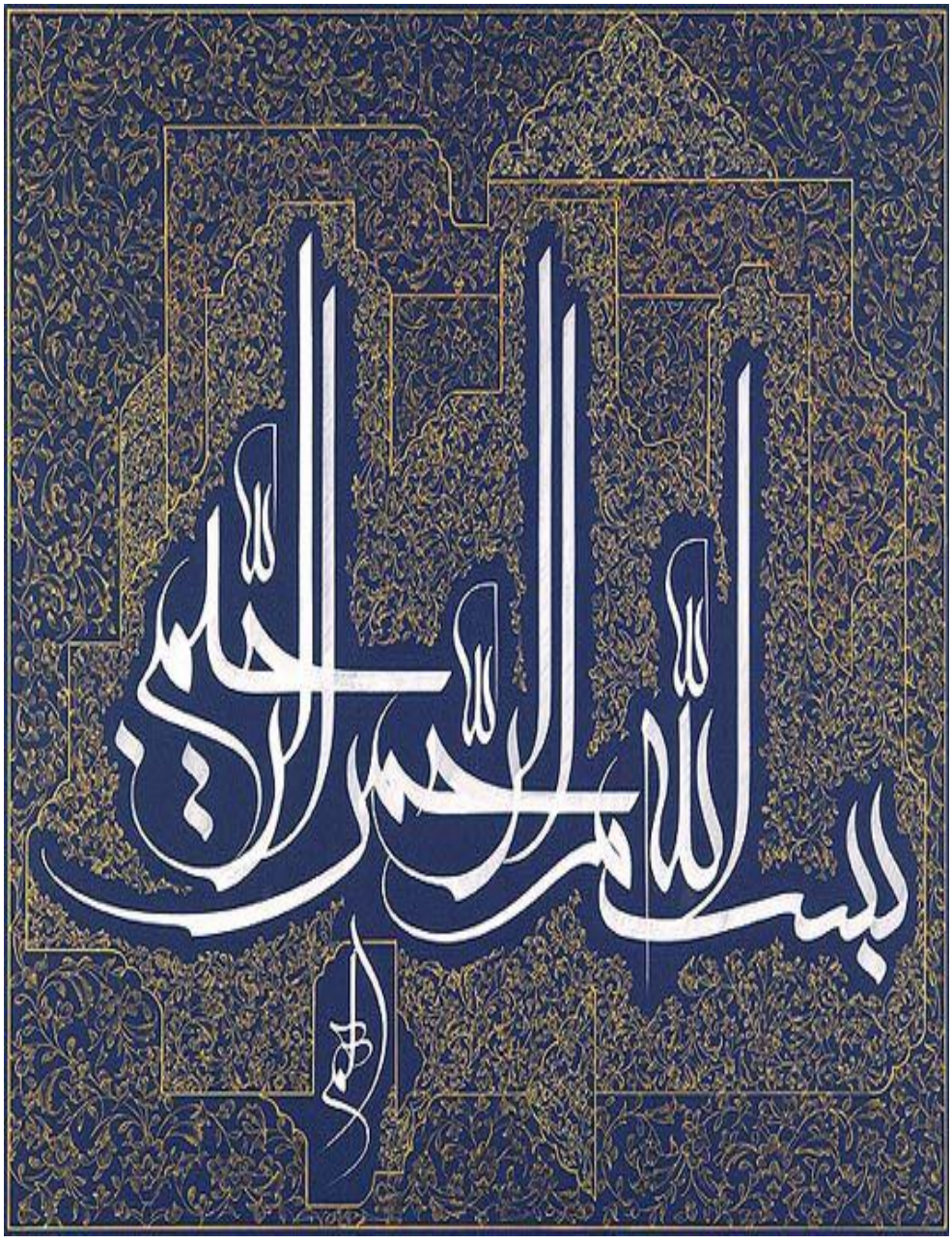

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده :ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

مطالعه مساله **p-** مرکز روی گرافهای عنکبوتی

دانشجو: آرش گوهری

اساتید راهنما :

آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف

آقای دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور:

آقای دکتر جعفر فتحعلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

دی (1388)

