_μ به شکل $\alpha_\mu = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ بیان می شود، که:

$$a_{ij} = \frac{1}{1+\mu|x|^2}\{\delta_{ij} - \frac{\mu x_i x_j}{1+\mu|x|^2}\}. \tag{۶.۲}$$

قضیه ۸.۲.۲ (اولر[1]). [۱] فرض کنیم تابع حقیقی H در تمام نقاط $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ دیفرانسیل پذیر باشد. آنگاه H همگن مثبت از درجه r است اگر و تنها اگر

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y),$$

که در آن $H_{y^i} = \frac{\partial H}{\partial y^i}$.

نتیجه ۹.۲.۲. [۱] اگر تابع F همگن مثبت از درجه یک باشد؛ آنگاه:

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y)$$

و

$$y^j F_{y^i y^j}(y) = 0.$$

نتیجه ۱۰.۲.۲. [۱] تابع F بیان شده در تعریف متر فینسلری در رابطه زیر صدق می کند:

$$F^2(y) = g_{ij}(y) y^i y^j.$$

۲.۲.۲ التصاق چرن

در سال ۱۹۴۳ س. س. چرن [2] التصاقی را برای مترهای فینسلری بیان کرد که در این قسمت به بیان این التصاق می پردازیم اما پیش از آن باید کلاف پول بک را تعریف نماییم.

فرض کنیم (E, π, N) یک کلاف برداری و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار بین دو منیفلد M و N باشد. با استفاده از f می توان یک کلاف برداری روی M با همان تار کلاف برداری (E, π, N) تعریف نمود. این ساختار جدید را کلاف پول بک می نامیم.

[1] Euler
[2] S. S. Chern

تعریف ۱۱.۲.۲ (کلاف پول بک). [۱۵] فرض کنیم (E,π,N) یک کلاف برداری و $f:M\longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد. کلاف پول بک E توسط f را با نماد f^*E نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E=\{(x,\nu)\in M\times E|f(x)=\pi(\nu)\}.$$

تارهای کلاف پول بک f^*E یک کپی از تارهای E می باشند.

f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول $pr_1:f^*E\longrightarrow M$ که توسط $(x,\nu)\in M\times E\longmapsto x\in M$ تعریف می شود؛ یک کلاف برداری روی M است. اگر نگاشت تصویر مولفه دوم $pr_2:f^*E\longrightarrow E$ توسط $(x,\nu)\longmapsto\nu$ تعریف شود؛ آنگاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ pr_1\downarrow & & \downarrow\pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

و $f^*E\cong E$.

فرض کنیم $\pi:TM\longrightarrow M$ نگاشت تصویر متعارف باشد؛ در این صورت با توجه به تعریف بالا کلاف پول بک π^*TM قابل تعریف است و تارهای آن در هر نقطه $(x,y)\in TM_0$ به شکل زیر است:

$$\pi^*TM|_{(x,y)}:=\{(x,y,\nu)|\nu\in T_xM\}\cong T_xM.$$

به عبارت دیگر $\pi^*TM|_{(x,y)}$ فقط کپی T_xM است(شکل ۳.۲).

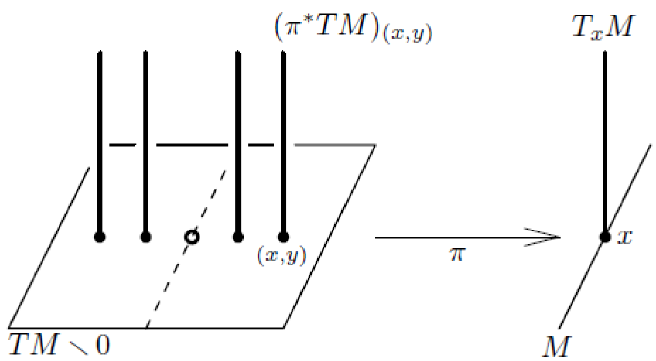
π^*TM کلاف مماس پول بک نامیده می شود.

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنید $\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ کنج موضعی طبیعی برای $T(TM_0)$ باشد. آنگاه $VTM:=span\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ زیر کلاف $T(TM_0)$ می باشد، که کلاف مماس عمودی M نامیده می شود.

