دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

منظم بودن قاب های جبری

استاد راهنما:
آقای دکتر علی‌اکبر استاجی

استاد مشاور:
آقای دکتر غلامرضا مقدسی

نگارش:
سولماز بهرامی

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

تمام معلمان و اساتیدی که در معرفت و کمال انسان‌ها کوشیده‌اند،

به پدر و مادرم که بیش از هر چیز معلم و مشوقم بودند و
به خواهرم سارا که با همدلی و همراهیش یاری‌گرم بود.

تشکر و قدردانی

منت خدای را عزّ وجل، که توانی به من عطا فرمود تا در پیمودن این راه کوچکترین یأس و خللی در گام‌هایی که برداشتم، ایجاد نشود.

خداوند را سپاسگزارم که در خانواده‌ای فرهنگی متولد شدم و پدر و مادرم به عنوان یک مربی و معلم از همان ابتدای تحصیل قدم به قدم با من و در کنارم، با تشویق و ارشاد و راهنمایی‌های مؤثر باعث توفیقم گردیدند. افتخار می‌کنم که در کشوری متولد شدم که پایه‌گذار بیشتر علوم و نظریه‌ها و قوانین کشف شده‌ی امروزند و از همه مهم‌تر اینکه سالیان متمادی بر کل جهان حکومت فرهنگی نمودند.

پس از آن به مصداق آیه **من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** ، در جایی که امام علی می‌فرمایند هرکس کلمه‌ای به من بیاموزد مرا بنده خویش ساخته است، زبانم قاصر از توصیف زحماتی است که استاد ارجمندم جناب آقای **دکتر علی‌اکبر استاجی**، که به حق به قول منطقیان مفهوم معلمی است که در وجود ایشان مصداق پیدا می‌کند، او که علی‌الخصوص به من اندیشه‌ها را نیاموخت بلکه چگونه اندیشیدن را آموخت. هم‌چنین از استاد بزرگوارم جناب آقای **دکتر غلامرضا مقدسی**، که چه در مقطع کارشناسی و چه در مقطع کارشناسی ارشد یاری‌گرم بودند، تقدیر و تشکر می‌نمایم. هم‌چنین از اساتید بزرگوار جناب آقای **دکتر محمد مهدی ابراهیمی** و سرکار خانم **دکتر مژگان محمودی** که قبول زحمت فرموده، قدم به دیار سربداران نهاده و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، صمیمانه سپاس‌گزاری می‌نمایم.

سولماز بهرامی

مهر ماه ۱۳۸۹

پیشگفتار

در نیمه اول قرن نوزدهم، جورج بول [۱] تلاش بسیاری برای فرمول‌بندی یک مفهوم جدید انجام داد که جبر بول نام گرفت. در پایان قرن نوزده، زمانی‌که مشغول انجام بررسی‌های بیشتر روی جبر بول بود، چارلز پیرو [۲] و ارنست شرودر [۳]این مفهوم را برای معرفی مشبکه‌ها مفید یافتند. اما گسترش اصلی در زمینه‌ی نظریه مشبکه‌ها، نتیجه‌ی کارهای گارت بیرخوف [۴] بود.

یک مشبکه کامل که قانون توزیع پذیری زیر، برای هر $a \in L$ و $S \subseteq L$، برقرار باشد را قاب می‌نامیم.

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s \ ; \ s \in S\}$$

این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول، ابتدا مفاهیم مورد نیاز از نظریه مشبکه‌ها را بیان می‌کنیم و سپس قاب‌ها را معرفی کرده و انواع و ویژگی‌های آن‌ها، مانند قاب‌های فشرده، قاب‌های جبری، قاب‌های منظم و قاب‌های نرمال را معرفی می‌کنیم که براساس منابع [۱۴]، [۱۵]، [۱۷] و [۱۹] نوشته جورج مارتینز و اریک زینک است. هم‌چنین گروه‌های مشبکه‌ای را به اختصار تعریف می‌کنیم، که براساس مرجع [۸]، نوشته مایکل دارنل [۵] است. در این بخش، ابتدا گروه‌های مشبکه‌ای یا به اختصار l–گروه‌ها را معرفی می‌کنیم و ویژگی‌ها و قضایای مورد نیاز را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم که مشبکه تمام زیرمشبکه‌های محدب از یک l–گروه یک قاب تشکیل می‌دهند.

