



دانشگاه زنجان

دانشگاه زنجان
دانشکده‌ی علوم - گروه فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک

عنوان:

چگالش بوز- اینشتین در یک چاه دوگانه‌ی چند ترازه و کج شده

علی محمد ارجمندی

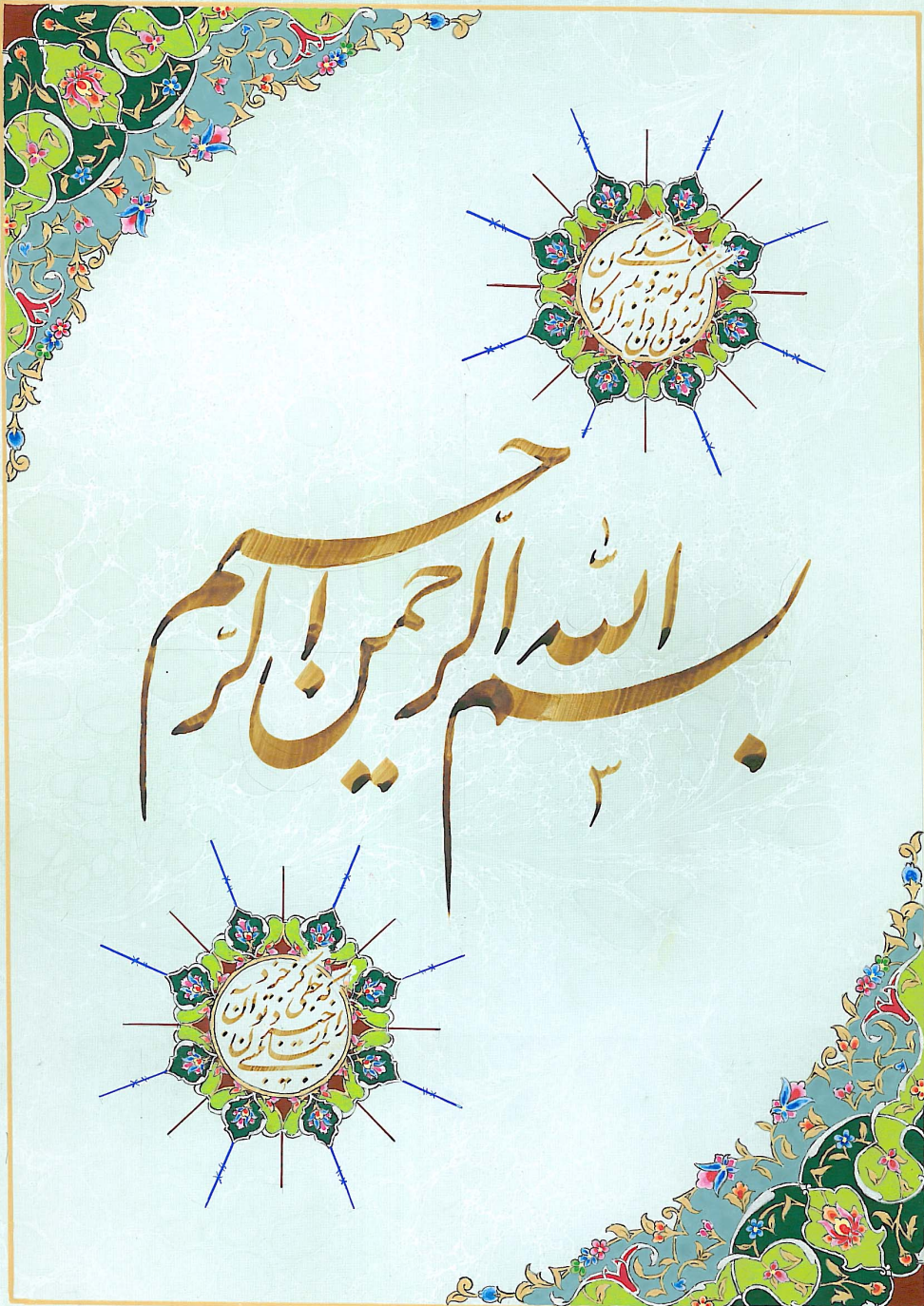
استاد راهنما:

دکتر سعید قنبری

استاد مشاور:

دکتر امیرحسین درونه

بهمن ۱۳۸۹



تأليف: أبو الحسن



دانشگاه زنجان

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

شماره: ۵۶۵

تاریخ: ۱۳۹۹/۱۲/۳۰

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

آقای: **علی محمد ارجمندی** رشته: **فیزیک** گرایش: **اتمی و مولکولی**

تحت عنوان: **چگالش بوز- اینشتین در یک چاه دوگانه‌ی چند ترازه و کج شده**

در تاریخ **۸۹/۱۲/۳** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه زنجان برگزار گردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می باشد:

قبول (با درجه: **بسیار خوب** امتیاز: **۱۸**) دفاع مجدد مردود

- ۱- عالی (۲۰-۱۸)
- ۲- بسیار خوب (۹۹-۱۷-۱۶)
- ۳- خوب (۹۹-۱۵-۱۴)
- ۴- قابل قبول (۹۹-۱۳-۱۲)

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سعید قنبری	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر امیرحسین درونه	دانشیار	
۳- استاد ممتحن خارج از دانشگاه	دکتر احسان ندایی اسکویی	استادیار	
۴- استاد ممتحن داخل دانشگاه	دکتر محمد محمودی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدعلی ملکی سقایی	استادیار	

دانشگاه زنجان
دکتر سیدحسین کبیرموسوی
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه
استاداعلامی درخشان

دکتر حبیب امیری
معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم

تقدیم به پدرم، برادرم، خواهرم؛ به خصوص مادر عزیزم که با عشق ورزیدن
مرا عاشقانه زیستن آموخت...

