دانشگاه الزهرا (س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک گرایش ذرات بنیادی

عنوان

مدل تیرینگ به عنوان مدلی برای مسئله بوزونی شدن ذرات

استاد راهنما

دکتر کامران کاویانی

استاد مشاور

دکتر محمود رضا روحانی

دانشجو

زینب نجفی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

این پایان نامه ابتدا به معرفی مدل‌های دو بعدی (یک بعد فضایی و یک بعد زمانی) و انتگرال‌پذیر تیرینگ و ساین گوردون می‌پردازد و سپس جواب‌های دقیق آن‌ها را در حد کلاسیک بدست می-آورد. همچنین با بازبهنجارش مدل ساین گوردون و محاسبه انرژی حالت پایه آن به بررسی ویژگی-های این مدل می‌پردازد. آنگاه با استفاده از ویژگی‌های میدان‌های اسکالر و فرمیونی آزاد دو بعدی به اثبات معادل بودن مدل تیرینگ جرم‌دار و مدل ساین گوردون می‌پردازد (بوزونی شدن). این اثبات با دو روش اپراتوری و روش انتگرال مسیر انجام شده است. و در پایان برخی از دلایل اهمیت بوزونی شدن و کاربردهای آن مطرح شده است.

فهرست

فصل سوم :

هم‌ارزی مدل تیرینگ جرم‌دار و مدل ساین گوردون (بوزونی شدن)

فصل چهارم :

کاربرد بوزونی شدن، دلایل و اهمیت آن

ویژگی‌های میدان‌های آزاد فرمیونی و بوزونی در دو بعد و نتایج آن

مقدمه

نظریه‌های میدان در دو بعد ویژگی‌های بسیار جالبی را از خود نشان می‌دهند که مشابهی در ابعاد بالاتر ندارد. [1] یکی از آن‌ها قابلیت حل دقیق برخی از مدل‌ها در دو بعد است که منجر به یافتن راه حل‌هایی غیر اختلالی برای محاسبه ماتریس S حتی در ابعاد بالاتر می‌شود و ما را برای پیدا کردن روش‌هایی جدید برای رویارویی با سیستم‌های برهم‌کنش‌دار ترغیب می‌کند. منظور از حل دقیق آن است که می‌توان هر تابع همبستگی از فرمیون‌ها را بطور صریح محاسبه کرد[2]. در اینجا ما دو مدل از این نوع را معرفی کرده‌ایم، مدل ساین گوردون که یک نظریه بوزونی است و مدل تیرینگ که یک نظریه فرمیونی است. یکی از مهمترین خواصی که در یک بعد فضایی وجود دارد آن است که دوران وجود ندارد لذا اندازه حرکت زاویه‌ای هم وجود نخواهد داشت و این منجر به امکان وجود روابط معادلی بین میدان‌های اسکالر و میدان‌هایی مانند اسپینورها و بردارها و... می-شود[3]. به بیان دیگر می‌توان گفت در دو بعد گروه دوران آبلی است و اسپین یک پارامتر پیوسته است. به همین دلیل امکان معادل بودن بین نظریه فرمیونی و بوزونی وجود دارد[1]. در واقع تمام این مسایل مربوط به این موضوع می‌شود که (همان‌طور که در فصل اول هم خواهیم دید (روابط(1-6) و (1-12))) در دو بعد فضا زمانی جریان برداری فرمیونی و جریان شبه برداری آن از یکدیگر مستقل نیستند، بنابراین ما می‌توانیم ویژگی جریان شبه برداری را با استفاده از نتایجی که برای جریان برداری بدست می‌آید نتیجه بگیریم. به این امکان، بوزونی شدن می‌گویند.کاری که تکنیک بوزونی شدن انجام می‌دهد ساختن یک میدان از روی اسکالرهاست که از آمار فرمی دیراک پیروی می‌کند[3]. می‌توان گفت که چون در یک بعد فضایی ذره و ضدذره از هم جدا نمی‌شوند