فصل دوم، که مهم‌ترین قسمت این پایان نامه است، مشتمل بر دو بخش است. در این فصل،

---

[۱] George Boole

[۲] Charles S.Ypeiro

[۳] Ernst Schroder

[۴] Garrett Birkhoff

[۵] Michael Darnel

اساس کار مرجع [۱۹] است. در بخش اول، نتایج اصلی و ویژگی‌های قاب‌های جبری منظم را بیان می‌کنیم و در طیّ چند قضیه نشان می‌دهیم که یک قاب جبری چه وقت منظم می‌شود. هم‌چنین در بخش دوم ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی نسبتاً زیر بودن چه زمانی درونیابی می‌شود.

فصل آخر را به مطالعه قاب‌های به طور کامل توزیع پذیر اختصاص می‌دهیم و در پایان قضایایی در مورد قاب‌های منسجم نرمال بیان می‌کنیم.

فهرست مندرجات

علایم و نشانه‌ها

مشبکه	L
اجتماع	$\cup$
اشتراک	$\cap$
سوپریمم	$\vee$
اینفیموم	$\wedge$
تعلق	$\in$
عدم تعلق	$\notin$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرمجموعه سره	$\subsetneq$
بازه واحد	$[۰, ۱]$
مجموعه‌ی عضوهای فشرده L	$C(L)$
مجموعه‌ی عضوهای قطبی L	$P(L)$
مجموعه‌ی عضوهای $j-$ جاذب	$Ab(j)$
مجموعه عضوهای منظم	$Reg(L)$
مجموعه عضوهای متمم پذیر	SL
مجموعه عضوهای از بعد صفر	Z(L)
مجموعه $d-$عضوها	dL

فصل ۱

تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم مورد نیاز از نظریه مشبکه‌ها را بیان می‌کنیم و سپس به بیان مفاهیم کلی و تعاریف، نکات و قضایایی در مورد قاب‌ها می‌پردازیم که این مفاهیم در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱—۱ مشبکه‌ها

در این بخش به اختصار به مطالعه تعاریف اولیه و بیان نتایجی از مجموعه‌های جزئی مرتب، مشبکه‌ها و مشبکه‌های توزیع‌پذیر می‌پردازیم.

تعریف ۱—۱.۱ : یک ترتیب جزئی روی مجموعه P، یک رابطه دوتایی $(\leq)$ روی P است، یعنی یک زیر مجموعه از $P \times P$ است که خواص زیر را دارد:

۱) خاصیت انعکاسی: اگر $a \in P$ آن‌گاه $a \leq a$.

۲) خاصیت پاد متقارنی: اگر $a, b \in P$، $a \leq b$ و $b \leq a$ آن گاه $a = b$.

۳) خاصیت تعدی: اگر $a, b, c \in P$، $a \leq b$ و $b \leq c$ آن گاه $a \leq c$.

زوج $(P, \leq)$ را یک مجموعه‌ی گاهی جزئی مرتب می‌گوییم و چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار می‌گوییم P یک مجموعه جزئی مرتب است.

فرض کنیم P یک مجموعه جزئی مرتب باشد. دو عضو $c, d \in P$ را مقایسه پذیر گوییم، هرگاه $c \leq d$ یا $d \leq c$. یک مجموعه جزئی مرتب که هر دو عضو آن مقایسه پذیر باشند را زنجیر گوییم.

تعریف ۱—۲.۱ : فرض کنیم P یک مجموعه جزئی مرتب و $X \subseteq P$. عضو $a \in P$ را **اینفیموم** یا **بزرگترین کران پایین** X گوییم اگر

۱) a یک کران پایین برای X باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $a \leq x$.

۲) برای هر کران پایین b از X داشته باشیم، $b \leq a$.

