

الله الرحمن الرحيم

١٠١٧٤

۸۷/۱۱۰۹۹۸
۸۷-۱۲-۲۴



تحلیل انتشار امواج در درون محیط‌های بسته با استفاده

از روش حل عددی FDTD

حسن فایده

دانشکده فنی

گروه برق

۱۳۸۷

کتابخانه دانشگاه ارومیه

۱۳۸۷ / ۱۲ / ۲۴

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما: دکتر جواد نوری نیا

استاد مشاور: دکتر چنگیز قبادی

۱۰۸۶۷۲

پایان نامه حسن ضحیده به تاریخ ۲۳/۱۰/۸۶ شماره ۱۳۶-۲ مورد پذیرش هیات محترم

داوران با رتبه بی شائبه و نمره ۱۶ قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر جبار نوری / دکتر حسین قاری

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر درویش نغدیدر

۴- داور داخلی: دکتر محمد تقی آذر سن

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر جبار نوری

مجلس داوران و هیئت مشاوران
دو دستیار دانشگاه ارومیه می باشد

تقدیم به

پدرم که الگوی فداکاری است

و

مادرم که اسوهی مهربانی است

تقدیر و تشکر

خداوند متعال را سپاسگزارم که بنده حقیر را مشمول عنایات خویش ساخت تا توانستم این پایان نامه را با توکل به او به پایان برسانم.

در اینجا بر خود فرض می‌دانم به مصداق حدیث شریف «من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق» از اساتید فاضل و دانشمند گروه برق علی‌الخصوص استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر جواد نوری‌نیا و استاد مشاور فاضل و بزرگوار جناب آقای دکتر چنگیز قبادی تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از اساتید زحمتکش و دلسوز گروه جناب آقای دکتر محمد نقی آذرمنش و سرکار خانم دکتر شایسته به خاطر راهنمایی‌ها و نکته‌سنجی‌های ارزشمندشان قدردانی می‌کنم. اگر این پایان نامه حسن و کمالی دارد، مدیون زحمات این اساتید بزرگوار است و اگر ناپختگی و نقصی دارد، متوجه این دانش پژوه بی‌بضاعت است.

از زحمات دوست عزیزم جناب آقای صابر سلطانی به خاطر همکاری صمیمانه‌اش و از سایر دوستان عزیز دوره کارشناسی ارشد کمال تشکر را دارم.

چکیده:

امروزه تقاضا برای سیستم‌های مخابراتی به طور فزاینده‌ای رو به گسترش است. یک سیستم مخابراتی شامل فرستنده، گیرنده و کانال انتقال می‌باشد. کانال انتقال همین محیط پیرامون ما را شامل می‌شود. اگر فرستنده و گیرنده هر دو در محیط آزاد قرار داشته باشند کانال را خارجی، و اگر گیرنده درون ساختمان باشد کانال را داخلی می‌نامیم. در کانال انتشار امواج رادیویی پدیده‌هایی همچون محو شدگی و تضعیف رخ می‌دهند. این پدیده‌ها در کار سیستم‌های مخابراتی خلل وارد می‌کنند. اگر بتوانیم به طور دقیق ویژگی‌های یک کانال انتشار رادیویی را مشخص کنیم، می‌توانیم فرستنده و گیرنده را به گونه‌ای طراحی کنیم که با کانال منطبق باشند و در این صورت کارایی سیستم به حداکثر می‌رسد. برای کانال انتشار دو مدل پیشنهاد شده است. یکی مدل سیستمی کانال انتشار است و دیگری مدل میدانی کانال انتشار. ما در این پایان نامه مدل میدانی کانال انتشار یعنی شبیه سازی کانال با یک روش عددی را مورد بررسی قرار دادیم. اگرچه شبیه سازی با یک روش حل عددی برای بررسی پارامترهای مربوط به مدل سیستمی کانال نیز مفید به فایده است. روش عددی‌ای که انتخاب کردیم روش عددی *FDTD* بود. برنامه‌ای طراحی کردیم که هر کانال انتشاری را در دو بعد تحلیل می‌کند. تحلیل جامع، تحلیل سه بعدی کانال است که برنامه آن نوشته شد اما برای اجرای آن با محدودیت سخت افزاری روبرو شدیم از این رو به بررسی یک منبع موج در محیط سه بعدی یا به بیان ساده‌تر به تحلیل یک آنتن پرداختیم.