بنابراین قابل قیاس با یک درجه آزادی بوزونی هستند[4]. کلمن و مندل‌اشتام نخستین کسانی بودند که در فیزیک نظری مفهوم بوزونی شدن را مطرح کردند و امروزه به قوانینی که آن‌ها برای آن بدست آوردند "قوانین بوزونی شدن آبلی" می‌گویند. بعداً فهمیدند که این قوانین برای نظریه-هایی که دارای درجه‌ی آزادی رنگ و یا طعم هستند مانند QCD دو بعدی مناسب نیست. این موضوع توسط ویتن مطرح شد و به شیوه او "بوزونی شدن غیر آبلی " می‌گویند[3]. ما در فصل سوم با اثبات معادل بودن مدل تیرینگ جرم‌دار و مدل ساین گوردون در دو بعد فضا زمانی تکنیک بوزونی شدن را توضیح داده‌ایم.

درک رفتار الکترون‌هایی که به طور قوی به یکدیگر همبستگی دارند یکی از مسائل فیزیک ماده چگال است. در بعضی شرایط، مثلاً رفتار الکترون‌ها در فلزات در دو بعد فضایی و یا بیشتر به وسیله‌ی " نظریه مایع فرمی –لانداو" کاملاً بدست می‌آید. اما وضعیت‌هایی در یک بعد فضایی وجود دارد که رفتاری کاملاً متفاوت دارند[5]، بنابراین نظریه مایع لوتینگر مطرح می‌شود که توصیف کننده الکترون‌های برهم‌کنش کننده در یک رسانای یک بعدی مانند سیم‌های کوانتمی ازجمله نانو تیوب‌های کربنی است. این مدل نشان می‌دهد که تحت قیود معین، برهم‌کنش مرتبه دوم بین الکترون‌ها می‌تواند به صورت برهم‌کنش بوزونی در نظر گرفته شود[6]. این موضوع همان کاربرد بوزونی شدن در فیزیک ماده چگال است که در فصل پایانی مورد بحث قرارگرفته است.

فصل اول

مدل تیرینگ وحل‌پذیری آن

آشنایی با مدل تیرینگ

تئوری میدان دیراک (بدون جرم) با برهم‌کنش جریان – جریان اولین بار توسط تیرینگ[1] معرفی شد، او نشان داد این مدل دو بعدی که خود برهم‌کنش میدان دیراک را توصیف می‌کند دقیقاً قابل حل است، به عبارت دیگر به‌صورت غیر اختلالی می‌توان ویژه حالت‌ها و ویژه مقادیر هامیلتونی را بدست آورد.

پس از آن گلاسر[2] معادله میدان را بر حسب میدان دیراک آزاد بدون جرم حل کرد و یک جواب اپراتوری بدست آورد.

سپس جانسون[3]، این مدل را با توجه به تعریف حاصلضرب‌های میدان در یک نقطه از فضا زمان که در تعریف جریان و معادلات میدان ظاهر می‌شوند، دوباره در نظر گرفت و با حل کردن سیستمی از معادلات برای توابع مرتب زمانی، توابع گرین دو نقطه‌ای و چهار نقطه‌ای را به دست آورد.

با تعریف جانسون، اسکارف و وس[4] جواب‌های اپراتوری را پیدا کردند.

نهایتاً کلیبر[5] یک جواب اپراتوری کامل از این مدل را در یک فضای هیلبرت خوش تعریف، ساخت او خانواده‌ای از جواب‌های دو پارامتری برای مدل تیرینگ بدون جرم پیدا کرد. [7]

لاگرانژین این مدل، در فضای مینکوفسکی به صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}\,\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x) \qquad (1\text{-}1)$$

میدان $\psi(x)$ یک میدان اسپینوری دو مولفه‌ای است و x یک دو بردار است:

$$x = (x^0, x^1)$$

[1] W. E. Thirring
[2] V. J . Glaser
[3] K. Johnson
[4] F. Scarf , J. Wess
[5] B. Klaiber

x^0 مولفه زمانی و x^1 مولفه مکانی است. g ثابت جفت‌شدگی و یک پارامتر آزاد بدون بعد است زیرا از نظر ابعادی بعد لاگرانژین در دو بعد m^2 یا عکس طول به توان دو است، لذا بعد $\psi(x)$ ، $m^{1/2}$ است و همین دلیل بازبهنجارش‌پذیر بودن مدل تیرینگ نیز هست.