اینفیموم X در صورت وجود یکتا است و با $\bigwedge X$ نشان داده می‌شود. در جاهایی که اینفیموم عضوها در دو مجموعه جزئی مرتب محاسبه می‌شود، برای رفع ابهام از نماد $\bigwedge^P X$ استفاده می‌نماییم.
به طور مشابه، عضو $a \in P$ را **سوپریمم** یا **کوچکترین کران بالا برای** X گوییم، هرگاه

۱) a یک کران بالا برای X باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $a \geq x$.

۲) برای هر کران بالای b از X داشته باشیم، $b \geq a$.

سوپریمم X در صورت وجود یکتا است و با $\bigvee X$ نشان داده می‌شود. در جاهایی که سوپریمم عضوها در دو مجموعه جزئی مرتب محاسبه می‌شود، برای رفع ابهام از نماد $\bigvee^P X$ استفاده می‌نماییم.

فرض کنیم P یک مجموعه‌ی جزئی مرتب باشد، به انتفای مقدم هر عضو P کران بالای $\emptyset$ است. از این رو اگر P دارای کوچکترین عضو باشد، آن گاه $\bigvee \emptyset$ برابر با آن می‌باشد. لذا نتیجه می‌گیریم که $\bigvee \emptyset$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای کوچکترین عضو باشد. $\bigvee \emptyset$ را در صورت وجود صفر می‌نامیم و با 0 نشان می‌دهیم. به طور مشابه، $\bigwedge \emptyset$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای بزرگترین عضو باشد.

عضو $\bigwedge \emptyset$ را در صورت وجود همانی(یکه) می‌نامیم و با ۱ نشان می‌دهیم.

در این نوشتار فرض می‌کنیم که مجموعه جزئی مرتب P، دارای بزرگترین و کوچکترین عضو باشد، به عبارت دیگر $0, 1 \in P$. هم‌چنین برای هر $x \in P$، مجموعه عضوهایی از P را که کوچکتر یا مساوی (بزرگتر یا مساوی) x باشند را با $\downarrow x$ ($\uparrow x$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۳.۱ : مجموعه‌ی جزئی مرتب L را که برای هر $a, b \in L$، $\bigvee\{a,b\} = a \vee b$ و $\bigwedge\{a,b\} = a \wedge b$ درL وجود داشته باشند را یک **مشبکه** می‌نامیم و آن را با $(L, \leq, \vee, \wedge)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱—۴.۱ : فرض می‌کنیم L یک مشبکه باشد. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) به ازای هر $x, y, z \in L$، $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

۲) به ازای هر $x, y, z \in L$، $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

۳) به ازای هر $x, y, z \in L$، $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$.

در این صورت (۱)، (۲) و (۳) در هر مشبکه‌ای معادل می‌باشند.

برهان ۲ $\Rightarrow$ ۱) فرض می‌کنیم $a, b, c \in L$. در این صورت با استفاده از (۱)، اگر قرار دهیم $x = a \vee b$، $y = a$ و $z = c$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\
&= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\
&= a \vee (b \wedge c)
\end{aligned}$$

بنابراین (۲) برقرار است.

۱ $\Rightarrow$ ۲) مشابه حالت قبل بر قرار است.

۳ $\Rightarrow$ ۲) با توجه به این که $z \leq x \vee z$،

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge z &\leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)\\ &= x \vee (y \wedge z)\end{aligned}$$

۲ $\Rightarrow$ ۳) اگر قرار دهیم $x = a$، $y = b$ و $z = a \vee c$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &\leq a \vee (b \wedge (a \vee c))\\ &= a \vee ((a \vee c) \wedge b)\end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $x = a$، $y = c$ و $z = b$. دراین صورت، $(a \vee c) \wedge b \leq a \vee (c \wedge b)$. با ترکیب این دو رابطه نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}a \vee ((a \vee c) \wedge b) &\leq a \vee (a \vee (c \wedge b))\\ &= a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

از طرفی $b \wedge c \leq c$ و $b \wedge c \leq b$. بنابراین

$$a \vee (b \wedge c) \leq a \vee c \quad \text{و} \quad a \vee (b \wedge c) \leq a \vee b$$

درنتیجه

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

پس تساوی مورد نظر برقرار است.