مقدمه 1

فصل اول : **(** نمادها**,** تعاریف ریاضی و تعریف مساله **)**..... 5

1-1 تعاریف ریاضی و مرور ادبیات 6

2-1 تعریف مساله 8

فصل دوم : **(** مجموعه غالب و ارتباط آن با مساله **p-** مرکز **)**..... 13

1-2 مجموعه غالب و ویژگی های آن..... 14

2-2 الگوریتم تعیین کوچکترین مجموعه غالب گراف..... 14

3-2 بررسی پیچیدگی زمانی الگوریتم (2-2)..... 17

4-2 کاربرد مجموعه غالب در مساله p- مرکز 17

5-2 الگوریتم Scr 18

6-2 بررسی پیچیدگی زمانی..... 18

فصل سوم :**(**مجموعه مستقل و ارتباط آن با مساله **p-** مرکز **)** 23

1-3 مجموعه مستقل و مجموعه مستقل ماکزیمال..... 24

2-3 الگوریتم مساله p- مرکز با مجموعه مستقل ماکزیمال..... 25

3-3 الگوریتم مساله p- مرکز وزن دار با مجموعه مستقل ماکزیمال 26

4-3 q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز 30

5-3 الگوریتم با ضریب تقریب 2 برای مساله q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز 34

فصل چهارم : **(** مساله **p-** مرکز با کمترین پوشش **)**..... 36

1-4 مساله p- مرکز با q- پوشش و p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز..... 37

2-4 الگوریتم تعیین مجموعه مستقل ماکزیمال از گراف 41

3-4 الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش در حالت اصلی..... 42

4-4 الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار..... 43

5-4 الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش وزن‌دار به همراه هزینه 46

6-4 الگوریتم مساله p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت اصلی 48

7-4 الگوریتم p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز در حالت وزندار 50

8-4 الگوریتم p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز وزن‌دار به همراه هزینه 54

9-4 خلاصه ای ازضرایب تقریب 55

فصل پنجم : **(**مساله **p-** مرکز همبند روی درختها **)**.....56

1-5 بررسی مساله p- مرکز همبند روی درختها 57

2-5 الگوریتم p- مرکز همبند روی درختها 63

3-5 الگوریتم $p^{(r)}$ روی درخت T(r).....64

4-5 p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه 66

5-5 الگوریتم p- مرکز همبند با رئوس ممنوعه 69

6-5 الگوریتم $FP^{(r)}$ روی درختها 70

فصل ششم **(**مقایسه جواب مساله **p-** مرکز و **p-** مرکز همبند روی درختهای عنکبوتی در شرایط خاص**)**.....73

1-6 مقایسه جواب مساله p- مرکز و p- مرکز همبند روی درختهای عنکبوتی در شرایط خاص..... 74

نتایج 90

فهرست منابع 91

واژه نامه 94

چکیده :

در این تحقیق یک دسته از مدل های مکان‌یابی شبکه ای گسسته تحت عنوان مکـان‌یـابی مراکـز (p- مرکـز[1]) روی دسته خاصی از گرافها موسوم به شبکه های عنکبوتی یا درختهای عنکبوتی[2] مورد مطالعـه و بررسـی قـرار گرفته است . با توجه به اینکه مساله p- مرکز جزو دسته مسائل Np-hard می باشد , بنابراین بایـد از طریـق روش های ابتکاری جواب آن را برآورد کرد. لذا الگوریتم هایی مبتنی بـر مفـاهیم کـوچکترین مجموعـه غالـب و مجموعه مستقل ماکزیمال بیان شده اند و پیچیدگی زمانی آنها بیان شده است. در ادامه تعمیمـی از مسـئله p- مرکز تحت عنوان مساله p- مرکز با کمترین پوشش در فصل چهارم مورد بررسی قرار گرفتـه اسـت بطـوری کـه مراکز موظفند حداقل یک تعدادی از مشتری ها یا متقاضیان را سرویس دهند. همچنـین از طریـق دو الگـوریتم مبتنی بر درختها و مجموعه مستقل ماکزیمال , مساله p- مرکز و p- مرکز همبند[3] روی گرافهای عنکبـوتی در شرایط خاص مورد بررسی قرار گرفته است.