”از صدای سخن عشق ندیدم خوش‌تر
یادگاری که درین گنبد دوار بماند“
حافظ

قدردانی و تشکر

همان گونه که وظیفه‌ی بنده سپاس‌گزاری از خداوند است، هر چند عظمت خداوندی فارغ از این شکرگزاری است، به این‌جانب فرض است که از یک‌ایک افرادی که به هر نحو موجبات آسایش، آرامش و پیشرفت علمی مرا فراهم آوردند، قدردانی کنم. نخست از خانواده‌ی عزیزم سپاس‌گزارم که نه تنها با هم‌فکری، مهر و محبت وافر در تمام دوران تحصیل مرا یاری کردند، بلکه پشتیبانی مالی ایشان جهت شهریه دانشگاه و دیگر هزینه‌های تحصیلی موجب شد تا دغدغه‌ی مالی در دوران تحصیل نداشته باشم. از خواهر هنرمندم پریرسا، به خاطر تذهیب "بسم الله الرحمن الرحيم" که در آغاز این اثر نوشته‌ام، ممنونم.

از جناب آقای دکتر فنبری تشکر می‌کنم که در بهمن ۱۳۸۷ (موعده حذف و اضافه) با وجود این‌که به تعداد کافی دانشجو داشتند، مرا که به طور غیر مترقبه از ادامه‌ی کار در زمینه‌ی اپتیک تجربی باز مانده بودم، برای راهنمایی پذیرفتند و در این مدت با زیبایی‌های علم مکانیک کوانتومی و اتم‌های فوق سرد آشنا کردند. از جناب آقای دکتر درونه ممنونم، هرچند توفیق شرکت در کلاس‌های پربارشان را نداشتم، اما در دروس الکترودینامیک، مکانیک آماری و فیزیک محاسباتی، مرا بدون مضایقه راهنمایی کردند. ایشان علاوه بر راهنمایی در باب درس‌های تئوری، در زمینه‌ی پایان‌نامه نیز با روی گشاده همواره پذیرای من بودند. تلاش‌هایشان جهت معرفی ابزارهای محاسباتی موجود جهت بهبود محاسبات ستودنی است. از جناب آقای دکتر عابدینی به خاطر معرفی من به اداره‌ی هواشناسی جهت کار با خوشه‌ی محاسبات موازی آن سازمان، از جناب آقای دکتر فولادوند به خاطر معرفی جهت استفاده از خوشه‌ی محاسبات موازی مرکز پژوهش در دانش‌های بنیادی، همین‌طور به سبب فراهم آوردن موجبات ارتباط من با مجله‌ی فیزیک، از زحمات جناب آقای دکتر ندایی اسکویی از مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه‌ی زنجان به دلیل آشنا کردن من با لذت فیزیک محاسباتی، پس از آن‌که از اپتیک باز مانده بودم، و همین‌طور از کلیه‌ی اساتید گروه فیزیک که در این مدت مرا تحمل کرده و یاری ام نموده‌اند سپاس‌گزارم.

از دوست عزیزم جناب آقای قاسم نعیمی، به خاطر در اختیار گذاشتن تجربیاتشان در زمینه‌ی شبیه‌سازی اتم‌های فوق سرد و تشویق جهت موازی کردن محاسبات، صمیمانه تشکر می‌کنم. در پایان از همه‌ی حدوداً شصت هم‌کلاسی ام، چند ده هم‌خوابگاهی و کلیه‌ی عزیزان در بخش‌های مختلف، چه در دانشکده‌ی علوم و چه در محیط دانشگاه، که با صمیمیت و برخورد گرمشان، علی‌رغم مشکلات موجود، محیطی خاطره‌انگیز و دوست‌داشتنی برایم ایجاد کردند کمال امتنان را دارم.

علی محمد ارجمندی

پاییز ۱۳۸۹

ابهر

چکیده

ما در این پایان نامه، چگاله‌های بوز-اینشتین را در مجاورت هم در دو تله نگه می‌داریم، سپس با استفاده از هامیلتونی بوز-هابارد به شبیه‌سازی شرایط واقعی می‌پردازیم. ابتدا هامیلتونی اصلی بوز-هابارد، بدون جملات برانگیختگی و کج شدگی را شرح می‌دهیم. سپس با توجه به اهمیت هامیلتونی دوترازه در محاسبات کوانتومی و در نظر گرفتن کج شدگی، از هامیلتونی چند ترازه و کج شده استفاده می‌کنیم. در این مرحله با توجه به روش‌های موجود برای شبیه‌سازی این هامیلتونی روش فضای فازی P پیمانه‌ای را به کار می‌گیریم. پس از معرفی روش، به بررسی مسئله‌ی خاص خود می‌پردازیم. ابتدا حالت تک ترازه و نتایج آن را مطالعه می‌کنیم. سپس با اهمیتی که سامانه‌ی دوترازه دارد، به شبیه‌سازی آن با روش P پیمانه‌ای و مقایسه با پاسخ‌های هامیلتونی تک ترازه‌ی به دست آمده از روش حل دقیق عددی و حل تحلیلی می‌پردازیم. در مرحله‌ی آخر به معرفی روش موازی سازی محاسبات و تخمین میزان کاهش زمان شبیه‌سازی بر اثر انجام موازی سازی می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: روش‌های فضای فازی، روش P پیمانه‌ای، مدل بوز-هابارد، هامیلتونی دوترازه، معادلات استراتونویچ، نرم‌افزار $xmids$ ، محاسبات موازی.