■

اگر در مشبکه‌ای یکی و لذا هر سه گزاره‌ی بالا برقرار باشند، آن‌گاه آن را مشبکه‌ی توزیع‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۱—۱.۵ : مشبکه L را متمم پذیر گوییم، اگر هر $x \in L$ دارای متمم باشد، یعنی $y \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $x \wedge y = ۰$ و $x \vee y = ۱$.

یک مشبکه توزیع‌پذیر و متمم‌دار را جبر بول می‌گوییم. توجه می‌کنیم که هر عضو x از یک جبر بول دارای متمم یکتا است و آن را با x' نشان می‌دهیم.

مثال ۱—۶.۱ : برای مجموعه‌ی X، مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(X)$ به همراه رابطه شمول، جبر بول است که در آن $\vee$ و $\wedge$، به‌صورت اشتراک و اجتماع و 0 و 1 آن مجموعه تهی و X می‌باشند.

تعریف ۱—۷.۱ : زیرمجموعه‌ی S از مشبکه L را یک زیرمشبکه از L گوییم، اگر تحت اینفیموم و سوپریمم متناهی بسته باشد. به عبارت دیگر، برای هر $x, y \in S$، $x \wedge y, x \vee y \in S$ و $0, 1 \in S$.

در این‌جا مفاهیم اولیه یک توپولوژی را یادآوری می‌کنیم که در مثال‌ها و فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فرض کنیم X مجموعه ناتهی و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. τ را توپولوژی روی X گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$.

۲) اگر $\mathcal{A} \subseteq \tau$، آن‌گاه $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

۳) اگر $A, B \in \tau$، آن‌گاه $A \cap B \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی روی X باشد، زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیکی می‌نامیم. X را فضا، عناصر X را نقاط فضا و اعضای τ را مجموعه‌های باز فضا گوییم. چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار X را فضای توپولوژیکی می‌خوانیم.

فرض کنیم X فضای توپولوژیکی و F زیرمجموعه X باشد. F را زیرمجموعه بسته X نامیم، هرگاه $X \backslash F$ در X باز باشد. واضح است که $\emptyset$ و X در فضای توپولوژیکی X بسته می‌باشند.

اگر A زیرمجموعه X باشد، بستار A در X را با $cl_X A$ نمایش می‌دهیم و آن را اشتراک تمام فوق مجموعه‌های بسته A تعریف می‌کنیم و به اختصار با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. درون A در X را با $int_X A$

نمایش می‌دهیم و برابر با اجتماع تمام زیرمجموعه‌های A است که در X باز می‌باشند و به اختصار با A° نشان می‌دهیم. فضای توپولوژیکی X را در نظر می‌گیریم. در سراسر این نوشتار، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های باز X را با $O(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال **۱ــ۱.۸** : برای هر فضای توپولوژیکی X، مجموعه $O(X)$ زیرمشبکه‌ای از $\mathcal{P}(X)$ است.

تعریف **۱ــ۱.۹** : فرض کنیم P و Q مجموعه‌هایی مرتب جزئی باشند. تابع $f : P \longrightarrow Q$ را حافظ ترتیب گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in P$ اگر $a \leq b$ آن‌گاه $f(a) \leq f(b)$.

تعریف **۱ــ۱.۱۰** : مشبکه L و عضو $p \in L$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

۱) p را ماکسیمال گوییم، اگر $p \neq 1$ و عضوی مانند x موجود نباشد به قسمی که $p < x < 1$.

۲) p را اول گوییم، هرگاه $p \neq 1$ و $x \wedge y \leq p$، نتیجه دهد که $x \leq p$ یا $y \leq p$. مجموعه‌ی تمام عضوهای اول در مشبکه L را با $Spec(L)$ نشان می‌دهیم.

گزاره **۱ــ۱.۱۱** : برای مشبکه L، هر عضو ماکسیمال اول است.

