بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

واحد شیراز

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد" M.A "

رشته: ریاضی محض (گرایش آنالیز)

دانشکده:ریاضی

گروه علمی:علوم پایه

عنوان پایان نامه:

بردارهای دوری عملگرهای انتقال روی فضاهای باناخ خاص

استاد راهنما:

دکترصدیقه جاهدی

استاد مشاور:

دکتر بهمن یوسفی

نگارش:

ژاله شیرین‌نژاد

مهر 1387

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان:

بردارهای دوری عملگرهای انتقال روی فضاهای باناخ خاص

که توسط ژاله شیرین نژاد در مرکز شیراز تهیه و. به هئیت داوردان ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع: 1387/8/15 نمره: درجه ارزشیابی:

اعضای هیئت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضا
1- صدیقه جاهدی	استاد راهنما	استادیار	
2- بهمن یوسفی	استاد مشاور	استاد	
3- احمد خاکساری	استاد داور	استادیار	
4- عبدالرسول قرائتی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به:

مهربانی‌های پدر

و لبخندهای خسته مادر

که نماند تا شاهد شادمانی‌ام باشد.

و تقدیم به

همسر و دختر عزیزم

که صبورانه و دلسوزانه

یاریم دادند

تا تلاشم به انجام رسد.

سپاس گذاری:

با سپاس از اساتید محترم و بزرگوار جناب آقای دکتر بهمن یوسفی و سرکار خانم دکتر صدیقه جاهدی که با همکاری صمیمانه‌شان در این مسیر مرا قدم به قدم راهنمایی کردند.

چکیده

فرض کنیم $\{b(n)\}$ یـک دنبالـه از اعـداد مثبـت باشـد و $1 \le p < \infty$ مـا فضـای $L^p(b)$ از تمـام سریهای توانی $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n$ را با شـرط $\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^p|b(n)|^p<\infty$ بـه عنـوان فضـای $H^p(b)$ در نظر می گیریم.

این پایان نامه شامل چهار فصل است، فصل اول مقدمه است که در آن برخی از مفاهیم اولیـه و قضایایی را که در فصل های دیگر به آن نیاز خواهیم داشت ، بیان نموده ام.

در فصل دوم دوری اکید بودن $H_P^{\infty}(b)$ ، جبر بسته ضعیف تولید شده توسـط عملگـر ضـربی M_z ، کـه روی $H^p(b)$ عمل می کند رابررسی می کنیم و فضای ایده ال ماکسیمال، فضای دوگان و انعکاسی بودن جبر $H_P^{\infty}(b)$ را ارائه می کنیم. همچنین شرطهای لازم و کافی را برای اکیـدا دوری بـودن $H_P^{\infty}(b)$ بیـان خواهیم کرد.

در فصل سوم بعضی شرایط کافی را ارائه خواهیم کرد که تحت آن شرایط عملگـر انتقـال پسـرو روی فضای $L^p(b)$ دوری باشدونیز یک شرط لازم وکافی را برای آنکه یک چنـد جملـه‌ای در $L^p(b)$ دوری باشد، سپس کرانداری تابعک محاسبه‌گر نقطه‌ای را بر $L^p(b)$ بیان و مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در پایان در فصل چهارم ما دوری(دوری اکیـد) بـودن عملگرضـرب M_z را ، کـه روی فضـاهای هاردی وزن دار از سریهای لوران صوری عمل می کند بررسی خواهیم کرد.

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول

مقدمه

۱. ۱ آشنایی با برخی مفاهیم و قضایای اولیه

از آنجا که ستونهای محکم هر مبحث آنالیز تعاریف و قضایایی هستند که به آنهـا اسـتناد شـده یـا دقیقاً از آنها استفاده شده است، پیش از شروع بحث لازم است بعضی تعاریف و قضیه‌ها را کـه بـه طـور شاخص از آنها استفاده شده، یا در این پایان نامه نامی از آنها برده شده است را برای یـادآوری خواننـده ذکر نمائیم.