فهرست مطالب

۱	آشنایی با چگالش بوز- اینشتین	۱
۱	۱.۱ تابش جسم سیاه	۱
۲	۱.۱.۱ نظریه‌ی وین	۲
۲	۲.۱.۱ نظریه‌ی ریلی	۲
۲	۳.۱.۱ نظریه‌ی پلانک	۲
۳	۴.۱.۱ نظریه‌ی بوز	۳
۳	۲.۱ مبانی نظری چگالش بوز- اینشتین	۳
۶	۳.۱ حرکت به سمت صفر مطلق	۶
۷	۴.۱ روش‌های سرمایه‌ش مؤثر	۷
۷	۱.۴.۱ سرمایه‌ش لیزری- روش دوپلر	۷
۹	۲.۴.۱ سرمایه‌ش لیزری- روش سیسیفوس	۹
۹	۳.۴.۱ تله‌ی مغناطیسی- اپتیکی (MOT)	۹
۱۰	۴.۴.۱ سرمایه‌ش تبخیری	۱۰
۱۲	۵.۱ چگالش بوز- اینشتین	۱۲
۱۵	۲ روش‌های فضای فاز برای شبیه‌سازی اتم‌های فوق سرد	۱۵
۱۶	۱.۲ انتگرال مسیر مونته کارلو	۱۶
۱۶	۲.۲ روش تحول فضای فاز	۱۶
۱۷	۳.۲ نمایش فضای فاز	۱۷
۲۰	۴.۲ مبانی ریاضی روش‌های فضای فاز	۲۰
۲۰	۱.۴.۲ نمایش P	۲۰
۲۱	۲.۴.۲ نمایش P مثبت	۲۱
۲۲	۳.۴.۲ نمایش P پیمان‌های	۲۲
۲۳	۵.۲ شبیه‌سازی در نمایش P پیمان‌های	۲۳
۲۶	۳ هامیلتونی بوز- هابارد	۲۶
۲۶	۱.۳ مدل بوز- هابارد	۲۶
۲۸	۲.۳ نتایج عددی دقیق برای $J = 0$	۲۸
۲۹	۱.۲.۳ مدل تک چاه	۲۹
۳۱	۲.۲.۳ مدل چند چاه	۳۱
۳۲	۳.۳ نتایج تحلیلی دقیق برای $U = 0$	۳۲
۳۲	۱.۳.۳ مدل دو چاه	۳۲
۳۴	۴.۳ هامیلتونی دو ترازه	۳۴

۳۷	شبه‌سازی هامیلتونی بوز-هابارد	۴
۳۷	۱.۴ استخراج معادلات ایتو و استراتونویچ از هامیلتونی بوز-هابارد	
۴۲	۱.۱.۴ مقادیر V ، $A_j^{(+)}$ و $trace(D)$	
۴۴	۲.۱.۴ معادلات ایتولانژوین	
۴۵	۳.۱.۴ معادلات استراتونویچ	
۴۹	۴.۱.۴ آنچه که باید در شبه‌سازی بنویسیم	
۵۲	۲.۴ نرم‌افزار شبه‌ساز و الگوریتم مورد استفاده	
۵۲	۱.۲.۴ الگوریتم مورد استفاده جهت شبه‌سازی	
۵۶	۵ نتایج شبه‌سازی و قابلیت‌های ابررایانه در ارتقای آن	
۵۶	۱.۵ نتایج مربوط به تقریب تک ترازه در شرایط $J \neq 0$	
۵۷	۱.۱.۵ تحقیق در مورد تاثیر تعداد گام یا $Path$ کد، در نتیجه‌ی شبه‌سازی	
۶۰	۲.۵ نتایج مربوط به تقریب دو ترازه در شرایط $J \neq 0$	
۶۴	۳.۵ نتایج مربوط به تقریب تک ترازه در شرایط $U \neq 0$	
۶۵	۱.۳.۵ عاملی دیگر در افزایش همگرایی نمودارها	
۶۵	۲.۳.۵ پیش‌بینی همگرایی نمودار در صورت افزایش تعداد گام‌ها	
۶۸	۴.۵ نتایج مربوط به تقریب دو ترازه در شرایط $U \neq 0$	
۶۸	۵.۵ محاسبات موازی و ابررایانه	
۶۹	۱.۵.۵ بحث سخت افزار	
۶۹	۲.۵.۵ بحث نرم افزار	
۷۰	۶.۵ موازی سازی در محیط برنامه	
۷۲	۷.۵ سخن پایانی	
۷۴	آ توابع بوز-اینشتین	