برهان ۱) فرض می‌کنیم $p \in L$ عضوی ماکسیمال باشد. واضح است که $p \neq 1$. حال فرض کنیم $x, y \in L$ به قسمی باشند که $x \wedge y \leq p$. واضح است که $p \leq x \vee p$. پس بنابر تعریف عضو ماکسیمال، $p = x \vee p$ یا $x \vee p = 1$. اگر $p = x \vee p$، آن‌گاه $x \leq p$ و حکم برقرار است.

حال فرض کنیم که $x \vee p = 1$. بنابراین

$p = (x \wedge y) \vee p$	چون $x \wedge y \leq p$،
$= (x \vee p) \wedge (y \vee p)$	چون L مشبکه‌ای توزیع‌پذیر است،
$= y \vee p$	چون $x \vee p = 1$،

پس $y \leq p$ و حکم مورد نظر برقرار است.

■

تعریف ۱—۱۲.۱ : مشبکه L را کامل گوییم اگر برای هر $X \subseteq L$، $\bigvee X$ و $\bigwedge X$ در L وجود داشته باشند.

قضیه ۱—۱۳.۱ : فرض کنیم L یک مشبکه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) برای هر $X \subseteq L$، $\bigvee X \in L$ وجود دارد.

۲) برای هر $X \subseteq L$، $\bigwedge X \in L$ وجود دارد.

برهان ۲ $\Rightarrow$ ۱) برای $X \subseteq L$، فرض کنیم $\bigwedge X$ وجود داشته باشد. هم‌چنین فرض کنیم K مجموعه‌ای از تمام کران‌های بالای X باشد. با توجه فرض، $\bigwedge K$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $a = \bigwedge K$. اگر $x \in X$، آن‌گاه برای هر $k \in K$، $k \leq x$. بنابراین $a \leq x$ و $a \in K$. پس a کوچکترین عضو K است، یعنی؛ $a = \bigvee X$.

۱ $\Rightarrow$ ۲) به طور مشابه ثابت می‌شود.

■

تعریف ۱—۱۴.۱ : اگر L یک مشبکه باشد، برای هر $a, b \in L$، $a \to b$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \to b = \bigvee \{x \in L \mid a \wedge x \leqslant b\}$$

و $a \to \circ = \bigvee \{x \in L \mid a \wedge x = \circ\}$ را با $a^{\perp}$ نشان می‌دهیم. در واقع $a^{\perp}$ بزرگترین عضو مجموعه‌ی $\{x \in L \mid a \wedge x = \circ\}$ است.

تعریف ۱—۱۵.۱ : مشبکه L را در نظر می‌گیریم. عضو $a \in L$ را شبه‌متمم‌دار گوییم، هرگاه مجموعه $\{x \in L : a \wedge x = \circ\}$ دارای بزرگترین عضو باشد. مشبکه L را شبه‌متمم‌دار گوییم، اگر هر عضوی از L، شبه‌متمم داشته باشد.

مثال ۱—۱۶.۱ : فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد و $G \in O(X)$، در این صورت :

$$\begin{aligned} G^{\perp} &= \bigvee\{Y \in O(X) \ ; \ Y \wedge G = \circ\} \\ &= \bigcup\{Y \in O(X) \ ; \ (Y \cap G)^{\circ} = \phi\} \\ &= \bigcup\{Y \in O(X) \ ; \ Y \subseteq G^{c}\} \\ &= (G^{c})^{\circ} \end{aligned}$$

قضیه ۱—۱۷.۱ : فرض می‌کنیم L یک مشبکه توزیع‌پذیر باشد. برای هر $a, b \in L$ گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند:

۱) اگر a و $a^{\perp\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $a \leq a^{\perp\perp}$.

۲) اگر $a^{\perp}$ و $b^{\perp}$ در L وجود داشته باشند و $a \leq b$، آن‌گاه $b^{\perp} \leq a^{\perp}$.

۳) اگر $a^{\perp}$، $a^{\perp\perp}$ و $a^{\perp\perp\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $a^{\perp} = a^{\perp\perp\perp}$.

۴) اگر $a^{\perp}$، $b^{\perp}$ و $(a \vee b)^{\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $(a \vee b)^{\perp} = a^{\perp} \wedge b^{\perp}$.