1- P-center
2- Spider tree
3- Connected p-center

مقدمه

یکی از مسائلی که تحت عنوان مسائل مکان یابی مطرح می شود، مساله مکانی یابی مراکز یـا تاسیسـاتی اسـت که حداکثر فاصله آنها تا تمام گره‌های شبکه، حداقل گردد. مسائلی نظیر ایجاد ایستگاههای آتش نشانی و مراکـز اورژانس از این نوع می باشند . برای مثال ایستگاههای آتش نشانی بایستی در مکان‌هایی تاسیس گردنـد کـه در صورت آتش سوزی، نزدیکترین ایستگاه آتش نشانی به محل آتش سوزی بتواند در حداقل مدت بـه آن سـرویس داده و حریق را مهار نماید. این مساله تحت عنوان « حداقل کردن حداکثر فاصله از مرکز تاسیساتی مربوطـه بـه هر گره شبکه » بررسی می‌شود.

اهمیت مسائل مکان‌یابی

در طول سه قرن گذشته مسائل مکان یابی متعددی در قالب فرضیات و مدل های ریاضی پدیـدار و ارائـه گشـته اند . اما ظاهراً طرح مساله مکان‌یابی بطور کلی و رسمی برای نخستین بـار بـه وبـر[4] (1909) نسـبت داده شـده است . امروزه نیز تعیین محل مناسب برای استقرار تجهیزات یا مراکز خدماتی در یک شبکه موضوع مهمی بـوده و در چند دهه اخیر توجه بسیاری را به خود جلـب کـرده اسـت . تصـمیمات مربـوط بـه مکـان‌یـابی در مسـائل گوناگونی اعم از بخش های دولتی و خصوصی ظاهر می گردند . در قسمت خصوصی، مراکز صنعتی وکارخانجـات برای استقرار دفاتر خود در سطح شهر، تعیین محل مراکز توزیع و ... نیـاز بـه اتخـاذ تصـمیم دارنـد و در بخـش دولتی نیز تعیین مراکزی از قبیل ایستگاههای پلیس راه، اورژانس از اهمیت ویژه ای برخوردار است. البته باید

[1]- weber

توجه داشت که بیشتر مسائل روزمره زندگی واقعی در زمینه مکان‌یابی , در فضای گسسته مطرح و بررسی می شوند.

دسته بندی مسائل مکان‌یابی

مسائل و مدل‌های مکان یابی را می توان به روش های متفاوتی طبقه بندی نمود . انواع گوناگونی از مسائل مکان‌یابی تسهیلات وجود دارند که برخی از کلاس های مهم آن عبارتند از :

1- مساله مکان‌یابی تسهیلات گسسته[5] که درآن مجموعه‌ای از نقاط تقاضا و مکان‌های تسهیلات مشخص می باشد .
2- مساله مکان‌یابی تسهیلات پیوسته[6] که درآن در یک فضای مشخص تعداد معینی از تسهیلات را مکان‌یابی می کنند.
3- مساله مکان‌یابی تسهیلات تصادفی[7] که در آن برخی از پارامتر های تقاضا یا زمان سفر نامعین هستند .
4- مساله مکان‌یابی تسهیلات شبکه‌ای[8] که در یک شبکه اساسی تعداد معینی از اتصالات و گره‌ها محدود شده اند.

طبقه بندی بر اساس مشخصه های گوناگون صورت می پذیرند. برخی از این مشخصه ها عبارتند از:

2-Discrete facility location
3-Continues facility location
4-Random facility location
5-Network facility location

1- روی سطح [9] یا روی شبکه تعریف شدن مدل

در مسائل مکان یابی که روی سطح تعریف می شوند، محل های استقرار می توانند روی هر نقطه از سطح مشخص شوند که مختصات آن با توجه به مشخصه های طولی عرضی به دست می‌آید, اما در مسائل مکان‌یابی روی شبکه این مراکز تنها در نقاط خاصی امکان استقرار پیدا می کنند.

2- درختی یا گراف بودن مدل

3- تعداد مراکز استقرار

4- ساکن یا پویا بودن مدل

ویژگی‌های مدل **p-** مرکز :

ویژگی های عمده‌ای تاکنون در مورد مدل p- مرکز شناسایی شده اند که عبارتند از :

1- روی سطح یا شبکه بودن مساله

2- درحالت شبکه، سیکلی یا درختی بودن شبکه

3- محدود یا نامحدود بودن ظرفیت منابع

4- یکسان یا متفاوت بودن نوع مراکز عرضه

5- وزندار بودن یا بدون وزن بودن تقاضاها

در فصل یک ، نمادها و تعاریف ریاضی و تعریف مساله p- مرکز آمده است .