لیست تصاویر

۳	۱.۱	سه قانون تابش. شکل از مرجع [۴].
	۲.۱	شکل رنگی. شکل سمت راست، اتم را در حالت عادی با سرعت بالا در حال برخورد با فوتون نشان می‌دهد. شکل سمت چپ همان اتم را پس از درآشامی فوتون و برانگیختگی، در حال گسیل پرتوهای کم انرژی تر نشان می‌دهد. مطابق نوشته‌های روی شکل سرعت اتم در این مرحله کاهش یافته است.
۸	۳.۱	تله‌ی مغناطیسی اپتیکی سه بعدی، تصویر از مرجع [۱۵].
۱۰	۴.۱	کندکننده‌ی زمینی، تصویر از مرجع [۱۱].
۱۲	۵.۱	شکل رنگی. نمایش اتم‌های فوق سرد در فضای تکانه، همان طور که دیده می‌شود
۱۳		اتم‌ها حول نقطه‌ی صفر تکانه تجمع کرده‌اند [۲۰].
	۱.۳	چاه پتانسیل دوگانه، شکل سمت چپ در حالت عادی و شکل سمت راست با کجی ΔV ، فاصله‌ی دو تراز مقدار $\hbar\omega$ است.
۳۴	۱.۵	پاسخ شبیه‌سازی در مقایسه با پاسخ تحلیلی دقیق، برای تراز پایه. شکل‌های سمت راست و چپ به ترتیب همان طور که در شکل آمده است، به چاه‌های چپ و راست دلالت دارد.
۵۷	۲.۵	پاسخ ۱ برای $J^\circ = 10$ و تعداد گام 10^5 .
۵۸	۳.۵	تعداد میانگین اتم‌ها برای $\tau = 20$. مقدار $J^\circ = 1$ و تعداد گام 10^5 .
۵۸	۴.۵	شبیه‌سازی ۱ برای $J^\circ = 1$ به ازای $n_p = 10^3$.
۵۹	۵.۵	شبیه‌سازی ۱ برای $J^\circ = 1$ به ازای $n_p = 10^5$.
۵۹	۶.۵	شبیه‌سازی ۱ برای $J^\circ = 1$ به ازای $n_p = 10^6$.
۶۰	۷.۵	شبیه‌سازی ۱ برای $J^\circ = 1$ به ازای $n_p = 2 \times 10^7$.
۶۱	۸.۵	شرایط ۱ برای $J^1 = J^\circ = 1$ در حالت دو ترازه، با تعداد گام $n_p = 10^5$ و $\tau = 3$.
۶۱	۹.۵	شرایط ۱ برای $J^1 = J^\circ = 1$ در حالت دو ترازه، با تعداد گام $n_p = 10^5$ و $\tau = 10$.
۶۱	۱۰.۵	شرایط ۱ برای $J^1 = J^\circ = 1$ در حالت دو ترازه، با تعداد گام $n_p = 10^5$ و $\tau = 20$. این شکل‌ها دارای یک برآمدگی هستند که با افزایش تعداد گام تشدید می‌شوند.
۶۳	۱۱.۵	نمودار مربوط به $U^\circ = 1$ ، با تعداد گام $n_p = 10^5$ و $\tau = 3$.
۶۴	۱۲.۵	نمودار مربوط به $U^\circ = 1$ ، با تعداد گام $n_p = 10^5$ و $\tau = 10$.
۶۵	۱۳.۵	این نمودار به ازای تعداد گام $n_p = 10^7$ ، و اندازه‌ی گام $d\tau = 6 \times 10^{-3}$ رسم شده است. پیش‌بینی می‌شود در صورت وجود امکانات محاسباتی به‌تر به ازای گام‌های بالاتر همگرایی خوبی میان پاسخ شبیه‌سازی و عددی دقت بالا اتفاق بیفتد.
۶۶		

- ۱۴.۵ این نمودار به ازای تعداد گام $n_p = 10^7$ و اندازه‌ی گام $d\tau = 3 \times 10^{-4}$ رسم شده است. از مقایسه‌ی دو نمودار اخیر مشخص می‌شود کوچک کردن اندازه‌ی گام در این مورد خاص به صلاح نبوده و باعث واگرایی بیش از اندازه‌ی آن شده است، به نحوی که افزایش تعداد گام باعث بدتر شدن آن می‌شود. ۶۶
- ۱۵.۵ این نمودار هر چند برای محدوده‌ی $\tau \approx 3$ پاسخ خوبی دارد، اما برای τ های بزرگتر عددی برای نمایش ندارد. این مورد حتی بدتر از موارد قبلی نشان می‌دهد، برای $U^\circ = 1$ ، دماهای پایین قابل دستیابی نیستند. ۶۷
- ۱۶.۵ پاسخ $U^\circ = 1$ ، به ازای $d\tau = 3 \times 10^{-3}$ ۶۷
- ۱۷.۵ نتایج مربوط به تقریب دو ترازه در شرایط $U \neq 0$ ۶۸
- ۱.آ تابع $g_n(z)$ ۷۵

لیست جداول

۱۹	جدول نمایش خواص مورد نیاز برای دینامیک کوانتومی تصادفی	۱.۲
۷۵	مقادیر خاص تابع ζ	۱.آ

فصل ۱

آشنایی با چگالش بوز- اینشتین

من قصد دارم در این جا داستان را به گونه‌ای دیگر آغاز کنم. همواره داستان از مقاله‌ی بوز^۱ شروع می‌شود. که برای چاپ می‌فرستد اما پذیرفته نمی‌شود و از اینشتین^۲ کمک می‌گیرد. سرانجام مقاله چاپ می‌شود و این گونه بوز- اینشتین معروف می‌شود.

داستانی جالب، پند آموز، اما متأسفانه تکراری، از دست کم انگاشتن نظریه‌ی جدید توسط دانشمندان محافظه کار. به نظر من، این گونه لذت ابداع علمی بوز، تحت تأثیر لذت داستان مذکور، کم فروغ می‌شود. از طرف دیگر بعد کوانتومی کار نیز به چشم نمی‌آید.

به همین دلایل در این جا بحث را از کمی عقب‌تر شروع می‌کنم تا زمینه‌ی ارائه‌ی نظریه‌ی بوز فراهم شود. این عقب نشینی تا نظریه‌ی تابش جسم سیاه است. مسئله‌ای که از کودکی آنرا دیده و لمس کرده‌ایم، در اخگرهای ذغال و فلزات گداخته.

۱.۱ تابش جسم سیاه

ماده به طور دائم در حال گسیل و جذب تابش است. وقتی جسمی با دمای T در داخل محفظه‌ی بسته‌ای که قسمتی از فضا را اشغال کرده است قرار گیرد، محفظه حاوی تابش الکترومغناطیسی خواهد بود. نخستین مطالعات تجربی در اواخر قرن نوزدهم توسط تیندال انجام شد. سپس استفان^۳ بر پایه‌ی این

^۱ Satyendra Nath Bose دانشمند هندی (کلکته، ۱۹۷۴-۱۸۹۴) که به خاطر نظریه‌اش درباره‌ی ذراتی که به نام

خود او "بوزون" می‌شناسند، معروف شده است.