۵) اگر $a^{\perp}$، $b^{\perp}$ و $(a \wedge b)^{\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $a^{\perp} \vee b^{\perp} \leq (a \wedge b)^{\perp}$.

٦) اگر برای هر $i \in I$، ${c_i}^{\perp}$ در L وجود داشته باشد، آن‌گاه $(\bigvee_{i \in I} c_i)^{\perp} = \bigwedge_{i \in I} {c_i}^{\perp}$

برهان ۱) می‌دانیم $a^{\perp\perp}$ برابر با بزرگترین عضو از مجموعه $\mathcal{A} = \{x \in L : x \wedge a^{\perp} = \circ\}$ می‌باشد. حال با توجه به این که $a \wedge a^{\perp} = \circ$، پس $a \in \mathcal{A}$. از این رو $a \leq a^{\perp\perp}$.

۲) با توجه به تعریف $a^{\perp}$ کافی است نشان دهیم که $b^{\perp} \wedge a = \circ$. زیرا در این صورت $b^{\perp} \leq a^{\perp}$. چون $a \leq b$ پس $a \wedge b = a$. بنابراین

$$\begin{aligned} b^{\perp} \wedge a &= b^{\perp} \wedge (a \wedge b) \\ &= (b^{\perp} \wedge b) \wedge a \\ &= \circ \wedge a \\ &= \circ \end{aligned}$$

۳) با توجه به (۱)، $a \leq a^{\perp\perp}$ و اگر (۲) را روی آن اثر دهیم، آن‌گاه $a^{\perp\perp\perp} \leq a^{\perp}$. هم‌چنین با استفاده مستقیم از (۱)، $a^{\perp} \leq a^{\perp\perp\perp}$. بنابراین $a^{\perp} = a^{\perp\perp\perp}$.

۴) می‌دانیم که $a \leq a \vee b$ و $b \leq a \vee b$. در این صورت با توجه به قسمت (۲)

$$(a \vee b)^{\perp} \leq a^{\perp} \qquad \text{و} \qquad (a \vee b)^{\perp} \leq b^{\perp}$$

و در نتیجه $(a \vee b)^{\perp} \leq a^{\perp} \wedge b^{\perp}$.

برعکس: می‌دانیم $a^{\perp} \wedge b^{\perp} \leq a^{\perp}$ و $a^{\perp} \wedge b^{\perp} \leq b^{\perp}$. پس با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲)، $a \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$ و $b \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$. در نتیجه $a \vee b \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$. پس $(a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp\perp} \leq (a \vee b)^{\perp}$.
بنابراین با استفاده از (۱)،

$$\begin{aligned} a^{\perp} \wedge b^{\perp} &\leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp\perp} \\ &\leq (a \vee b)^{\perp} \end{aligned}$$

در نتیجه حالت عکس نیز برقرار می‌باشد.

۵) می‌دانیم $a \wedge b \leq a$ و $a \wedge b \leq b$. حال با استفاده از قسمت (۲)،

$$a^{\perp} \leq (a \wedge b)^{\perp} \qquad \text{و} \qquad b^{\perp} \leq (a \wedge b)^{\perp}$$

بنابراین $a^{\perp} \vee b^{\perp} \leq (a \wedge b)^{\perp}$.

٦) می‌دانیم برای هر $i \in I$، $c_i \leq \bigvee_{i \in I} c_i$. پس بنا به (۲)، برای هر $i \in I$، $(\bigvee_{i \in I} c_i)^{\perp} \leq {c_i}^{\perp}$ و در نتیجه $(\bigvee_{i \in I} c_i)^{\perp} \leq \bigwedge {c_i}^{\perp}$. از طرف دیگر، برای هر $i \in I$، $\bigwedge {c_i}^{\perp} \leq c_i$، در نتیجه برای هر $i \in I$، $c_i \leq {c_i}^{\perp\perp} \leq (\bigwedge {c_i}^{\perp})^{\perp}$. پس $\bigvee_{i \in I} c_i \leq (\bigwedge {c_i}^{\perp})^{\perp}$ در نتیجه $(\bigwedge {c_i}^{\perp})^{\perp\perp} \leq (\bigvee c_i)^{\perp}$.