۱ .۱ .۱ فضای باناخ:

یک فضای نرمدار است که نسبت به متر تعریف شده به وسیله نرم تام می‌باشد، یعنی هر دنبالـه کشی در آن همگرا باشد.

بعنوان مثال می‌توان از فضاهای توابع پیوسته بر فضاهای فشرده، فضاهای L^p، فضاهای هیلبـرت، بعضـی از فضاهای مشتق‌پذیر، فضاهای نگاشتهای خطی پیوسته از یک فضای باناخ به دیگری و جبرهـای بانـاخ نام برد. اما فضاهای مهم دیگری نیز وجود دارند که در این چهارچوب نمی‌آیند.

برای مثال:

$C(\Omega)$: فضای تمام توابع مختلط پیوسته برمجموعه باز Ω در فضای اقلیدسی R^n

$H(\Omega)$: فضای تمام توابع تحلیلی بر مجموعه باز Ω در صفحه مختلط

C_K^∞: فضای تمام توابع مختلط بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بر R^n که در خارج از مجموعه فشرده ثابتی چون k با درون ناتهی صفرند.

این فضاها دارای توپولوژیهای طبیعی‌اند که از نرم القا نمی‌شوند [۵]

۱. ۱. ۲دوگان دوم یک فضای باناخ:

اگر X یک فضای باناخ باشد، و دوگان آن را با X^* نشان دهیم X^*، خود یک فضای باناخ است و لذا دوگان آن با X^{**} نموده می‌شود. هر $x \in X$، $f\,x \in X^{**}$ منحصر بفردی را با معادله

$$< x, x^* >=< x^*, f\,x > \qquad (x^* \in X^*) \qquad (1)$$

تعریف می‌کند و

$$\| f x \| = \| x \| \quad (x \in X) \qquad (۲)$$

از رابطه (۱) معلوم می‌شود که $f : X \to X^{**}$ خطی است، بنابر (۲)، f یک متر می‌باشد. حال چون X تام فرض شده است، $f(X)$ در X^{**} بسته می‌باشد. لذا f یک یکریختی یکمتر از X به روی یک زیر فضای بسته X^{**} می‌باشد.

۱. ۱. ۳ فضاهای انعکاسی:

با توجه به تعریف قبل، X را با $f(X)$ یکی می‌گیریم، در این صورت X زیر فضای X^{**} تلقی می‌شود. اعضای $f(X)$ درست آن تابعی های خطی بر X^{*} اند که نسبت به ضعیف*- توپولوژی آن پیوسته می‌باشند. چون نرم توپولوژی X^{*} قویتر است، ممکن است $f(X)$ یک زیر فضای حقیقی X^{**} باشد، اما فضاهای مهم زیادی مانند X هستند (مثلاً تمام فضاهای L^{P} با $1 < P < \infty$) که $f(X) = X^{**}$؛ این فضاها را انعکاسی گویند.

لازم است تأکید شود برای انعکاسی بودن X، وجود یک یکریختی یکمتر مانند f از X به روی X^{**} کافی نیست باید اتحاد (۱) بوسیله f برقرار باشد. [۱۳]

۱. ۱. ۴ جبر باناخ:

جبر مختلط یک فضای برداری مانند A بروی میدان مختلط C است که در آن یک ضرب تعریف شده است که در روابط

(1) $x(yz) = (xy)z$

(2) $x(y+z) = xy + xz$, $(x+y)z = xz + yz$

(3) $a(xy) = (ax)y = x(ay)$

به ازای هر z,y,x در A و هر اسکالر a صدق می‌کند.