ماتریس‌های γ_μ که در این بخش از آن استفاده شده است در فضای مینکوفسکی دو بعدی به صورت زیر است:

$$\gamma^0=\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \gamma^1=-i\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma^5=\gamma^0\gamma^1=\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1-2}$$

منظوراز σ_3 و σ_2 و σ_1 سیگماهای پاولی هستند.

همچنین ماتریس‌های γ_μ از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\gamma^\mu\gamma^\upsilon+\gamma^\upsilon\gamma^\mu=2g^{\mu\upsilon} \tag{1-3}$$

$$\gamma^\mu\gamma^5+\gamma^5\gamma^\mu=0 \tag{1-4}$$

$$g^{00}=-g^{11}=1 \quad , \quad g^{10}=g^{01}=0 \tag{1-5}$$

و حاصلضرب شبه برداری $\gamma^\mu\gamma^5$ برحسب γ^υ به صورت زیر است:

$$\gamma^\mu\gamma^5=-\epsilon^{\mu\upsilon}\gamma_\upsilon \tag{1-6}$$

که در آن $\epsilon^{\mu\upsilon}$ تانسور پاد متقارن است:

$$\epsilon^{01}=-\epsilon^{10}=1 \qquad \epsilon^{11}=\epsilon^{00}=0 \tag{1-7}$$

و همین‌طور رابطه‌ی زیر نیز برقرار است:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\upsilon} = g^{\mu\upsilon} + \epsilon^{\mu\upsilon}\gamma^{5} \tag{1-8}$$

منظور از لاگرانژین مدل تیرینگ بدون جرم کلاسیک، لاگرانژی‌ای است که در آن میدان ψ عملگر نیست. این لاگرانژی تحت تبدیلات گروه کایرال $U_A(1) \times U_V(1)$ که در زیر آمده است ناوردا می‌ماند:

$$\psi(x) \xrightarrow{V} \acute{\psi}(x) = e^{i\,\alpha_V}\psi(x) \tag{1-9}$$

$$\psi(x) \xrightarrow{A} \acute{\psi}(x) = e^{i\,\alpha_A\,\gamma_5}\psi(x)$$

با توجه به ناوردایی تحت گروه مذکور، جریان برداری و شبه برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$j^{\mu} = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$$
$$j_5^{\mu} = \bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\gamma^{5}\,(x) \tag{1-10}$$

که در آن $\overline{\psi}(x)$ چنین تعریف می‌شود:

$$\bar{\psi}(x) = \gamma^{0}\psi^{\dagger}(x)$$

به راحتی می‌توان دید که این جریان‌ها پایسته می‌مانند یعنی:

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \tag{1-11}$$
$$\partial_{\mu}\, j_5^{\mu} = 0$$

نکته‌ی جالب آن است که در نظریه میدان ۱+۱ بعدی، جریان برداری و شبه برداری به خاطر خواص ماتریس‌های دیراک به صورت زیر به هم مربوطند:[2]

$$j_5^{\mu}(x) = -\epsilon^{\,\mu\upsilon} j_{\upsilon}(x) \tag{1-12}$$

در مدل بدون جرم این امکان وجود دارد که چگالی ویژه‌ای به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\sigma_{\pm} = \bar{\psi}\,(x)(1 \pm \gamma_5)\,\psi\,(x) \tag{1-13}$$

در این صورت هامیلتونین مدل تیرینگ جرم‌دار را که با اضافه کردن جمله جرمی به چگالی هامیلتونین $\mathcal{H}$ مدل بدون جرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} + \mathrm{M} \tag{1-14}$$

را می‌توان برحسب $\sigma_{\pm}$ نوشت. در حقیقت می‌توان نشان داد که جمله جرمی M برابر است با:

$$M = \frac{1}{2}\,\acute{m}\,(\sigma_{-} + \sigma_{+}) \tag{1-15}$$

در اینجا $\acute{m}$ تنها یک پارامتر حقیقی است و آن را به عنوان جرم حالت تک ذره‌ای معرفی نمی‌کنیم. المان‌های ماتریس M برای هر یک از حالت‌های مدل تیرینگ بدون جرم، موجوداتی خوش تعریف هستند و این المان‌های ماتریسی برای تعریف مدل جرم‌دار کافی هستند. در فصل سوم (صفحه ۳۹) خواهیم دید که ما برای اثبات هم‌ارزی مدل تیرینگ جرم‌دار و مدل ساین گوردون (در فصل بعد با این مدل آشنا خواهیم شد) المان‌های ماتریس M را بین حالت‌های دلخواه بررسی نمی‌کنیم بلکه فقط برای حالت‌هایی که از اعمال حاصلضرب‌های $\sigma_{\pm}$ روی حالت خلأ بدست می‌آیند محاسبه می‌کنیم، که این دسته از حالت‌ها از ویژه حالت‌هایی هستند که بین هامیلتونین مدل جرم‌دار و بی‌جرم مشترک هستند.

مروری بر حل‌پذیری دقیق مدل تیرینگ

مدل تیرینگ بدون جرم

مدل تیرینگ بی‌جرم به طور دقیق قابل حل است بطوریکه تمام توابع همبستگی آن قابل محاسبه است. در این بخش با پیروی از کلیبر حل معادله حرکت تیرینگ بدون جرم را در نظریه میدان‌های کلاسیک یعنی هنگامی که میدان‌ها عملگر نیستند انجام خواهیم داد و در حالت کوانتمی تنها به ذکر جواب اکتفا خواهیم کرد و بدین ترتیب نشان می‌دهیم که مدل تیرینگ بدون جرم را می‌توان به نظریه میدان کوانتمی میدان فرمیونی آزاد بدون جرم تقلیل داد و بنابراین این مدل به طور غیر اختلالی قابل حل است. همان‌طور که اشاره شد کلیبر پروسه‌ای را برای محاسبه‌ی توابع همبستگی در مدل تیرینگ بی‌جرم با استفاده از تکنیک اپراتورهای کانونیک پیشنهاد داد. فرمالیزم او برای یافتن جواب‌های این مدل با آنالیز معادله حرکت برای میدان فرمیونی تیرینگ بی‌جرم شروع می-شود و بنابراین با معادله حرکت کلاسیک و معادلات پایستگی شروع می‌کنیم:

$$\mathrm{i}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\,\psi\,(x) = g\,j^{\mu}(x)\gamma_{\mu}\,\psi\,(x) \qquad (1\text{-}16)$$

حال اگر از رابطه‌ی(1-12) مشتق بگیریم چون $\epsilon^{\mu\upsilon}$ یک تانسور پاد متقارن است لذا داریم:

$$\partial_{\mu}\,j_{5}^{\mu} = \epsilon^{\mu\upsilon} j_{\upsilon} = 0$$

بنابراین کلیبر بیان می‌کند که می‌توان جریان‌های برداری و شبه برداری را به صورت زیر نوشت:

$$j_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_{\mu}\,j(x) \qquad , \qquad j_{5\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_{\mu}\,j_{5}(x) \qquad (1\text{-}17)$$

که در آن $j(x)$ و $j_5(x)$ به ترتیب چگالی جریان اسکالر و چگالی جریان شبه اسکالر است. بنابراین او با توجه به متناسب بودن جریان برداری فرمیونی با گرادیان چگالی اسکالر و همچنین متناسب بودن جریان شبه برداری $j_{5\mu}$ با یک گرادیان چگالی شبه اسکالر پیشنهاد داد که یک میدان فرمیونی جدید $\Psi(x)$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Psi(x)=e^{i\,g\frac{j(x)}{\sqrt{\pi}}}\,\psi(x) \qquad (1\text{-}18)$$

که در این صورت جریان‌های برداری و شبه برداری Ψ جدید آن به صورت زیر خواهد بود:

$$J^{\mu}(x)=\bar{\Psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\Psi(x) \qquad , \qquad J_5^{\mu}(x)=\bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\,\gamma^{5}\,\Psi(x) \qquad (1\text{-}19)$$

همچنین چگالی‌های اسکالر $J(x)$ و شبه اسکالر $J_5(x)$ هم مشابه رابطه‌ی (1-17) به صورت زیر به $J^{\mu}(x)$ و $J_5^{\mu}(x)$ مربوط هستند:

$$J_{\mu}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_{\mu}J(x) \qquad , \qquad J_{5\mu}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_{\mu}\,J_5(x) \qquad (1\text{-}20)$$