■

تعریف ۱ــ۱۸.۱ : فرض کنیم L یک مشبکه باشد. عضو $p \in L$ را قطبی گوییم، هرگاه $y \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $p = y^{\perp}$. مجموعه تمام عضوهای قطبی L را با $P(L)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱ــ۱۹.۱ : برای مشبکه L گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند:

۱) $a \in P(L)$ اگر و تنها اگر $a = a^{\perp\perp}$.

۲) اگر $a, b \in P(L)$، آن‌گاه $a \wedge b \in P(L)$.

۳) برای $a, b \in P(L)$، $a \vee b = (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$.

۴) اگر $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq P(L)$، آن‌گاه $\bigvee_{i\in I} a_i = (\bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp})^{\perp}$.

برهان۱) اگر $a \in P(L)$ آن‌گاه $b \in L$ به قسمی وجود دارد که $a = b^{\perp}$. بنابراین

$$a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp\perp} = b^{\perp} = a$$

برعکس: اگر قرار دهیم $b = a^{\perp}$، آن‌گاه $a = b^{\perp}$ و در نتیجه $a \in P(L)$.

۲) اگر $a, b \in P(L)$، آن‌گاه $a = a^{\perp\perp}$ و $b = b^{\perp\perp}$. می‌دانیم که $a \wedge b \leq a$. بنابراین

$$\begin{aligned} a^{\perp} \leq (a \wedge b)^{\perp} \quad &\Rightarrow \quad (a \wedge b)^{\perp\perp} \leq a^{\perp\perp} \\ &\Rightarrow \quad (a \wedge b)^{\perp\perp} \leq a \end{aligned}$$

به طور مشابه، $(a \wedge b)^{\perp\perp} \leq b$. بنابراین $(a \wedge b)^{\perp\perp} \leq a \wedge b$ و در نتیجه $(a \wedge b)^{\perp\perp} = a \wedge b$.

پس با استفاده از (۱)، $a \wedge b \in P(L)$.

۳) می دانیم $a^{\perp} \wedge b^{\perp} \leq a^{\perp}$ و در نتیجه $a \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$. به طور مشابه، $b \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$.

لذا $a \vee b \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$.

اگر $x \in P(L)$ به قسمی باشد که $a \leq x$ و $b \leq x$، آن‌گاه $x^{\perp} \leq a^{\perp}$ و $x^{\perp} \leq b^{\perp}$. از این رو $x^{\perp} \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})$ و در نتیجه $(a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp} \leq x$. پس برای $a, b \in P(L)$، $a \vee b = (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$.

۴) می‌دانیم $\bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp} \leq {a_i}^{\perp}$ و در نتیجه برای هر $i \in I$، $a_i \leq (\bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp})^{\perp}$. لذا $\bigvee_{i\in I} a_i \leq (\bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp})^{\perp}$. حال اگر $x \in P(L)$ به قسمی باشد که برای هر $i \in I$، $a_i \leq x$، آن‌گاه $x^{\perp} \leq {a_i}^{\perp}$. از این رو، $x^{\perp} \leq \bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp}$ و در نتیجه $(\bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp})^{\perp} \leq x$. پس برای $\{a_i\}_{i\in I} \in P(L)$، $\bigvee_{i\in I} a_i = (\bigwedge_{i\in I} {a_i}^{\perp})^{\perp}$

■

قضیه ۱—۲۰.۱ : فرض کنیم L مشبکه‌ای شبه‌متمم‌دار باشد. اگر برای گردایه دلخواه S از $P(L)$، $\bigwedge S \in P(L)$، آن‌گاه $P(L)$ تشکیل یک جبر بول کامل می‌دهد.

برهان: ابتدا یادآوری می‌کنیم که یک جبر بول را کامل گوییم، اگر به عنوان مشبکه کامل باشد. برای اثبات باید نشان دهیم $P(L)$ یک مشبکه کامل توزیع‌پذیر و متمم‌دار است.