فرض کنید $\partial_i:=(x,y\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$. در این صورت $\{\partial_i\}$ یک کنج موضعی برای π^*TM می باشد.

کلاف برداری π^*TM برش متعارف $\mathcal{Y}$ را دارد که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathcal{Y}_{(x,y)}:=(x,y,y).$$



شکل ۲.۲: قسمت نقطه چین، تصویر برش صفر است.

در $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \in T_xM$ ، $\mathcal{Y}$ به شکل زیر می تواند بیان شود:

$$\mathcal{Y} = y^i \partial_i. \tag{۷.۲}$$

اکنون دو تانسور مهم در هندسه فینسلری را بیان می کنیم:

تعریف ۱۳.۲.۲ (تانسور اساسی و تانسور کارتان). فرض کنید F متری فینسلری روی M و

$$g_{ij} := \frac{۱}{۲}[F^۲]_{y^iy^j}(x,y), \qquad C_{ijk} := \frac{۱}{۴}[F^۲]_{y^iy^jy^k}(x,y).$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{G} := g_{ij}dx^i \otimes dx^j, \qquad \mathcal{C} := C_{ijk}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k. \tag{۸.۲}$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ تانسورهایی روی $TM_\circ$ می باشند که به ترتیب تانسور اساسی و تانسور کارتان نامیده می شوند.

با تانسور اساسی و تانسور کارتان قضیه زیر بیان می شود:

قضیه ۱۴.۲.۲. (چرن[۳]) . فرض کنید (M,F) منیفلد فینسلری n -بعدی باشد. برای کنج موضعی دلخواه π^*TM یعنی $\{e_i\}$ و هم کنج دوگان آن برای π^*T^*M یعنی $\{\omega^i\}$ ، مجموعه یکتایی از ۱-فرمی های موضعی

[۳] Chern

$\{\omega^i_j\}$ روی TM_0 وجود دارد به طوری که:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{۹.۲}$$

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j + 2C_{ijk}\omega^{n+k}, \tag{۱۰.۲}$$

که:

$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j\omega^i_j, \tag{۱۱.۲}$$

و $\mathcal{Y} =: y^i e_i$ ؛ بنابراین $g_{ij} := \mathcal{G}(e_i, e_j)$ و $C_{ijk} := \mathcal{C}(e_i, e_j, e_k)$.

در حقیقت، ۹.۲ معادل با تقارن

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} \tag{۱۲.۲}$$

و نبودن جملات dy^k در ω^i_j است؛ یعنی،

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}dx^k \tag{۱۳.۲}$$

۱۰.۲ نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\} \\ &- g^{kl}\{C_{jml}N^m_i + C_{iml}N^m_j - C_{ijm}N^m_l\}.\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

که در آن:

$$N^i_j := y^m\Gamma^i_{mj}. \tag{۱۵.۲}$$

در نتیجه:

$$N^k_j = \frac{1}{2}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\}y^i - 2g^{kl}C_{jml}G^m, \tag{۱۶.۲}$$

که:

$$G^i := \frac{1}{2} N^i_j y^j = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk} y^j y^k. \qquad (۱۷.۲)$$

پس:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\} y^j y^k \qquad (۱۸.۲)$$

و g^{ij} وارون ماتریس g_{ij} می باشد.

تعریف ۱۵.۲.۲ (التصاق چرن). با فرم های التصاق چرن، یعنی، $\{\omega^i_j\}$ نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$ برای π^*TM ، التصاق خطی ∇ روی π^*TM به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla_{\hat{Y}} X := \{dX^i(\hat{Y}) + X^j \omega^i_j(\hat{Y})\} \otimes e_i.$$

به طور ساده تر:

$$\nabla X := \{dX^i + X^j \omega^i_j\} \otimes e_i.$$

∇ التصاق چرن نامیده می شود.

با استفاده از معادلات

$$[F^2]_{x^l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} y^i y^j, \qquad [F^2]_{x^k y^l} y^k = 2\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} y^i y^k,$$

G^i در ۱۸.۲ به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il}\{[F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l}\}. \qquad (۱۹.۲)$$

با کمک فرمول های

$$[F^2]_{x^l} = 2FF_{x^l}, \qquad [F^2]_{x^k y^l} y^k = \frac{2F_{x^k} y^k}{F} g_{ml} y^m + 2FF_{x^k y^l} y^k$$