با این پیشنهاد کلیبر می‌توان دید که برای برقرار بودن روابط (1-17) و (1-20) باید این میدان فرمیونی جدید و جریان‌های بدست آمده از آن روابط زیر را ارضا کنند.

$$J^{\mu}(x)=j^{\mu}(x) \qquad , \qquad J_5^{\mu}(x)=j_5^{\mu}(x) \qquad (1\text{-}21)$$

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x)=\;0 \qquad (1\text{-}22)$$

که در آن $j_5^\mu(x)$ و $j^\mu(x)$ همان جریان‌های برداری و شبه برداری رابطه‌ی (1-17) هستند. برای بررسی صحت معادله حرکت جدید کافی است $\Psi(x)$ را از رابطه‌ی (1-18) در این معادله جایگذاری کنیم خواهیم دید که معادله حرکت تیرینگ بدون جرم بدست خواهد آمد. بنابراین جواب عمومی معادله‌ی (1-16) عبارت است از

$$\psi(x) = e^{-i\, g\frac{J(x)}{\sqrt{\pi}}}\, \Psi(x) \tag{1-23}$$

که $\Psi(x)$ طبق (1-22) از معادله حرکت میدان آزاد پیروی می‌کند.

با توجه به رابطه‌ای که در دو بعد فضا زمانی بین جریان برداری و شبه برداری برقرار است یعنی

$$J_5^\mu(x) = -\epsilon^{\,\mu\upsilon} J_\upsilon(x) \tag{1-24}$$

کلیبر ادعا کرد که جواب (1-23) می‌تواند تعمیم داده شود و به صورت کلی‌تری نوشته شود:

$$\psi(x)=e^{-i\alpha J(x)-i\beta\gamma^5 J_5(x)}\, \Psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x)=\bar{\Psi}(x)e^{i\alpha J(x)-i\beta\gamma^5 J_5(x)} \tag{1-25}$$

چون $\psi(x)$ رابطه‌ی (1-25) باید در معادله حرکت (1-16) صدق کند لذا داریم:

$$\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu \left(e^{-i\alpha J(x)-i\beta\gamma^5 J_5(x)}\, \Psi(x)\right)= g\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_\mu J(x)\gamma^\mu\, e^{-i\alpha J(x)-i\beta\gamma^5 J_5(x)}\, \Psi(x)$$

و سپس با توجه به اینکه $\Psi(x)$ در معادله حرکت میدان آزاد بی‌جرم صدق می‌کند داریم:

$$\alpha\, \gamma^\mu\, \partial_\mu J(x) +\beta\, \gamma^\mu\, \gamma^5\, \partial_\mu J_5(x) = \frac{g}{\sqrt{\pi}}\,\partial_\mu J(x)\gamma^\mu$$

آنگاه با استفاده از اتحاد (1-6) و روابط (1-24) و (1-20) رابطه زیر را بین پارامترهای جواب معادله کلاسیک تیرینگ بدون جرم خواهیم داشت:

$$\alpha - \beta = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \qquad (1\text{-}26)$$

بنابراین معادله حرکت مدل تیرینگ کلاسیک بدون جرم دارای خانواده‌ای از جواب‌های یک پارامتری است.

برای کوانتش مدل تیرینگ کلیبر $\Psi(x)$ را بر حسب امواج تخت بسط داد اما جوابی که وی برای $\Psi(x)$ بدست آورده است همان‌طور که در منبع [9] نشان داده شده است از روی جواب فرمیون آزاد جرم‌دار در حد جرم صفر بدست نمی‌آید و اپراتورهایی که او در نظر گرفت تحت پاریته دارای شرایط استانداردی که یک اپراتور خلق و فنای فرمیونی دارد نبود و لذا در نهایت جواب‌هائی که برای مدل تیرینگ بدون جرم کوانتمی بدست می‌آورد تقارن کایرال ندارد در صورتیکه ما در ابتدا دیدیم که مدل تیرینگ بدون جرم تحت تبدیلات کایرال ناورداست. اما در منبع [2] با تعریف جدیدی که از $J^{\mu}(x)$ و $J_5^{\mu}(x)$ به عمل می‌آورد جواب‌هایی به صورت زیر برای مدل تیرینگ جرم-دار برای حالت کوانتمی بدست می‌آورد:

$$\psi(x) \;=\; e^{-i\alpha\, S^{(-)}(x) \,-\, i\,\beta\,\gamma 5\, P^{(-)}(x)}\Psi(x)e^{-i\,\alpha\, S^{(+)}(x) \,-\, i\,\beta\,\gamma 5\, P^{(+)}(x)}$$