^۲ Albert Einstein دانشمند آلمانی (اولم ۱۸۷۹ - پرنستون ۱۹۵۵).

^۳ Stefan

داده‌ها رابطه‌ی توان چهارم میان گرمای تابیده و دمای مطلق را نتیجه گرفت [۱]، که بعدها به قانون استفان-بولتزمن، معروف شد.

پژوهش نظری در حوزه‌ی تابش گرمایی در سال ۱۸۵۹ با کار گوستاو کیرشهوف شروع شد [۲]. در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، برای حل مسئله‌ی تابش راه‌کارهای متعددی ارائه شد.

۱.۱.۱ نظریه‌ی وین

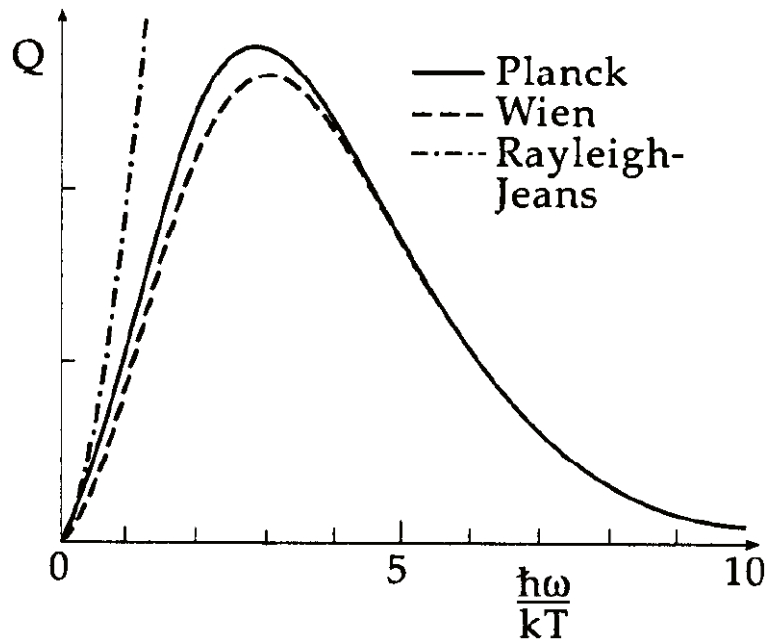
وین چگالی طیفی را با انجام یک فرایند ترمودینامیکی (چرخه‌ی کارنو) روی تابش داخل محفظه به دست آورد. او با این کار توانست به طور نظری رابطه‌ی تجربی استفان-بولتزمن را به دست آورد. نتیجه‌ی دیگر کار وین دست‌یابی به قانون "جابه‌جایی" است. قانون جابه‌جایی بیان می‌کند که: "رنگ غالب (بیشینه‌ی چگالی طیفی) در داخل محفظه متناسب با دما است." [۳] محاسبات وین کم‌کم جای پای برای کوانتوم فراهم کرد.

۲.۱.۱ نظریه‌ی ریلی

ریلی از الکترومغناطیس، نوسانگر کلاسیکی را وارد مسئله کرد. نوسانگرهایی که همه‌ی آن‌ها یک بسامد دارند ولی انرژی‌های آن‌ها متفاوت هستند. ریلی با محاسبات خود به این نتیجه رهنمون شد: "مادامی که انرژی یک نوسانگر بتواند به طور پیوسته تغییر کند، انرژی متوسط مستقل از بسامد نوسانگرهای مورد نظر است." پاسخ ریلی به طور کلی نادرست بود، هر چند در بسامدهای پایین توافق خوبی با پاسخ وین داشت.

۳.۱.۱ نظریه‌ی پلانک

نظریه‌ی پلانک دقیقاً دنباله‌ی نظریه‌ی ریلی بود، با این تفاوت که انرژی نوسانگر از حالت پیوسته خارج شده و حالت گسسته پیدا می‌کند. با این تغییر، چگالی طیفی با قانون وین و مهم‌تر از آن با تجربه منطبق می‌شود. این نظریه قانون جابه‌جایی و قانون استفان-بولتزمن را مستقیماً نتیجه می‌دهد. به این ترتیب مشکل توجیه تابش جسم سیاه حلی منطبق با تجربه، بر مبنای نظریه‌ی کوانتومی پیدا می‌کند. در شکل ۱.۱ پاسخ‌های این سه نظریه را که با هم مقایسه شده‌اند، می‌بینیم.



شکل ۱.۱: سه قانون تابش. شکل از مرجع [۴].

۴.۱.۱ نظریه‌ی بوز

پلانک با پاسخ خود تمام انتظارات را برآورد کرد. اما بوز به این پاسخ قانع نشد و با فرض تمایز ناپذیری ذرات محاسبات را به نحو دیگری آغاز کرد، هر چند هر دو پاسخ برای این مسئله یک جواب دارند.

کاری که بوز انجام داد این بود که بر آمار خود ترازا متمرکز شد و از آماری غیر از آمار بولتزمان استفاده کرد؛ آمار بوز-اینشتین. به این ترتیب زمینه برای اینشتین فراهم شد تا با تغییر فقط یک کمیت (انرژی مربوط به گاز فرانسیتی با انرژی مربوط به اجسام مادی) و استفاده از آمار بوز، به بررسی نتایج این مسئله برای اتم‌های بوزونی، که چگالش بوز-اینشتین است، بپردازد.

