بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۲ /۴/ ۲۰

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

دانشگاه الزهرا (س)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

بهینه‌سازی ترکیبیاتی و تقریب‌سازی مسئله پوشش راسی

استاد راهنما

خانم دکتر نسرین سلطانخواه

استاد مشاور

آقای دکتر روزبه تویسرکانی

نگارش

آسیه کشاورز دستک

شهریور ۱۳۸۱

٤٥٩٢٦

تقدیم به:

پدر و مادر گرامیم

تقدیر و تشکر

اینک که با یاری پروردگار متعال این پروژه پایان یافته، پس از قدردانی از زحمات بی دریغ خانم دکتر سلطانخواه، به اساتید و دوستان عزیزی که در تألیف و تنظیم این پایان نامه اینجانب را یاری کرده و توجهی مشفقانه مبذول داشته اند، سپاس ساده و بی پیرایه ای را تقدیم می دارم.

از آقای دکتر تویسرکانی که در تمام مراحل کار مشاور اینجانب بودند کمال تشکر را دارم. همچنین از همسرم که در تمام مراحل تحصیل مشوق من بوده و رسم اشکال این پایان نامه را نیز به عهده داشته، قدردانی می نمایم.

به‌نام خداوند بخشنده مهربان

فهرست

۳ الگوریتمهای تقریبی برای مسئله‌ی پوشش رأسی وزن‌دار

۴ پیاده‌سازی دو الگوریتم برای مسئله پوشش رأسی وزن‌دار

A واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی

B واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

چکیده

بسیاری از مسائل، چه از نظر علمی و چه از نظر کاربردی وجود دارند که حل این‌گونه مسائل به انتخاب مجموعه‌ای از پارامترها برای رسیدن به یک یا چند هدف، مرتبط می‌باشد.
مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی نیز از نوع مسائل بهینه‌سازی است که در آن به دنبال هدف از بین مجموعه متناهی و یا احتمالاً نامتناهی شمارا هستیم.
بعضی مسائل موجود در گراف در زمره‌ی مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی هستند، مثلاً مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد، کوتاهترین درخت فراگیر، پوشش رأسی می‌نیمم، مجموعه مستقل ماکزیمم و ....
برنامه‌ریزی خطی نقش منحصر بفردی را در نظریه بهینه‌سازی ترکیبیاتی اعمال می‌کند و در حقیقت یک عامل بنیادی برای مطالعه بسیاری از مسائل ترکیبیاتی است که در سالهای ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰، تکنیکهای LP با استفاده از مفاهیم بنیادی برنامه‌ریزی خطی بر روی بعضی از مسائل ترکیبیاتی بکار برده شد.
در این پایان نامه. بهینه‌سازی ترکیبیاتی معرفی می‌شود و سپس با استفاده از الگوریتمهای تقریبی، مسئله پوشش رأسی در گرافها و ابرگرافها که یک مسئله بهینه‌سازی ترکیبیاتی است مورد بررسی قرار می‌گیرند.
فصل اول این رساله را با معرفی بهینه‌سازی ترکیبیاتی و ذکر چند مثال از آن شروع می‌کنیم، در ادامه الگوریتمهای دقیقی را برای حل مسئله تطابق در گراف ارائه می‌دهیم که از آنها برای ارائه الگوریتمهای تقریبی برای مسئله پوشش رأسی می‌نیمم در فصلهای آتی استفاده می‌شود.
در فصل دوم، به لحاظ اینکه مسئله پیدا کردن پوشش رأسی می‌نیمم در گراف از مسائل Np- Complete است و الگوریتم دقیقی برای آن موجود نیست، الگوریتمهای تقریبی برای این مسئله در حالت غیر وزنی را ارائه می‌دهیم و نرخهای اجرایی آنها را محاسبه و سپس مقایسه می‌کنیم.
در فصل سوم، الگوریتمهای تقریبی برای مسئله پوشش رأسی وزن‌دار در گرافها و ابرگرافها را بیان و نرخهای اجرایی آنها را محاسبه و مقایسه می‌کنیم.
در فصل چهارم. دو الگوریتم تقریبی برای مسئله پوشش رأسی وزن‌دار با استفاده از نرم‌افزار Mathematica را پیاده‌سازی نموده‌ایم که این الگوریتمها را برای چندین نمونه از گرافها اجرا و جوابهای آنها را با هم مقایسه کرده‌ایم.