(1-27)

$$\bar{\psi}(x) \;=\; e^{+i\alpha\, S^{(-)}(x) \,-\, i\,\beta\,\gamma 5\, P^{(-)}(x)}\bar{\Psi}(x)e^{+i\,\alpha\, S^{(+)}(x) \,-\, i\,\beta\,\gamma 5\, P^{(+)}(x)}$$

که در آن $S^{(+)}(x)$ و $S^{(-)}(x)$ و $P^{(+)}(x)$ و $P^{(-)}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^1}{\sqrt{2k^0}} c(k^1)\, e^{-ik.x}$$

$$S^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^1}{\sqrt{2k^0}} c^\dagger(k^1)\, e^{+ik.x}$$

(1-28)

$$P^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^1}{\sqrt{2k^0}} \mathcal{E}(k^1) c(k^1)\, e^{-ik.x}$$

$$P^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^1}{\sqrt{2k^0}} \mathcal{E}(k^1) c^\dagger(k^1)\, e^{+ik.x}$$

$\mathcal{E}(k^1)$ تابع علامت است و به عبارت دیگر علامت k^1 را از نظر مثبت یا منفی بودن نشان می‌دهد. در واقع $S(x)$ و $P(x)$ *مشابه* نقشی که $J(x)$ و $J_5(x)$ در حالت کلاسیکی داشتند درحالت کوانتمی دارند. (لازم به ذکر است که برای میدان‌های فرمیونی کوانتیزه جریان‌های برداری و شبه برداری به صورت ترتیب طبیعی[1] می‌باشند.)

اپراتورهای خلق و فنای بوزونی c و $c^\dagger$ از روابط جابجاگری زیر پیروی می‌کنند:

$$[c(k^1), c(p^1)] = [c^\dagger(k^1), c^\dagger(p^1)] = 0$$

$$[c(k^1), c^\dagger(p^1)] = \delta(k^1 - p^1) \qquad (1\text{-}29)$$

که در این حالت دیگر پارامترهای α و β به صورت زیر به هم مربوطند[2]:

$$\alpha\beta + \sqrt{\pi}(\alpha + \beta) = 0 \qquad (1\text{-}30)$$

در بخش دوم فصل سوم که هم‌ارزی مدل تیرینگ جرم‌دار و مدل ساین گوردون را بررسی می‌کنیم خواهیم دید که تبدیلاتی که برای فرمیون تیرینگ به کار می‌بریم مشابه جواب کوانتمی مدل

[1] Normal order

تیرینگ بدون جرم رابطه(1-25) است. چون در آن بخش در واقع ما جمله جرمی را به صورت یک بسط اختلالی حول مدل تیرینگ بدون جرم بیان خواهیم کرد.

مدل تیرینگ جرم‌دار

در مدل تیرینگ جرم‌دار وضعیت کاملاً متفاوت است. این مدل دارای جریان شبه برداری پایسته نیست و نمی‌توان آن را با تکنیک‌هایی که در مورد مدل تیرینگ بدون جرم استفاده شد حل کرد. اما به دلیل آنکه این مدل (همان‌طور که در بخش‌های بعد خواهیم دید) معادل با مدل ساین گوردون است، قابل حل دقیق می‌باشد زیرا مدل ساین گوردون در حد کلاسیک به طور دقیق قابل حل است. مدل تیرینگ جرم‌دار با استفاده از حدس بث(Bethe ansatz) قابل حل است که استفاده از آن منجر به قطری شدن هامیلتونین و تعیین دقیق طیف فیزیکی و بدست آوردن ماتریس S برای مدل تیرینگ جرم‌دار می‌شود.[10]

فصل دوم

مدل ساین گوردون و حل‌پذیری آن