هرگاه علاوه بر این A یک فضای باناخ نسبت به نرم صادق در نامساوی ضربی

(4) $\| xy \| \le \| x \| \ \| y \| \quad (x \in A, y \in A)$

بوده و A شامل عنصریکه e باشد بطوری که

(5) $xe = ex = x \quad (x \in A)$

و

$$\| e \| = 1 \quad (6)$$

آنگاه A یک جبر باناخ می‌باشد. [۵]

۱ . ۱. ۵تابع تحلیلی:

فرض کنیم تابع مختلط f در Ω تعریف شده باشد، اگر $z_0 \in \Omega$ و $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ موجود باشد، این حد را با $f'(z_0)$ نشان داده و آن را مشتق f در z_0 می‌نامیم. اگر $f'(z_0)$ به ازای هر $z_0 \in \Omega$ موجود باشد، گوئیم f هلوریخت (تحلیلی) در Ω است. رده تمام توابع هلوریخت در Ω را با $H(\Omega)$ نشان می‌دهیم. [۵]

۱. ۱. ۶عملگرهای انتقال و ضرب:

فرض کنیم x یک فضای برداری توپولوژیک باشد. برای هر $a \in x$ و هر اسکالر $l \neq 0$ عملگر انتقال T_a و عملگر ضرب M_l به وسیله فرمولهای

$$T_a(x) = a + x \ , \ M_l(x) = lx \ \ (x \in X)$$

تعریف می‌شوند. [۵]

۱. ۱. ۷فضای هیلبرت *(H)*:

فضای هیلبرت یک فضای متری تام نسبت به مترتولید شده توسط ضرب داخلی است. یعنی فضای برداری مختلطی که هر دنباله کشی در H در آن همگرا باشد. [۴]

۱. ۱. ۸ فضای جدایی‌پذیر:

یک فضا در صورتی جدایی پذیر است که شامل یک زیرمجموعه چگال شمارشپذیر باشد.

۱. ۱. ۹گسترش خطی بسته یک مجموعه:

اگر $A \subseteq H$ باشد، آنگاه اشتراک تمام زیرفضاهای خطی بسته از H که شامل A باشد را با نماد VA نمایش و آن را گسترش خطی A می‌نامیم. پس

$$VA = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k f_k ,\ n \geq 1,\ \ a_k \in F\ ,\ \ f_k , \in A \right\}$$

لذا گسترش خطی بسته مجموعه A کوچکترین زیرفضای خطی بسته شامل A از H است. [۴]

۱. ۱. ۱۰نامساوی هولدر:

فرض کنیم q و p نماهای مزدوج بوده و $1<P<\infty$ و X یک فضای اندازه با اندازه m باشد.فرض کنید g, f توابعی اندازه‌پذیر نامنفی باشند، در این صورت

$$\int_x fgdm \le \left\{\int_x f^P d_m\right\}^{1/p}\left\{\int_x g^q d_m\right\}^{1/q}$$

به این نامساوی، نامساوی هولدر گوئیم.

از طرفی اگر q,p نماهای مزدوج باشند، $1<P<\infty$ و $f\in L^P(m)$ و $g\in L^q(m)$، آنگاه

$fg\in L^1(m)$ و $\| fg\|_1 \le \| f\|_p \| g\|_q$

رابطه فوق نیز همان نامساوی هولدر است که بر $|f|,|g|$ اعمال شده است. [۶]

۱. ۱. ۱۱فضای ایده آل ماکسیمال:

گوئیم زیر مجموعه I از جبر مختلط تعویض پذیر A یک ایده آل است اگر

اولاً: I زیرفضای A (به مفهوم فضای برداری) بوده و ثانیاً: هر گاه $x\in A$ و $y\in I$ آنگاه $xy\in I$.

اگر $I\neq A$، I یک ایده آل حقیقی است.

ایده‌آلهای ماکسیمال، ایده آلهای حقیقی‌اند که در هیچ ایده‌آل حقیقی بزرگتر قرار ندارند, توجه کنید که یک ایده‌آل حقیقی شامل عنصر معکوس پذیر نیست.

۱. ۱. ۱۲توپولوژی ضعیف ستاره یک فضای دوگان:

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک با دوگان X^* باشد. هر $x\in X$ یک، تابعک خطی مانند f_x بر X^* القا می‌کند که با $f_x\Lambda=\Lambda x$ تعریف می‌شود و $\{f_x : x\in X\}$ نقاط X^*را جدا می‌سازد،خطی بودن هر f_x واضح است.