۱

مقدمه

۱—۱ بهینه‌سازی ترکیبیاتی چیست

بسیاری از مسائل، چه از نظر علمی و چه از نظر کاربردی وجود دارند که حل این‌گونه مسائل، به انتخاب مجموعه‌ای از پارامترها برای رسیدن به یک یا چند هدف مرتبط می‌باشد. بیش از چند دهه گذشته، یک سلسله از مسائل بوجود آمدند که مجموعه‌ای از تکنیکها برای حل آنها ابداع شده است. از جمله، برای حل مسائل از روش برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شود که برنامه‌ریزی خطی نقش منحصر بفردی را در تئوری بهینه‌سازی اعمال می‌کند و در حقیقت یک عامل بنیادی برای مطالعه بسیاری از مسائل ترکیبیاتی می‌باشد. در سالهای ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰، تکنیکهای Lp با استفاده از مفاهیم بنیادی برنامه‌ریزی خطی بر روی بعضی از مسائل ترکیبیاتی بکار برده شد. بسیاری از ریاضیدانان از جمله، دانتزیگ (Dantzig)، فرد (Ford)، فولکرسون (fulkerson)، هافمن (Hoffman)، جانسون (Johnson) و کروسکال (Kruskal) بر روی بسیاری از مسائل ترکیبیاتی مطالعه کردند و دیدند که می‌توان آنها را به مسائل برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد. ترکیبیات در سالهای اخیر پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته است که قسمت عظیمی از این پیشرفت ناشی از علم کامپیوتر می‌باشد.

بنابراین به دلیل اهمیت ویژه‌ای که برنامه‌ریزی خطی در بهینه‌سازی ترکیبیاتی دارد، تعاریف اوّلیه این بخش

بر اساس برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۱ یک نمونه از مسئله‌ی بهینه سازی، یک زوج (F, c) است که F، مجموعه‌ای از نقاط شدنی و c تابع هزینه (ارزش) ، یک نگاشت

$$c: \; F \longrightarrow R$$

می‌باشد و مسئله پیدا کردن یک $f \in F$ است به‌طوری‌که

$$c(f) \leq c(y), \quad \forall y \in F$$

(در حالتی که هدف ماکزیمم باشد: $c(f) \geq c(y), \quad \forall y \in F$)

نقطه f، جواب بهینه کلی برای نمونه داده شده می‌باشد یا بطور کلی بدون آنکه به کلیت آن خللی وارد شود، جواب بهینه نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱ یک مسئله بهینه‌سازی، یک مجموعه I متشکل از نمونه‌های یک مسئله بهینه‌سازی است.

بنابراین با در نظر گرفتن تعاریف فوق می‌توان یک مسئله و یک نمونه از مسئله را از هم تشخیص داد.

بطور متعارف در یک نمونه. داده‌های ورودی داده می‌شوند و اطلاعات کافی برای به دست آوردن جواب در دسترس می‌باشد.

طبیعتاً به نظر می‌رسد که مسائل بهینه‌سازی به دو دسته تقسیم شوند:

یک دسته از مسائل شامل متغیرهای پیوسته می‌باشد که در این گونه مسائل در پی یک مجموعه از اعداد حقیقی و یا حتی یک تابع می‌گردیم و دسته دیگر شامل متغیرهای گسسته می‌باشند که آن را ترکیبیات می‌نامند.

تعریف ۳.۱ به مسئله بهینه‌سازی که در آن به دنبال یک هدف از بین مجموعه متناهی یا احتمالاً نامتناهی شمارا باشیم، مسئله بهینه‌سازی ترکیبیاتی گفته می‌شود.

بعنوان مثال، مسائل موجود در گراف از جمله مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی می‌باشد که دراینجا به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۴.۱ مسئله فروشنده دوره‌گرد ((Traveling Salesman Problem (TSP) .

در نمونه‌ی TSP، عدد صحیح $n > 0$ داده شده و در ماتریس $[d_{ij}]_{n\times n}$؛ $d_{ij} \in Z^+$ نمایانگر فاصله بین یک زوج شهر i و j است، هدف پیدا کردن یک تور یا به عبارتی یک مسیر بسته است که از هر شهر دقیقاً یک بار بگذرد به‌طوری‌که مسیر پیموده شده دارای کمترین طول باشد. لذا می‌توان نمونه TSP را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$F =\{\text{همه جایگشتهای دوری } \pi \text{ روی } n \text{ شهر}\}$$

اگر $\pi(j)$ را بعنوان شهری که بعد از شهر jام دیده می‌شود در نظر بگیریم، جایگشت π نمایانگر یک تور است، بنابراین تابع هزینه c، π را به $\sum_{j=1}^{n} d_{j\pi(j)}$ می‌نگارد.