۲.۱ مبانی نظری چگالش بوز-اینشتین

در مکانیک آماری برای یک گاز ایده‌آل، با استفاده از هنگرد^۴ کانونی بزرگ و استفاده از روش ضرایب نامعین لاگرانژ، به رابطه‌ی زیر برای گاز ایده‌آل می‌رسیم

$$n_i^* = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + a} \quad (1.1)$$

که $\beta = 1/kT$ و $\alpha = -\mu/kT$. برای گاز بوزونی مقدار $g_i = 1$ و $a = -1$. پس برای گاز بوزونی ایده‌آل در شرایط تعادل مقدار ضریب اشغال میانگین برای حالت تک ذره می‌شود

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1} \quad (2.1)$$

که در آن ϵ انرژی حالت تک ذره و μ پتانسیل شیمیایی سامانه است. برای چنین سامانه‌ای تابع افراز کانونی بزرگ^۵ به صورت زیر است

$$q(T, V, z) = \ln Z(T, V, z) = - \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (3.1)$$

در این سامانه پتانسیل شیمیایی μ و در نتیجه بی‌دوامی $z = e^{\beta\mu}$ ثابت نیستند، اما تعداد ذرات ثابت است

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle^{BE} = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (4.1)$$

نتیجه‌ی مهمی که از این رابطه می‌گیریم، تعداد متوسط ذرات برای همه‌ی حالت‌های تک ذره $|i\rangle$ ، $0 \leq \langle n_i \rangle \leq N$ است. $z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} = e^{\beta(\epsilon_i-\mu)} > 1$ ؛ بنابراین برای همه‌ی i ها، باید $\epsilon_i > \mu$ باشد. پتانسیل شیمیایی برای یک گاز بوز ایده‌آل باید از انرژی پایین‌ترین تراز تک ذره $\epsilon = 0$ ، کوچک‌تر باشد. یعنی $0 \leq \mu \leq 0$ و $0 \leq z \leq 1$. این معادل با این واقعیت است که بوزون‌ها یک پتانسیل جاذبه احساس می‌کنند، و اضافه کردن بیش‌تر بوزون به سامانه انرژی‌بر نیست. شرط $0 \leq z \leq 1$ هم، شرایط همگرایی را برای توابع افراز و تعداد ذرات می‌دهد.

برای حجم بزرگ، جمع را به انتگرال تبدیل می‌کنیم. این فرمولبندی را می‌توان از فرض فضای فاز کلاسیکی نیز به دست آورد. کمیت

$$\sum = \int \frac{d^3\vec{r}d^3\vec{p}}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} \int p^2 dp = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (5.1)$$

تعداد حالت‌ها در فضای فاز تک ذره است. نکته‌ی جالب توجه در این معادله مقدار انرژی است که در این مورد (ذرات بوزونی) $\epsilon_i = \hbar^2 k^2 / (2m)$ ، و برای گاز فرانسیتی (فوتون‌ها) $\epsilon_i = c|\vec{p}| = \hbar c|\vec{k}|$ است.

در واقع این نوع اینشتین بود که به این جنبه‌ی دست‌آورد بوز پی برد و با تغییر مقدار انرژی این آمار را برای ذرات مادی نیز به کار برد که ماحصل آن چگالش برای ذرات مادی در دمایی نزدیک صفر مطلق است.

پیش از تبدیل جمع به انتگرال، نکته‌ای درباره‌ی انرژی نقطه‌ی صفر وجود دارد. در مجموع جملات تابع افراز کانونی بزرگ (رابطه‌ی ۳.۱) به ازای انرژی صفر یک مقدار غیر صفر داریم که

^۵ Grand canonical partition function

این مقدار در رابطه‌ی چگالی انرژی (۵.۱) به ازای $\epsilon = 0$ ، صفر می‌شود. با افزودن جملات انرژی صفر و تبدیل جمع به انتگرال، تابع پارش کانونی بزرگ با یک انتگرال گیری جزء‌به‌جزء

$$q(T, V, z) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} - \ln(1-z) \quad (6.1)$$

شده و تعداد ذرات

$$N(T, V, z) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} + \frac{z}{1-z} \quad (7.1)$$

می‌شود.

با توجه به مطالب پیوست آ، رابطه‌ی ۷.۱ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$N(T, V, z) = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + N_0(z) \quad (8.1)$$

یا به شکل به‌تر

$$N = N_\epsilon + N_0 \quad (9.1)$$

که N_ϵ تعداد ذرات در تراز برانگیخته و N_0 تعداد ذرات در تراز پایه است. λ ، طول موج گرمایی میانگین است که با رابطه‌ی

$$\lambda = \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{1/2} \quad (10.1)$$

داده می‌شود. از آنجایی که $0 \leq z \leq 1$ تابع $g_{3/2}(z)$ کران‌دار است و با z به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد. مقدار بیشینه‌ی آن چنین است

$$g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \approx 2.612 \quad (11.1)$$

بنابر این برای مقادیر مفروض V و T تعداد کل ذرات در همه‌ی ترازهای برانگیخته محدود است

$$N_\epsilon \leq V \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \zeta(3/2) \quad (12.1)$$

اگر تعداد ذرات از این حد بیش‌تر شود، بقیه‌ی ذرات همگی به حالت پایه می‌روند، که گنجایش در این شرایط نامحدود است. به این پدیده‌ی عجیب که انباشته شدن تعداد بزرگی (ماکروسکوپیکی) از ذرات در یک حالت کوانتومی است، چگالش بوز-اینشتین می‌گویند [۵].