فهرست مطالب

۱.....	فصل ۱: مقدمه
۳.....	فصل ۲: نحوه پیدایش روش <i>FDTD</i>
۱۲.....	فصل ۳: فرمول‌های <i>Yee</i>
۱۶.....	فصل ۴: مرزهای جذبی
۳۰.....	فصل ۵: منابع موج
۳۷.....	فصل ۶: انتشار امواج در درون محیط‌های بسته
۷۰.....	فصل ۷: نتایج حاصل از شبیه سازی

فهرست اشکال

- شکل (۲-۱): تخمین مشتق تابع $f(x)$ در نقطه P
- شکل (۲-۲): مش بندی فضای مسئله برای دو متغیر مستقل x و t
- شکل (۲-۳): خطا به عنوان تابعی از اندازه مش
- شکل (۲-۴): سلول Yee
- شکل (۲-۵): نحوه قرار گرفتن میدان‌ها به دور یکدیگر در سلول بی
- شکل (۲-۶): سلول بی برای حالت دو بعدی
- شکل (۲-۷): فلوچارت روش حل عددی $FDTD$
- شکل (۴-۱): PML برای حالت دو بعدی
- شکل (۴-۲): PML برای حالت سه بعدی
- شکل (۵-۱): طیف تابع تحریک سینوسی
- شکل (۵-۲): طیف تابع تحریک گوسی
- شکل (۵-۳): طیف پالس سینوسی گوسی
- شکل (۵-۴): ناحیه بندی میدان کل و میدان پراکنده شده
- شکل (۵-۵): نمایش ناحیه بیرونی و داخلی برای حالت یک بعدی
- شکل (۵-۶): نمایش ناحیه بیرونی و داخلی برای حالت دو بعدی
- شکل (۵-۷): نمایش موج بافر تک بعدی برای ایجاد موج صفحه‌ای با زاویه تابش دلخواه
- شکل (۶-۱): مدل ریاضی کانال
- شکل (۶-۲): دنباله‌ای از پروفایل‌ها برای نقاط مجاور در فضا
- شکل (۶-۳): دنباله‌ای از پروفایل‌های پاسخ ضربه برای نقاط مجاور فضایی در یک ساختمان اداری با اندازه متوسط. الف) دید مستقیم ب) دید غیر مستقیم
- شکل (۶-۴): یک مدل برای انتشار رادیویی در محیط‌های داخلی
- شکل (۶-۵): واریانس‌های محلی و کلی.
- شکل (۶-۶): مدل $\Delta - K$ ، فرایند پواسون تغییر یافته زمان پیوسته
- شکل (۶-۷): یک مولفه چند مسیره و زیر مسیرهای مرتبط با آن
- شکل (۶-۸): محو شدگی گذرای پوش موج پیوسته
- شکل (۶-۹): نمای محیط اداری همراه با مشخص کردن محل‌های قرار گرفتن آنتن فرستنده

شکل (۶-۱۰): سطوح توان دریافتی در طول مسیر نشان داده شده به همراه توان متوسط فضایی
 شکل (۶-۱۱): نقشه‌های سطح تحت پوشش توان برای فرکانس‌های a و b 2.44 GHz و 5.8 GHz برای
 رنج -35 dB تا -15 dB برای استقرار آنتن فرستنده در مکان ۴
 شکل (۶-۱۲): گستره تاخیر rms در طول مسیر نشان داده شده، فرستنده در مکان ۴ قرار دارد و خط تیره‌ها
 مشخص کننده محدوده مربوط به باز بودن در است.
 شکل (۶-۱۳): تصویر سطوح توان بر حسب گستره تاخیر rms در سه اتاق، فرستنده در مکان ۷ و فرکانس
 کاری 5.8 GHz می‌باشد.