این مسئله از مهمترین مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی است و توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود جلب کرده است. کار کردن زیاد برروی این مسئله موجب شده است که این مسئله را با محدودیت‌های گوناگون و در حالتهای خاص نیز در نظر گرفته و در صدد حل آن برآیند. از جمله در سال ۲۰۰۰، کلیف استین (Cliff Stein) و دیوید واگنر(David P.Wagner)، [۳۸] این مسئله را با می‌نیمم کردن تعداد گردشها[1] در تور در نظر گرفتند و الگوریتمهای کارایی نیز ارائه نمودند. △

مثال ۵.۱ کوتاهترین درخت فراگیر ((Minimal Spanning Tree (MST)

برای $n > 0$، ماتریس فاصله $[d_{ij}]_{n\times n}$ داده شده است که $d_{ij} \in Z^+$ است، مسئله پیدا کردن یک درخت فراگیر روی n رأس است به‌طوری‌که مجموع طول یالهای آن می‌نیمم باشد.

این نمونه از مسئله‌ی بهینه‌سازی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت :

[1] ورودی این نمونه، یک مجموعه از نقاط در فضای اقلیدسی است، هدف پیدا کردن یک تور بین این نقاط شامل خطوط مستقیم است به‌طوری‌که تعداد این خطها می‌نیمم باشد.

$F = \{(V, E)$ همه درختهای فراگیر ؛ $V = \{1, \ldots, n\}\}$

$$c : (V, E) \longrightarrow \sum_{(i,j)\in E} d_{ij}$$

$\triangle$

۱ــ۲ الگوریتم‌هایی برای مسئله تطابق

یکی دیگر از مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی در گراف، مسئله پیدا کردن تطابق ماکزیمم در گراف $G = (V, E)$ است. این مسئله از این نظر حائز اهمیت است که در حل برخی از مسائل NP-Complete کاربرد دارد. از جمله‌ی این مسائل، مسئله پوشش رأسی می‌نیمم (Minimum Vertex Cover) در گراف و مسئله مجموعه مستقل ماکزیمم (Independet Set Problem) است.

قبل از آنکه الگوریتمی برای مسئله تطابق بیان گردد، به چند مفهوم اولیه و لم و قضیه نیاز داریم.

تعریف ۶.۱ یک تطابق M از گراف $G = (V, E)$، مجموعه‌ای از یالهای دو به دو مجزا است.

تعریف ۷.۱ رأسهای متعلق به یالهای یک تطابق را اشباع‌شده و بقیه رأسهای گراف را اشباع‌نشده گویند. یالهایی از گراف G که در تطابق نیستند را یالهای اشباع‌نشده گویند.

تعریف ۸.۱ مسیر $p = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ یک مسیر متناوب نامیده می‌شود اگر یالهای $[u_1, u_2]$،$[u_3, u_4]$ و...$[u_{2j-1}, u_{2j}]$، یالهای اشباع‌نشده و مابقی یالها، یالهای واقع در تطابق باشد.

تعریف ۹.۱ یک مسیر متناوب، نیالوده نامیده می‌شود اگر رأسهای ابتدا و انتهای مسیر اشباع نشده باشد.

تعریف ۱۰.۱ رأسهایی که در سطوح فرد در مسیر متناوب p قرار دارند، رأسهای بیرونی و رأسهایی که در سطوح زوج قرار دارند، رأسهای درونی نامیده می‌شوند.

اهمیت مسیرهای نیالوده برای مسئله تطابق ماکزیمم به واسطه لم زیر کاملاً مشهود است:

لم ۱۱.۱ فرض کنید که p یک مسیر نیالوده در گراف $G = (V, E)$ بر اساس تطابق M باشد، آن‌گاه $M' = M \oplus p$ یک تطابق با اندازه $|M| + ۱$ است که $M \oplus p = (M - p) \bigcup (p - M)$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $M \oplus p$ یک تطابق است، و این یعنی اینکه هیچ ۲ یالی در $M \oplus p$ به یک رأس متصل نیستند.

فرض کنید که ۲ یال e و e' در $M \oplus p$ به یک رأس متصل باشند، لذا ۳ حالت باید بررسی گردد:

۱) $e, e' \in M - p$

۲) $e, e' \in p - M$

۳) $e \in M - p$ ، $e' \in p - M$

در حالت (۱)، دو یال در M وجود دارد که به یک رأس متصل است، در حالی که M یک تطابق است. بنابراین حالت ۱) امکان‌پذیر نیست.

در حالت (۲)، با توجه به اینکه یالهای واقع در $p - M$ به صورت $[u_{2j-1}, u_{2j}]$ هستند، هیچ ۲ یالی نمی‌تواند به یک رأس وصل باشد.

در حالت (۳)، فرض کنید که یال $e' = [u_{2j-1}, u_{2j}]$ در $p - M$ به یک رأس یال $e \in M - p$ وصل باشد. بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که این رأس u_{2j} باشد. اما u_{2j} یک رأس در یال $e'' = [u_{2j}, u_{2j+1}] \in M$ است و از اینرو e و e'' یک رأس مشترک دارند که این یک تناقض است.