هر گاه به ازای هر $x\in X$، $f_x\Lambda = f_x\Lambda'$ ، آنگاه به ازای هر x، $\Lambda x=\Lambda' x$، در نتیجه، بنا به تعریف تساوی دو تابع، $\Lambda=\Lambda'$.

۱ . ۱. ۱۳جبر نیم ساده:

فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض پذیر باشد. اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکسیمال A را رادیکال A می‌نامیم و با $rad\, A$ نشان میدهیم.

اگر $radA=\{0\}$ آنگاه A یک جبر نیم ساده نام دارد.

۱. ۱. ۱۴طیف:

اگر T یک عملگر کراندار باشد، طیف $s(T)$ مجموعه تمام اسکالرهای l است به طوری که $T-lI$ معکوس پذیر نباشد. لذا $l \in s(T)$ اگر و فقط اگر دست کم یکی از دو حکم زیر درست باشد:

یک) برد $T - l I$ تمام X نباشد

دو) $T - l I$ یک به یک نباشد.

۱ . ۱. ۱۵قضیهٔ ریس (F.Riesz)

قضیه: فرض کنیم X یک فضای هاسدروف به طور موضعی فشرده بوده و Λ یک تابعی خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد. در این صورت یک s - جبر مانند m در X هست که شامل تمام مجموعه‌های بورل در X می‌باشد و یک اندازهٔ مثبت منحصر بفرد مانند m بر m هست که Λ را به مفهوم زیر نمایش میدهد:

آ) به ازای هر $f \in C_c(x)$ ، $\Lambda f = \int f dm$

و دارای خواص دیگر نیز می‌باشد:

ب) به ازای هر مجموعه فشرده $k \subset X$ ، $m(k)<\infty$؛

پ) به ازای هر $E \in m$ داریم

$$m(E) = \inf\{m(n):\ E \subset n,\ n \text{ باز}\};$$

ت) رابطه

$$m(E)=\sup\{m(k): K \subset E,\ K \text{ فشرده}\}$$

به ازای هر مجموع باز E و هر $E \in m$ که $m(E)<\infty$ برقرار است.

ث) هر گاه $E \in m$ ، $A \subset E$ ، $m(E)=0$، آنگاه $A \in m$.

به عبارت ساده تر داریم:

قضیهٔ نمایش ریس *[1]*:

اگر X یک فضای فشرده موضعی و $m \in M(X)$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$F_m : C_0(X) \to F$

$F_m(f) = \int f dm$

پس $F_m \in C_0(X)^*$ و نگاشت $m \to F_m$ یک ایزومورفیسم ایزومتریک از $M(X)$ به توی $C_0(X)^*$ می‌باشد که در آن $M(X)$ نشان دهندهٔ فضای تمام اندازه‌های بورل مثبت F- اندازه روی X با نرم متغیر می‌باشد.

۱. ۱. ۱۶قضیهٔ هان باناخ [۴]

هر گاه M زیر فضایی از فضای خطی نرمدار X بوده و f یک تابعی خطی کراندار بر M باشد، آنگـاه f را می‌توان به یک تابعی خطی کراندار مانند F بر X طوری توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.

توجه کنید که لازم نیستM بسته باشد.

۱. ۱. ۱۷قضیه استون وایرشتراس [۱]

اگر X یک فضای فشرده و A یک زیر جبر بسته از $C(X)$ باشد به گونه‌ای که:

الف) $1 \in A$

ب) به ازای $x, y \in A$ ، $x \neq y$ ، یک f در A باشد که $f(x) \neq f(y)$

پ) اگر $f \in A$ ، آنگاه $\overline{f} \in A$،

در این صورت $A = C(x)$

۱. ۱. ۱۸قضیه نگاشت باز [۱]

اگر Y,X فضاهای باناخ باشند و $A: X \to Y$ یک نگاشت پوشای خطی پیوسته باشد پس هر گاه G در X باز باشد، $A(G)$ نیز در Y باز خواهد بود.