پس با استفاده از معادله‌ی ۱۲.۱ شرایط ظهور چگاله‌ی بوز-اینشتین به صورت زیر است

$$N > VT^{3/2} \frac{(2\pi mk)^{3/2}}{h^3} \zeta(3/2) \quad (13.1)$$

اگر N و V را ثابت نگه‌داریم و T تغییر کند، شرایط دمایی این گذار فاز به این صورت خواهد بود

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{N}{V \zeta(3/2)} \right)^{2/3} \quad (14.1)$$

به ازای $T < T_c$ می‌توان سامانه را به صورت دو فاز گازی و چگالیده در نظر گرفت. با محاسبه‌ی نسبت N_e/N از روابط ۱۲.۱ و ۱۴.۱ و با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۹.۱ به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$\frac{N_e}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (15.1)$$

این رابطه، ارتباط میان دما و تعداد ذرات در تراز پایه برای اتم‌های بدون برهم‌کنش است. همان طور که از این رابطه بر می‌آید، برای فرو ریزش ذرات به حالت چگالیده باید دما را به صفر مطلق نزدیک کنیم.

۳.۱ حرکت به سمت صفر مطلق

سال‌ها پیش از ۱۹۲۴ (سالی که بوز روش جدید خود در یافتن قانون پلانک را معرفی کرد) حرکت به سمت دماهای پایین آغاز شده بود. در سال ۱۹۰۸ (۱۲۸۷) کامرلینگ اونس^۶ با ایجاد هلیوم مایع توانست ضمن رسیدن به دمای ۲/۴ کلوین، ابرسانایی را که نمود چگالش بوز-اینشتین در سیستم‌های فرمیونی غیرساده است ایجاد کند. البته تا سال ۱۹۵۷ (۱۳۳۴) هنوز هیچ توجیه قابل قبولی برای ابرسانایی نشده بود [۶]. این کاهش دما تا سال ۱۹۷۹ (۱۳۵۸)، که توسط یخچال هسته‌ای به دمای ۵۰ نانو کلوین رسید، ادامه یافت [۱].

اگر گازی را با چگالی بالا (فشار بالا $(N/V = P/(kT))$ سرد کنیم، به حالت مایع و سپس جامد آن می‌رسیم. برای این که از این امر پرهیز کنیم، بایستی چگالی اتم‌های مورد نظر را تا حدود "یک صدهزارم" چگالی هوای "نرمال" کاهش دهیم [۷]. حال با دانستن چگالی نمونه، با استفاده از رابطه‌ی ۱۴.۱ و در نظر گرفتن جرم هر اتم می‌توانیم به سادگی دمای بحرانی و آنگاه محدوده‌ی تخمینی دمای لازم برای چگالش را پیدا کنیم. این محدوده برای 10^5 اتم روییدیم حدود 10^7 نانو کلوین است [۸]. اما همان طور که پیش‌تر گفته شد، این دما پیش از سال ۱۹۸۰ (۱۳۵۹) با استفاده از یخچال هسته‌ای به دست آمده بود. این مسئله که چنین دمایی را برای اتم‌های قلیایی خنثی در فشار پایین (شرایطی که شاید مشابه آن‌را در عالم طبیعت نتوان یافت) فراهم کنند، هنوز فیزیکدانان را به چالش می‌طلبید.

۴.۱ روش‌های سرمایه‌ش مؤثر

نیمه‌ی دوم سده‌ی بیستم را می‌توان سال‌هایی نامید که پیشگویی‌های علمی اینشتین زمینه‌ی بروز پیدا کرد؛ لیزر، سنجش تاثیر جمله‌ی تصحیحی در پتانسیل گرانشی با استفاده از سیاره‌ی عطارد، چگالش بوز-اینشتین و ... مثال‌هایی از این دست هستند.

مسئله این بود که چگالش بوز-اینشتین در گازهای رقیق انجام شود. فیزیکدانان دست به کار شدند. در سال‌های پس از ۱۹۶۰ (سال اختراع لیزر گازی توسط علی جوان) دانشمندان به دنبال یافتن کاربردهای لیزر بودند. از جمله‌ی این کاربردها سرمایه‌ش لیزری است. مبانی سردسازی لیزری را تی. دبلیو. هنش و ا. ال. شاولو در سال ۱۹۷۵ پیشنهاد کردند [۹].