شکل (۶-۱۴): نمای اتاق تحت آزمایش

شکل (۶-۱۵): نتایج شبیه سازی و اندازه گیری

شکل (۶-۱۶): نمای برخورد یک موج صفحه‌ای به ساختار پنجره و الگوی پراکندگی میدان الکتریکی

شکل (۶-۱۷): a (نمای پهلو و b) نمای بالای اتاق کنسرت، فرکانس کاری 1.29 GHz

شکل (۶-۱۸): توزیع سیگنال نرمالیزه بدست آمده از روش ترکیبی برای دو مسیر که در شکل (۶-۱۶) با خط

$$d = 5\lambda (\text{course } 2) \text{ و } d = 4\lambda (\text{course } 1)$$

شکل (۷-۱): نمای رابط گرافیکی برنامه $FDTD$ در دو بعد.

شکل (۷-۲): پنجره‌ای از برنامه گرافیکی برای تنظیم پارامترهای مسئله

شکل (۷-۳): پنجره‌ای از برنامه گرافیکی برای تعیین ویژگی‌های مغناطیسی محیط

شکل (۷-۴): مقدار میدان الکتریکی نرمالیزه برای یک منبع موج نقطه‌ای با تحریک گوسی برای یک محیط به

ابعاد 1×1 متر و اندازه مش یک سانتیمتر.

شکل (۷-۵): مقدار میدان الکتریکی نرمالیزه برای یک منبع تحریک سینوسی.

شکل (۷-۶): مقدار میدان الکتریکی نرمالیزه برای یک منبع تحریک سینوسی گوسی.

شکل (۷-۷): موج صفحه‌ای با تحریک گوسی.

شکل (۷-۸): موج صفحه‌ای با تحریک گوسی تحت زاویه 45° درجه.

شکل (۷-۹): موج صفحه‌ای با تحریک سینوسی.

شکل (۷-۱۰): موج صفحه‌ای با تحریک سینوسی گوسی.

شکل (۷-۱۱): برخورد یک موج صفحه‌ای گوسی با یک استوانه با مشخصات مغناطیسی $\epsilon_r = 0.3$, $\sigma = 3$.

شکل (۷-۱۲): برخورد یک موج صفحه‌ای تحت زاویه 45° درجه با یک دیواره هادی.

شکل (۷-۱۳): برخورد یک موج صفحه‌ای گوسی به یک اتاق شامل یک پنجره در جلو و دارای ستون‌های

آهنی (خواص مغناطیسی محیط از مرجع [۵۴] گرفته شده است).

شکل (۷-۱۴): نمای محیط همراه با مشخص کردن محل قرار گرفتن آنتن فرستنده.

شکل (۷-۱۵): کانتورهای میدان الکتریکی برای استپهای زمانی مختلف.