فصل دوم

فضاهای هاردی وزن‌دار و بعضی عملگرها

۲ . ۱ فضاهای هاردی وزن دار $(L^P(b), l^P(b), H^P(b))$

۲ . ۱ . ۱ تعریف:

فرض کنیم $\{b(n)\}$ یک دنباله از اعداد مثبت با شرطهای $1 \le P < \infty, b(0) = 1$ باشد ، ما فضای دنبالههای $f = \{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ را به گونهای در نظر میگیریم که:

$$\| f \|^p = \| f \|_b^p = \sum_{n=0}^{\infty} | \hat{f}(n) |^p b(n)^p < \infty .$$

توجه کنیدکه نمایش صوری $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ به ازای هر مقدارz ، چه سریها همگرا باشند یا نباشند، بکار میرود. فضای تمام سریهای توانی صوری با نماد $H^P(b)$ نشان داده میشود و آن را فضاهای هاردی وزندار مینامند.

به عبارت دیگر

$$H^P(b) = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n, \| f \|_b < \infty \right\}$$

لازم به ذکر است که اگر $n \in Z$، به این فضا، فضای هاردی وزندار از سریهای لوران صوری، اطلاق میشود و آن را با نماد $L^P(b)$ نشان میدهند.

$$L^P(b) = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) z^n, \| f \|_p < \infty \right\}$$

اینها فضاهای باناخ انعکاسی با نرم $\|.\|_b$ هستند.*[۲]*

حال ضرب سریهای توانی صوری را در نظر بگیرید که به صورت زیر داده شده است:

$$fg = h \ ; \ \mathrm{f, g} \in \mathrm{H}^p(b)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) Z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) Z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}(n) Z^n$$

$$\hat{h}(n) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \hat{g}(n-k)$$

جاییکه $n = 0,1,2,...$

$$SUP \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{b(n)}{b(i) b(n-i)} \right|^q < \infty$$

اگر $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$

و چون

$$SUP\sum_{i=1}^{n}\left|b(n)\right|^{q}.\left|\frac{1}{b(i)\,b(n-i)}\right|^{q} \le \sup\sum_{i=1}^{n}\left|b(n)\right|.\frac{1}{\left|b(i)\right|^{q}}\ \sup\sum_{i-1}^{n}\frac{1}{\left|b(n-i)\right|}$$

پس خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{n}\hat{f}(n)\hat{g}(n-k)z^{n} \le (\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^{n}).(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}(n)z^{n})$$

پس فضای شامل این توابع یعنی $H^{p}(b)$ یک جبر باناخ است.

۲ .۱ .۲ دوگان فضای $H^{p}(b)$:

دوگان $H^{p}(b)$ عبارت است از $H^{q}(b^{p/q})$ جایی‌که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$b^{p/q}=\{b(n)^{p/q}\}_{n}$ [۹]

همچنین اگر

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}(n)z^{n}\in H^{q}(b^{p/q})$$

پس:

$$\left\|g\right\|^{q}=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{g}(n)\right|^{q}b(n)^{p}$$

۲ .۱ .۳ مثال:

در صورتی که $P=۲$ و

$$b(n)=(n+1)^{1/2} \text{ و } b(n)=(n+1)^{-1/2}, b(n)=1$$

باشد بترتیب فضاهای هاردی, برگمن و دیریکله را خواهیم داشت.

در حقیقت بازای $p=2$, $b(n)=1$ داریم:

$$\left\|f\right\|^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{2}<\infty$$

و در صورتیکه $p=2$, $b(n)=(n+1)^{-1/2}$ باشد فضای برگمن همراه بانرم:

$$\left\|f\right\|^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{2}.(\frac{1}{\sqrt{n+1}})^{2}<\infty$$

حاصل می شود.