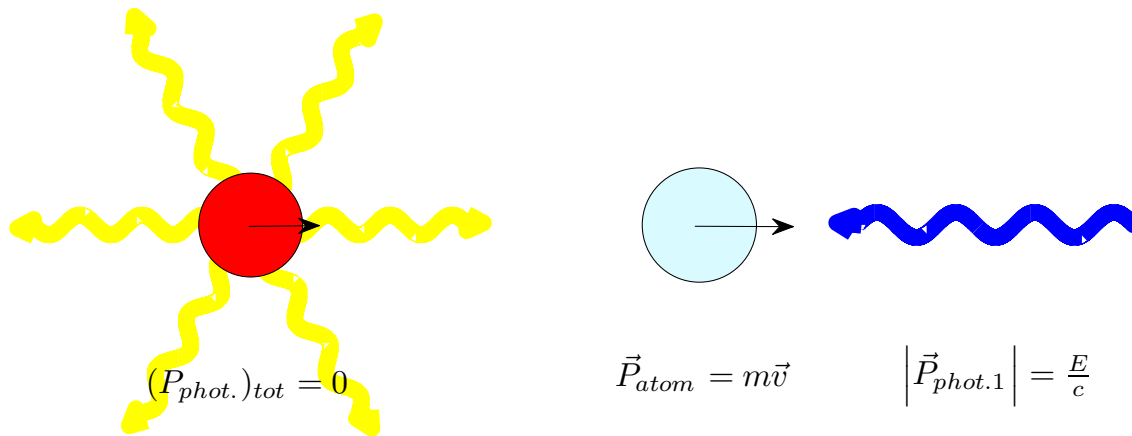
۱.۴.۱ سرمایه‌ش لیزری-روش دوپلر

در روش دوپلر^۷، اتم‌ها توسط شش باریکه‌ی دوبه‌دو متعامد لیزر تحت برخورد فوتون قرار می‌گیرند. در راستای هر محور اتم‌های ساکن همه‌ی فوتون‌هایی که به سمت راست یا چپ حرکت می‌کنند را با توجه به همسانی فاصله‌ی تراز اتمی و بسامد فوتون‌های لیزر، جذب می‌کنند. در نتیجه مجموع تغییر تکانه برای اتم به‌طور میانگین صفر خواهد بود. برای اتم‌های متحرک به سمت راست بسامد فوتون‌های حرکت کننده به سمت راست، در دستگاه مرجع اتم، بر اساس پدیده‌ی دوپلر کاهش پیدا می‌کند، در نتیجه جذب این فوتون‌ها کاهش می‌یابد. برای فوتون‌های متحرک به سمت چپ داستان وارون است و جذب این فوتون‌ها افزایش می‌یابد. فوتون جذب شده، علاوه‌بر انتقال تکانه‌ی فوتون به میزان $|h\mathbf{q}| = E/c$ به اتم، باعث برانگیختگی اتم می‌شود و اتم بر اثر این امر تابش می‌کند. چون تابش در تمام جهت‌ها به‌طور همسانگرد است در این مرحله تکانه‌ی برآیند وارد به اتم صفر است. در شکل ۲.۱، مراحل مربوط به برخورد فوتون لیزر با اتم تند، برانگیختگی اتم و گسیل پرتوهای کم انرژی‌تر همراه با کند شدن اتم را می‌بینید. در نتیجه‌ی این اثر تکانه‌ی خالصی از سمت راست به چپ به اتم وارد می‌شود. تکانه‌ی وارده اتم را کند می‌کند و بر اساس نظریه‌ی جنبشی گازها کاهش سرعت اتم به معنی کاهش دما است [۱۰].

سردسازی به شیوه‌ی دوپلر دارای یک حد برای کاهش دماست که به آن حد دوپلر گفته می‌شود

$$kT = \frac{\hbar\Gamma_e}{2} \quad (16.1)$$

که در آن $\hbar\Gamma_e$ ، پهنای خط تشدید و k ، ثابت بولتزمن است. این محدوده برای اتم نوعی سدیم در حد



$$(\vec{P}_{atom})_{final} = \vec{P}_{atom} - \vec{P}_{phot.1}$$

شکل ۲.۱: شکل رنگی. شکل سمت راست، اتم را در حالت عادی با سرعت بالا در حال برخورد با فوتون نشان می‌دهد. شکل سمت چپ همان اتم را پس از درآشامی فوتون و برانگیختگی، در حال گسیل پرتوهای کم انرژی تر نشان می‌دهد. مطابق نوشته‌های روی شکل سرعت اتم در این مرحله کاهش یافته است.

۴۸۰ میکروکلون است، که تا دمایی در حد چندصد نانوکلون هزار مرتبه فاصله دارد (بخش ۳.۴ مرجع [۱۱]).

۲.۴.۱ سرمایش لیزری-روش سیسیفوس

سردسازی سیسیفوس^۸ که گاهی "سردسازی قطبش شیبدار" نیز نامیده می‌شود، با پرتوهای قطبیده‌ی خطی با قطبش متعامد ایجاد می‌شود. در این سردسازی اتم دارای دو حالت پایه در $^2S_{1/2}$ و چهار حالت برانگیخته در $^2P_{3/2}$ است. اختلاف پتانسیل بین این دو حالت نیز با معادله‌ی زیر داده می‌شود

$$V^{\pm} = V_0(-2 \pm \sin(2qz)) \quad (17.1)$$

که q بردار موج فوتون و z مکان اتم است. اساس این روش برمبنای پمپ اپتیکی^۹ اتم از پتانسیل بالا به پتانسیل پایین است.

برتری این روش نسبت به روش "دوپلر" در گذار این سردسازی از حد دوپلر است. نتایج آزمایشگاهی به فرآیند جدیدی منجر شد که دمایی مطابق با انرژی حرارتی از مرتبه‌ی "انرژی پس‌زنی"^{۱۰} تولید می‌کند. محدوده‌ی دمایی روش سیسیفوس از رابطه‌ی زیر با استفاده از انرژی پس‌زنی حساب می‌شود

$$T_r = \frac{E_r}{k} = \frac{(\hbar q)^2}{2mk} \quad (18.1)$$

که به دمایی در حدود ۱ - ۱۰ میکروکلون منجر می‌شود (بخش ۵.۴ مرجع [۱۱] و مرجع [۱۲]).

۳.۴.۱ تله‌ی مغناطیسی-اپتیکی (MOT)

اساس این تله برمبنای فشار تابشی است و این فرآیند سردسازی موضوع جایزه‌ی نوبل ۱۹۹۷ بود [۱۳]. این تله با به دام اندازی و سردسازی اتم‌ها با هردو فرآیند دوپلری و سیسیفوس، یک نقش مهم در ایجاد چگاله‌ی بوز-اینشتین ایفا می‌کند (بخش ۴.۴ مرجع [۱۱]). در سال ۱۹۸۷ این تله‌ی عملی پیشنهاد شد [۱۴]. کارل وایمن^{۱۱} و شاگردش کریس مونرو^{۱۲} روشی برای انتقال اتم‌های سرد از (MOT) به یک تله‌ی مغناطیسی پیشنهاد کردند [۱۵]. این نمونه علاوه بر افزایش چگالی فضای فاز،

^۸Sisyphus cooling

^۹Optically pumped

^{۱۰}Recoil energy

^{۱۱}Carl Wieman

^{۱۲}Chris Monroe