[6]-Planar

فصل دوم، مفهوم مجموعه غالب[10] را بیان نموده وسپس به بیان ارتباط آن با مساله p- مرکز می‌پردازد و در ادامه به بیان الگوریتمی جهت تعیین کوچکترین مجموعه غالب و الگوریتم SCR که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب استوار است و جهت برآورد جواب مساله p- مرکز به کار می رود، می‌پردازیم .

فصل سوم مفهوم دیگری به نام مجموعه مستقل[11] را مورد بررسی قرار داده و سپس در ادامه به بیان ارتباط آن با مساله p- مرکز می پردازد و سپس الگوریتم هایی با ضرایب تقریب 2 و3 برای مساله p- مرکز نرمال و وزن دار ارائه می دهد و همچنین نشان خواهد داد که الگوریتم هایی که براساس مجموعه مستقل ماکزیمال[12] پایه ریزی شده اند به مراتب سریعتر از الگوریتم هایی است که بر اساس کوچکترین مجموعه غالب[13] پایه ریزی شده‌اند، ما را در برآورد جواب مساله p- مرکز یاری می کند و در انتها تعمیمی از مساله p- مرکز را تحت عنوان q امین مرکز دایر در مساله p- مرکز[14] را مورد بررسی قرار می دهیم .

فصل چهارم به بیان مساله p- مرکز با کمترین پوشش[15] می پردازد و تعمیمی از مساله p- مرکز را تحت عنوان p- مرکز با q- پوشش[16] و p- مرکز با q- پوشش غیر مرکز[17] معرفی کرده و سپس در مورد صحت مطرح شده و ضرایب تقریب این الگوریتم‌ها در برآورد جواب مسائل فوق در حالتهای مختلف (نرمال، وزن‌دار، وزن دار به همراه هزینه) پرداخته است.

7- Dominating set
8- Independent set
9- Maximal independent set
10- Minimum dominating set
11- q-neighbor p-center
12- P-center with minimum coverage
13- q-all coverage p-center
14- q-coverage p-center

فصل پنجم شامل مکان یابی مراکز در حالت خاص شبکه ها یعنی درختها و به خصوص حالت خاصی از درختها یعنی درختهای عنکبوتی می باشد. در این فصل مساله p- مرکز مطرح شده و سپس در مورد صحت الگوریتمهای مطرح شده در مورد درختهای عنکبوتی , بحث گردیده و پیچیدگی زمانی آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ششم به بررسی مساله p- مرکز و p- مرکز همبند روی درختهای عنکبوتی در حالتهای خاص می پردازد .

فصل اول

نمادها ، تعاریف ریاضي و تعریف مساله

1-1 تعاریف ریاضی و مرور ادبیات :

تعریف **1-1** : منظور از یک گراف[18] عبارت است از دوتایی به صورت $G=(V,E)$ که در آن $V=\{v_1,v_2,v_3,...v_n\}$ مجموعه ای متناهی که عناصر آن را راس[19] و مجموعه $E=\{e_1,e_2,e_3,...e_m\}$ به صورت زوج های $e_k=(v_i,v_j)$ که آنرا یال[20] می نامند. [1]

تعریف **2-1** : منظور از یک مسیر[21] در یک گراف عبارت است از دنباله ای متناهی و متناوب از رئوس و یالها بطوری که رئوس دو به دو متمایز باشند. مسیری از راس u به راس v را یک (v-u) مسیر گوئیم. [1]

تعریف **3-1** : یک مسیر که در آن راس ابتدایی و انتهایی یکسان باشد, دور[22] نامیده می شود. [1]

تعریف **4-1** : گرافی که بین هر دو گره آن یک مسیر وجود داشته باشد، گراف متصل یا همبند[۲۳] نامیده می‌شود . [1]

تعریف **5-1** : یک گراف متصل یا همبند که شامل حلقه نباشد، درخت[24] نامیده می شود. [1]

تعریف **6-1** : یک گراف متصل $G=(V,E)$ با مقدار نامنفی $\omega(v)$ (که وزن[25] گره $v\in V$ می‌باشد) و یک عدد مثبت L_e (که طول کمان $e\in E$ نامیده می شود) را یک شبکه[26] می نامند .