لذا در صورتیکه در $H^{2}(b)$ داشته باشیم $b(n)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ باز هم یک فضای باناخ انعکاسی داریم و بازای یک عضو g از این فضا:

$$\| g \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{g}(n)|^2}{(\sqrt{1+n})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{g}(n)|^2}{1+n}$$

فضای $H^2(b)$ با شرط $b(n)=\sqrt{1+n}$ فضای دیریکله است و همانند فضاهای برگمن و هـاردی یـک فضای باناخ انعکاسی است و داریم:

$$\| g \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2 . (\sqrt{1+n})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n). \left|\hat{g}(n)\right|^2$$

۲ . ۱ . ۴- $H^p(b)$ شامل توابع تحلیلی روی قرص باز یکه U می‌باشد.

اگر $\lim b(n+1)/b(n) = 1$ باشد، آنگاه فضای $H^p(b)$ عبارت از توابع تحلیلی روی قرص یکـه باز U است.

به عبارت دیگر در صورتیکه شرطهای فوق برقرار باشد $H^p(b)$ متشکل از توابعی است که روی قرص یکه باز U تحلیلی‌اند.

برای مثال اگر شرطهای فوق را برای فضای هاردی بررسی کنیم می‌بینیم که:

$$\lim_n \frac{b(n+1)}{b(n)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (آزمون نسبت)}$$

و در صورتیکه برای فضای برگمن بررسی کنیم:

$$b(n) = (1+n)^{-1/2} \Rightarrow \lim_n \frac{b(n+1)}{b(n)} = \lim_n \frac{(2+n)^{-1/2}}{(1+n)^{-1/2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 1$$

و در مورد فضای دیریکله داریم:

$$b(n) = (1+n)^{1/2} \Rightarrow \lim_n \frac{b(n+1)}{b(n)} = \lim_n \frac{(2+n)^{1/2}}{(1+n)^{1/2}} = 1$$

هرگاه $f \in H^p(b)$, $g \in H^p(b)^*$, $g(f)$ را با <f,g> نشان دهیم.

توجه کنید که:

$$< f, g > = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\, \overline{\hat{g}(n)}\, b(n)^p$$

۲ . ۱ . ۵ دوگان فضای $L^p(b)$

همانطور که در مرجع [۹] آمده است دوگان $L^p(b)$ را چنین معرفی می‌کنیم:

$$(L^p(b))^* = L^q(b^{p/q})$$

که در آن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, همچنین اگر

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)z^{n}\in L^{p}(b)$$

,

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{g}(n)z^{n}\in L^{q}(b^{\,p/q})$$

پس واضح است که:

$$<f,g>=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\;\overline{\hat{g}(n)}\;\;b(n)^{p}$$

در اینجا برای سادگی مطلب از $\|g\|_q$ بجای $\|g\|_{L^q(b^{p/q})}$ استفاده می کنیم:

$$\|g\|_q^q=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{g}(n)\right|^q(b(n)^{p/q})^q=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{g}(n)\right|^q b(n)^p$$

توجه کنید که اگر $1<p<\infty$, $L^p(b)\cong L^p(m)$ که m اندازه d متناهی تعریف شده روی اعداد صحیح مثبت بوسیله $m(k)=\sum_{n\in k}(b(n)^p$ باشد که در آن $K\subseteq N\cup\{0\}$ که آنگاه بازای $1<p<\infty$, $l^p(b)\cong L^p(b)$.

بنابراین $L^p(b)$ نیز یک فضای باناخ انعکاسی است, درلم زیر دوگان فضاهای $\mathbf{l}^p(b)$ را مشخص می‌کنیم.

۱ .۲ .۶ - لم : برای $1<p<\infty$ ، دوگان $\mathbf{l}^p(b)$ عبارتست از $\mathbf{l}^q(b^{\,p/q})$ جایی که

$$b^{\,p/q}=\{(b(n)\}_n^{p/q},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

اثبات: فرض کنید m اندازهٔ تعریف شده بوسیله $m(k)=\sum_{n\in k}(b(n))^p$ باشد و $K\subseteq N\cup\{\mathbf{0}\}$ پس $L^q(m)\cong L^q(b^{\,p/q}),L^p(m)\cong L^p(b)$ بنابراین بروشنی می‌بینیم که $(L^p(b))^*=L^q(b^{\,p/q})$.