حال p شامل $2k - ۱$ یال است: k تا از آنها اشباع‌نشده $([u_1, u_2], [u_3, u_4], \ldots, [u_{2k-1}, u_{2k}])$ و $k - ۱$ تا متعلق به M می‌باشد. بنابراین $M' = M \oplus p$ دارای $|M| + ۱$ یال است. □

یکی از قضایای مهم که بطور مستقیم در الگوریتمها کارایی دارد قضیه زیر می‌باشد که در مرجع [۳۹] آمده است.

قضیه ۱۲.۱ یک تطابق M در گراف $G = (V, E)$ ، ماکزیمم است اگر و تنها اگر هیچ مسیر نیالوده‌ای در گراف G متناظر با تطابق M وجود نداشته باشد.

برهان. یک طرف آن به آسانی از لم فوق به دست می‌آید. برای اثبات طرف دیگر، فرض کنید که هیچ مسیر نیالوده‌ای متناظر با M وجود نداشته باشد و تطابق M نیز ماکزیمم نباشد. بنابراین یک تطابق M' وجود دارد که

$$|M'| > |M| ,$$

حال زیرگراف القایی $H = [M \oplus M']$ را در نظر بگیرید. H گرافی است که درجه رأسها در آن برابر با ۱ یا ۲ است و مؤلفه‌های آن به صورت دورهای زوج با یالهای متناوباً در M و M' و یا مسیرها می‌باشد.(واضح است که دور فرد نداریم)

چون یالهای M' بیشتر از M است، مسیری مانند p در H وجود دارد که با یالی در M' شروع و با یالی در M' ختم می‌شود. یعنی p یک مسیر نیالوده متناظر با M خواهد بود که با فرض اینکه هیچ مسیر نیالوده‌ای در G در ارتباط با M وجود ندارد، در تناقض است. □

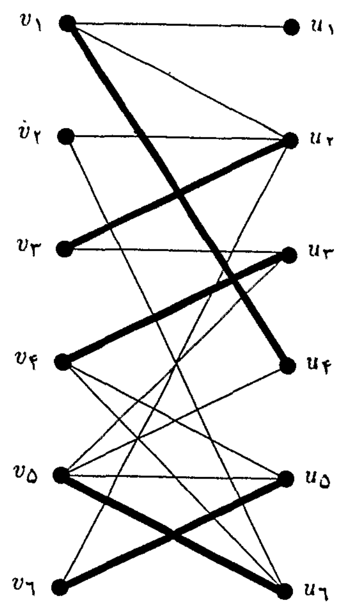
۱ — ۲ — ۱ الگوریتم تطابق در گراف دوبخشی

به دلیل آنکه مسئله تطابق ماکزیمم در گراف دوبخشی حالت خاصی از مسئله تطابق است، ابتدا به تشریح این مسئله با ارائه الگوریتم خواهیم پرداخت.

با تکیه بر لم ۱۱.۱ و قضیه ۱۲.۱، برای پیدا کردن تطابق ماکزیمم همواره در پی یک مسیر نیالوده p و افزودن آن به تطابق جاری به صورت $M \oplus p$ می‌باشیم و بدیهی است که زمانی الگوریتم خاتمه می‌یابد که هیچ مسیر نیالوده‌ای در گراف دوبخشی $B = (V, U, E)$ پیدا نشود.

حال مهمترین موضوع، چگونگی جستجو برای یافتن مسیرهای نیالوده متناظر با تطابق جاری M در گراف دوبخشی $B = (V, U, E)$ است. لذا با ذکر یک مثال، جستجوی فوق را تشریح نموده و سپس الگوریتمی کامل ارائه خواهد گردید.

گراف دوبخشی $B = (V, U, E)$ و تطابق M در شکل ۱ـ۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱ـ۱

طبیعتاً، جستجو برای مسیرهای نیالوده باید با ساختن مسیرهای متناوب با شروع از رأسهای اشباع‌نشده باشد. چون یک مسیر نیالوده در گراف دوبخشی باید یک رأس انتهایی آن در مجموعه رأسهای V و دیگری در مجموعه رأسهای U واقع گردد، بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود شروع و رشد مسیر متناوب را از رأسهای اشباع نشده متعلق به V (در این مثال v_2) در نظر می‌گیریم و همزمان تمامی مسیرهای متناوب با شروع از v_2 را با در نظر گرفتن تمامی رأسهای همجوار با v_2 که در این مثال u_2 و u_6 می‌باشد را جستجو می‌کنیم. طبق تعریف مسیر متناوب باید یالهای تطابق شده‌ای که از u_2 و u_6 ناشی می‌شود را در نظر گرفت که این یک گام پیشرو منظم است و زمانی که به یک رأس اشباع نشده در مجموعه رأسهای U برسد، یک مسیر نیالوده حاصل می‌شود. شکل ۱ـ۲ نمایانگر تمامی مسیرهای متناوب در گراف دوبخشی B می‌باشد.