---

[۱۸]-Graph
[۱۹]-Vertex
[۲۰]-Edge
[۲۱]-Path
[۲۲]-Cycle
[۲۳]-Connected Graph
[۲۴]-Tree
[۲۵]- Weight

دراین شبکه، V مجموعه گره‌ها و E مجموعه کمان‌هاست و ما از این به بعد نماد $G = (V, E)$ را برای شبکه‌ای با مجموعه گره‌های V ومجموعه کمان های E بکار خواهیم برد. [1]

تعریف **1-7** : قطر یک درخت[27] ، حداکثر فاصله بین هر دو راس در درخت می‌باشد . [1]

تعریف **1-8** : یک مسیر در درخت T=(V,E) که طول آن مساوی قطر T باشد، یک مسیر قطری[28] در T نامیده می شود و با DP(T) نمایش داده می شود . [1]

از مهم‌ترین نکات طراحی یک الگوریتم، بحث پیچیدگی زمانی[29] یا زمان اجرای کامل الگوریتم می‌باشد. این زمان به تعداد عملیات ریاضی و منطقی موجود در الگوریتم‌ها وابستگی مستقیم دارد. به طور ساده پیچیدگی زمانی یک الگوریتم را می توان تعداد دفعات اجرای دستور اصلی (یا گروهی از دستورهای اصلی) به کار رفته در الگوریتم و نیز پیش پردازش‌های الگوریتم تعریف کرد.

تعریف **1-9** : برای یک تابع مفروض f(n) , O(f(n)) عبارتست از مجموعه همه توابع پیچیدگی مانند g(n) به طوری که یک عدد ثابت حقیقی مثبت C و یک عدد صحیح نامنفی N موجود باشد که

$$\forall n \geq N \quad , \quad g(n) \leq c.f(n) \tag{1-1}$$

در این صورت اگر $g(n) \in O(f(n))$ آن گاه گفته می شود g(n) از مرتبه اُی بزرگ f(n) است.[2]

[۲۶]- Network
[۲۷]- Diameter of tree
[۲۸]- Diameter path
[۲۹]- Complexity time

تعریف**1-10**: برای تابع پیچیدگی f(n) , (f(n)) Ω مجموعه همه توابع پیچیدگی مانند g(n) است که بـرای آن یک ثابت حقیقی مثبت C و یک عدد صحیح نامنفی N وجود داشته باشد که

$$\forall n \geq N \quad , \quad g(n) \geq c.f(n) \tag{2-1}$$

در این صورت اگر $g(n) \in \Omega(f(n))$ ،گفته می شود g(n) از مرتبه امگای بزرگ f(n) است . [2]

تعریف**1-11**: برای تابع پیچیدگی $f(n)$, $\theta(f(n))$ مجموعه همه توابع پیچیدگی مانند g(n) است که بـرای آن ثابتهای حقیقی ومثبت C, D و یک عدد صحیح نامنفی N وجود داشته باشد که

$$\forall n \geq N \qquad cf(n) \leq g(n) \leq Df(n) \tag{3-1}$$

یا به بیان دیگر $\theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$

در این صورت اگر $g(n) \in \theta(f(n))$ باشد می‌گوئیم g(n) از مرتبه تتای f(n) است . [2]

در ابتدا مفهوم مساله p- مرکز را به طور مختصر بیان می کنیم و در ادامه به بیان تعریف ریاضی مساله خـواهیم پرداخت .

2-1 تعریف مساله :

مفهوم کلی مساله p- مرکـز عبارتسـت از اسـتقرار بهینـه p مرکـز عرضـه (کـالا یـا خـدمات) در یـک جامعـه (مجموعه‌ای از مراکز تقاضا) به گونه‌ای که حداکثر فاصله (هزینه یا زمان) حمـل کـالا (خـدمات) از مراکـز عرضه به مراکز تقاضا حداقل گردد. به عبارت دیگر هدف، حداقل کردن حداکثر هزینه تامین تقاضا از مرکز

عرضه می باشد. در حالتی که مساله بر روی شبکه انجام گیرد (یعنی مراکز عرضه و تقاضا هر کدام گره هـایی از یک شبکه باشند) مساله عبارت خواهد بود از یافتن مکان p- مرکز عرضه روی یک شبکه به گونه‌ای که حـداکثر هزینه تامین تقاضا حداقل گردد.