با توجه به قسمت (۲) و (۳) از گزاره ۱—۱۹.۱، $P(L)$ یک مشبکه است و چون $P(L)$ دارای ویژگی اینفیموم است، با توجه به قضیه ۱—۱۳.۱، دارای ویژگی سوپریمم نیز می‌باشد، بنابراین $P(L)$ مشبکه‌ای کامل است. هم چنین $P(L)$ مشبکه‌ای متمم‌دار است زیرا برای هر $a \in P(L)$،

$$a \vee a^{\perp} = (a^{\perp} \wedge a^{\perp\perp})^{\perp} = 0^{\perp} = 1 \quad \text{و} \quad a \wedge a^{\perp} = 0$$

حال نشان می‌دهیم که $P(L)$ مشبکه‌ای توزیع‌پذیر است. فرض کنیم $x, y, z \in P(L)$. با توجه به این که $x \leq x \vee y$ و $y \leq x \vee y$،

$$x \wedge z \leq x \vee (y \wedge z) \quad \text{و} \quad y \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$$

بنابراین $x \wedge z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} = 0$ و $y \wedge z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} = 0$. لذا

$$z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} \leq x^{\perp} \quad \text{و} \quad z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} \leq y^{\perp}$$

بنابراین $z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} \leq x^{\perp} \wedge y^{\perp}$ و هم‌چنین با استفاده از گزاره ۱—۱۹.۱، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} \wedge (x^{\perp} \wedge y^{\perp})^{\perp} = 0 \quad &\Rightarrow \quad z \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} \wedge (x \vee y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (z \wedge (x \vee y)) \wedge (x \vee (y \wedge z))^{\perp} = 0 \\ &\Rightarrow \quad z \wedge (x \vee y) \leq (x \vee (y \wedge z)^{\perp}) \\ &\Rightarrow \quad z \wedge (x \vee y) \leq x \vee (y \wedge z) \end{aligned}$$

درنتیجه با توجه به لم ۱—۴.۱، $P(L)$ مشبکه‌ای توزیع‌پذیر است.

■

۱ــ۲ قاب‌ها

در این بخش مفهوم قاب و قاب‌های جبری را معرفی می‌کنیم که براساس مراجع [۱۵]، [۱٦] و [۲۷] می‌باشد.

تعریف ۱ــ۲.۱ : عضو $c \in L$ فشرده است اگر $c \leq \bigvee_{i\in I} x_i$، آن‌گاه زیرمجموعه متناهی F از I به قسمی وجود داشته باشد که $c \leq \bigvee_{i\in F} x_i$. مجموعه تمام عضوهای فشرده L را با $C(L)$ نمایش می‌دهیم. اگر ۱ عضوی فشرده باشد، آن‌گاه L را مشبکه‌ای فشرده می‌گوییم.

مثال ۱ــ۲.۲ : $P(X)$، که X مجموعه متناهی است، یک مشبکه فشرده است که در اینجا ۱ همان مجموعه X است.

تعریف ۱ــ۲.۳ : اگر برای هر $a, b \in C(L)$ داشته باشیم $a \wedge b \in C(L)$، گوییم L دارای ویژگی اشتراک متناهی (FIP) است.

گزاره ۱ــ۲.۴ : $C(L)$ تحت سوپریمم متناهی بسته است.

برهان: فرض کنیم $x_1, \ldots, x_n$ عضوهایی فشرده باشند و $S \subseteq L$ به قسمی وجود داشته باشد که $\bigvee_{i=1}^n x_i \subseteq \bigvee S$. در این صورت برای هر i، $x_i \leq \bigvee S$ و در نتیجه $B_i \subseteq S$ به قسمی وجود دارد که $|B_i| < \infty$ و هم‌چنین $x_i \leq \bigvee B_i$. اگر قرار دهیم $B = \bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq S$، آن‌گاه $\bigvee_{i=1}^n x_i \leq \bigvee B$. زیرا

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^n x_i &\leq \bigvee_{i=1}^n (\bigvee B_i) \\ &\leq \bigvee (\bigvee_{i=1}^n B_i) \\ &= \bigvee B \end{aligned}$$

می‌دانیم اجتماع متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی است. از این رو B متناهی بوده و در نتیجه $\bigvee_{i=1}^n x_i$ فشرده است.

■