۲ . ۲ تبدیل خطی(عملگر) ضرب M_Z روی $L^p(b),H^p(b)$

فرض کنید $\hat{\mathrm{f}}_k(n)=d_{nk}$ یعنی $\hat{f}_k(n)=\begin{cases}1 & n=k\\ \mathbf{0} & n\neq k\end{cases}$ و $f_k(z)=z^k$ باشد آنگاه $\{f_k\}_k$ یک پایه است به گونه‌ایکه $\left\|f_k\right\|=\left|b(k)\right|$.

حال عملگر ضربی بوسیله z یعنی M_Z را روی فضای $L^p(b)$$(H^p(b))$به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(M_z f)(z)=\sum_{n=\mathbf{0}}^{\infty}\hat{f}(n)z^{n+1}=zf(z)$$

بنابراین طبق تعریف سریهای توانی صوری داریم:

$$(M_z f)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(M_z f)^{\wedge}(n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^{n+1}$$

بروشنی می‌بینیم که عملگر M_z پایه $\{f_k\}_k$ را منتقل می‌کند. عملگر M_z کراندار است اگر و فقط اگر $\left\{\frac{b(k+1)}{b(k)}\right\}_k$ کراندار باشد زیرا:

اگر قرار دهیم $e_k=f_k/b(k)$، آنگاه $\|e_k\|=1$ در ضمن به ازای هر n داریم:

$$M_z f_n=f_{n+1}\Rightarrow \hat{M}_z\frac{f_n}{b(n)}=\frac{f_{n+1}}{b(n)}\Rightarrow$$

$$M_z\frac{f_n}{b(n)}=\frac{b(n+1)}{b(n+1)}\cdot\frac{f_{n+1}}{b(n)}=\frac{b(n+1)}{b(n)}\cdot\frac{f_{n+1}}{b(n+1)}=\frac{b(n+1)}{b(n)}e_{n+1}$$

حال بنا بر قضیه (۴۰۶) از مرجع [۱] داریم:

۲ . ۲ . ۱ قضیه: فرض کنید H یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با پایه $\{e_n\}$ باشد. بازای $\{a_n\}\subseteq F$ قرار دهید:

$$M=Sup\{|a_n|:n\geq 1\}<\infty$$

اگر برای هر n، $A(e_n)=a_n e_n$، آنگاه A بطور خطی به یک عملگر کراندار روی H با شرط $\|A\|=M$ گسترش می‌یابد. عملگر A فشرده است اگر و فقط اگر: $a_n\to 0$ هر گاه $n\to\infty$.

با توجه به قضیه فوق و از آنجائیکه M_z در شرایط عملگر A صدق می‌کند و با در نظر گرفتن پایه $\left\{e_n=\frac{f_n}{b(n)}\right\}$ و نیز جایگزینی $a_n=\frac{b(n+1)}{b(n)}$ داریم:

$$\|M_z\|=SUP\left\{\left|\frac{b(n+1)}{b(n)}\right|:n\geq 1\right\}<\infty.$$

از بحث فوق می‌توان دریافت که:

عملگر M_z کراندار است اگر و فقط اگر $\left\{b(k+1)\big/b(k)\right\}_k$ کراندار باشد، و در این حالت:

از آنجائیکه $M_z^n f_k=f_{k+n}$، پس $M_z^n e_k=\frac{b(k+n)}{b(k)}e_{k+n}$. حال مشابه قسمت قبل می‌توان دید که

$$\|M_z^n\|=\underset{k}{SUP}\left|b(k+n)\big/b(k)\right|\ ,n=0,1,2,\ldots..$$

۲ . ۲ . ۲ لم: اگر $f\in L^p(b)$, $p(z)$ یک چند جمله‌ای باشد، پس بردار $P(M_z)f$ با سریهای توانی $P(z)\,f(z)$ مطابقت دارد. یعنی:

$$P(M_z)f(z)=p(z)\ f(z)\ .$$