تعریف**12-1** : فرض کنید ($G(V,E,\omega)$ یک گرافی با n رأس و m یال باشد. به طوری کـه بـه هـر یـال $e \in E$ یک فاصله مثبت $\omega(e)$ نسبت داده شده است . برای هر مجموعـه H کـه $H \subset V$ فاصـله میـان H و هـر رأس $v \notin H$ به صورت زیر تعریف می شود

$$d(v,H) = \min_{u \in H} \{d(v,u)\} \qquad (4\text{-}1)$$

به طوری که منظور از d(v,u) طول کوتاهترین مسیر از رأسv به راس u می باشد . [3]

تعریف**13-1** : فرض کنید ($G(V,E,\omega)$ با شـرایط مـذکور در تعریـف 12-1 باشـد . در ایـن صـورت بـرای هـر مجموعه H که $H \subset V$ است تعریف می کنیم

$$\delta(H) = \max_{v \in V-H} \{d(v,H)\} \qquad (5\text{-}1)$$

به طوری که اگر H=V باشد آن گاه $\delta(H) = 0$. [3]

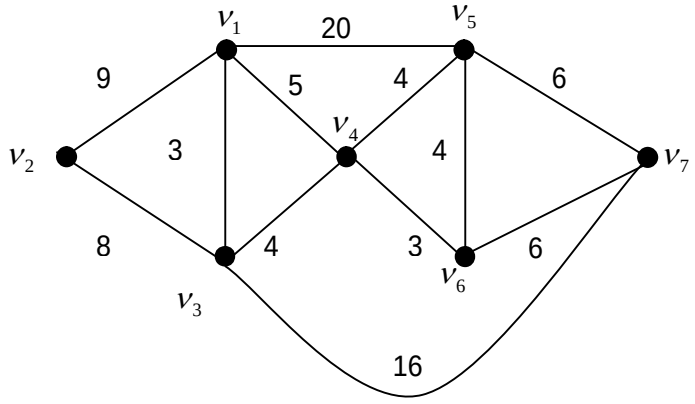
حال با توجه به تعاریف بالا، مساله p- مرکز به صورت زیر تعریف می‌شود :

تعریف**14-1** : گراف $G(V,E,\omega)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید p یک عدد صحیح و مثبت باشد بطوری که $P \le |V|$. مساله p- مرکز عبارتست از تعیین یک زیر مجموعه مانند $Q = \{q_1, q_2, ..., q_p\}$ از V به طوری که $\delta(Q)$ مینیمم شده باشد. یعنی

$$\delta(Q) = \max_{v \in V-Q} \{d(v,Q)\}$$

مینیمم شده باشد.[3]

حال به عنوان مثال گراف (1-1) را در نظر بگیرید . در حالتی که P=2 باشد ما به آسانی می‌فهمیم که $H = \{v_3, v_6\}$ یک 2- مرکز از این گراف می باشد به طوری که $\delta(Q)=8$ مینیمم شده است .



شکل (1- 1)

تعریف**15-1** : یک P– مرکزی که در بردارنده زیرگرافی همبند باشد را P– مرکز همبند[30] گوئیم .[3]

[۳۰] - Conncted p-center

با توجه به تعریف (1-12) بدیهی است که در یک p– مرکز همبند باید داشته باشیم $p \geq 2$ و

همچنین تعداد رئوس گراف G حداقل باید (p+1) باشد یعنی $n \geq p+1$

تعریف **1-16**: گراف $G(V,E,\omega)$ را در نظر بگیرید . فرض کنید که p یک عدد صحیح و مثبت به طوری که $p \geq 2$ باشد. مساله p– مرکز همبند عبارتست از تعیین یک p– مرکز همبندی به صورت $Q = \{q_1, q_2, ..., q_p\}$ از G به طوری که $\delta(Q)$ مینیمم شود.[3]

مجدداً شکل (1-1) را در نظر بگیرید. در حالتی که p=2 باشد ، $Q = \{v_3, v_4\}$ یک 2- مرکز همبند از گراف مذکور می باشد به طوری که $\delta(Q) = 9$ مینیمم شده است .

تعریف **1-17** : راس v را درگراف G=(V,E) یک نقطه انشعاب[31] گوئیم هرگاه درجه راسی v بزرگتر یا مساوی 3 باشد یعنی $d(v) \geq 3$. [4]

تعریف **1- 18** : منظور از گراف عنکبوتی[32] T = (V,E) , عبارت است از درختی که حداکثر یک نقطه انشعاب داشته باشد. یعنی حداکثر دارای یک راس ، با درجه راسی بزرگتر یا مساوی 3 باشد.[4]

تذکر : در صورتی که چنین راسی (راسی با درجه راسی بزرگتر یا مساوی 3) موجود باشد (که این چنین راسی درصورت وجود، منحصر به فرد است) آنرا با v^* نمایش می دهیم.

تعریف **1- 19** : در گراف عنکبوتی T=(V,E) , نقطه انشعاب یا همان v^* را به عنوان مرکز گراف تعریف می‌کنیم. [4]

۱۴ -Branch point
۱۵ -Spider graph

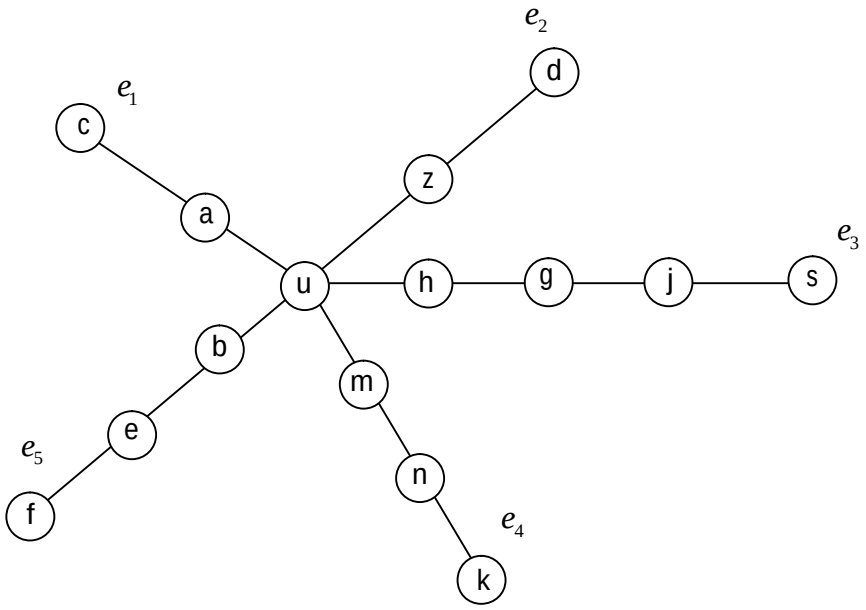
تعریف **1- 20** : به هر مسیری از نقطه انشعاب (v^*) به یک راس برگ درگراف عنکبوتی ، یک پا گوئیم.[4]

توجه : در واقع یک گراف عنکبوتی ، یک درختی است که حداکثر دارای یک نقطه انشعاب می‌باشد و یک درخت عنکبوتی که دارای نقطه انشعاب نمی‌باشد، به صورت یک مسیرخواهد بود. [4]

تعریف **1-21** : منظور از یک الگوریتم با ضریب تقریب[33] α برای یک مساله ماکزیمم یا مینیمم سازی با یک جواب بهینه مانند k عبارتست از الگوریتمی با پیچیدگی زمانی از مرتبه چند جمله ای که یک جوابی مانند S را برای مساله مذکور ارائه دهد به گونه ای که :

$S \geq \alpha k$ یا $S \leq \alpha k$ (6-1) [5]

به عنوان مثال ، گراف (2-1) یک گراف عنکبوتی می‌باشد به طوری که مرکز آن یا نقطه انشعاب آن رأس u بوده و دارای پنج پا می باشد .



شکل (1- 2)

۱۶ -Approximation factor

فصل دوم

مجموعه غالب و ارتباط آن با مساله

مساله p- مرکز