- شکل (۷-۱۶): توان متوسط و دریافتی مرجع [۵۳].
- شکل (۷-۱۷): محاسبه توان دریافتی و متوسط با استفاده از برنامه طراحی شده.
- شکل (۷-۱۸): نقشه‌های پهنه بندی توان: (a) فرکانس 2.4 GHz ، (b) فرکانس 5.8 GHz ، مرجع [۵۳].
- شکل (۷-۱۹): نقشه‌های پهنه بندی توان، بدست آمده از برنامه طراحی شده.
- شکل (۷-۲۰): توزیع سطح توان در درون یک اتاق.
- شکل (۷-۲۱): گستره تاخیر τ_{rms} ، مرجع [۵۳].
- شکل (۷-۲۲): گستره تاخیر τ_{rms} ، بدست آمده از نتایج برنامه طراحی شده.
- شکل (۷-۲۳): پلان محیط استفاده شده برای شبیه سازی (ابعاد بر حسب متر)، مرجع [۶۰].
- شکل (۷-۲۴): دیواره ساده، (a) دیواره پیچیده، (b) دیواره پیچیده.
- شکل (۷-۲۵): دیواره پیچیده با ابعاد واقعی.
- شکل (۷-۲۶): کانتورهای توان متوسط برای دو سطح توان مختلف، مرجع [۶۰].
- شکل (۷-۲۷): کانتورهای توان متوسط بدست آمده از نتایج برنامه طراحی شده.
- شکل (۷-۲۸): نمای آنتن (اندازه‌ها بر حسب میلی‌متر است).
- شکل (۷-۲۹): نمای موجبر هم صفحه به همراه نمایش میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی.
- شکل (۷-۳۰): محل قرار گرفتن منبع صفحه‌ای در تحریک یک خط تغذیه هم صفحه.
- شکل (۷-۳۱): پالس گوسی منتشر شده دارای دنباله منفی و اعوجاج.
- شکل (۷-۳۲): شکل موج اصلاح شده به همراه یک تابع گوسی برای مقایسه میزان بهبود.
- شکل (۷-۳۳): محل قرار گرفتن لایه جذبی و صفحه مرجع.
- شکل (۷-۳۴): مولفه‌های میدان الکتریکی در صفحه‌ای دقیقاً واقع در زیر وجه بالایی آنتن، برای دو استپ زمانی ۵۰۰ و ۱۲۰۰ .
- شکل (۷-۳۵): جهت قرارگیری مولفه‌های مماسی و عمودی میدان در تئوری تصویر (مرجع [۳]).
- شکل (۷-۳۶): خط تغذیه به تنهایی و محل صفحه مرجع.
- شکل (۷-۳۷): مولفه میدان الکتریکی کل واقع در فاصله هوایی بین هادی مرکزی و صفحه زمین در محل صفحه مرجع.
- شکل (۷-۳۸): مولفه میدان الکتریکی رفت واقع در فاصله هوایی بین هادی مرکزی و صفحه زمین در محل صفحه مرجع.
- شکل (۷-۳۹): مولفه میدان الکتریکی برگشت واقع در فاصله هوایی بین هادی مرکزی و صفحه زمین در محل صفحه مرجع.
- شکل (۷-۴۰): طیف فرکانسی مولفه‌های رفت و برگشت.
- شکل (۷-۴۱): پارامتر S_{11} محاسبه شده از طریق روش حل عددی $FDTD$.
- شکل (۷-۴۲): پارامتر S_{11} بدست آمده از تست آنتن، نرم افزار $HFSS$ و روش $FDTD$.
- شکل (۷-۴۳): پارامتر $VSWR$ بدست آمده از تست آنتن، نرم افزار $HFSS$ و روش $FDTD$.

فصل ۱

مقدمه

دانشمندان و مهندسين چندین روش برای حل مسائل میدان به کار می‌برند. این روش‌ها در سه گروه آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی جای می‌گیرند. روش‌های آزمایشگاهی هزینه بر و وقت گیر هستند و نمی‌توانیم پارامترهای مسئله را در هر بازه‌ای تغییر دهیم. روش‌های تحلیلی بهترین روش‌ها هستند. اما مسائل محدودی را می‌توان با استفاده از آن‌ها حل کرد. وقتی مسائل از لحاظ هندسی پیچیده می‌شوند باید از روش‌های حل عددی استفاده کنیم که در آن‌ها نیز از یک ساده سازی تحلیلی برای بدست آوردن پارامتر مجهول مسئله در یک نقطه از فضا بهره می‌برند. روش‌های زیر رایج ترین روش‌ها در حل مسائل مغناطیسی هستند:

روش‌های تحلیلی

۱. جدا سازی متغیرها
۲. بسط سری‌ها
۳. تبدیل فوریه و لاپلاس در راه حل‌های انتگرالی
۴. نگاشت
۵. روش‌های آشفتگی

روش‌های عددی

۱. روش اختلاف‌های محدود ($FD, FDTD$)
۲. روش مانده‌های وزندار (Weighted Residuals)
۳. روش گشتاور (MOM)
۴. روش بخش‌های محدود (FEM)
۵. مدل سازی خط انتقال (TLM)
۶. روش منت کارلو (Monte Carlo Method)
۷. روش خطوط (Method of Lines)

کاربرد این روش‌ها محدود به مسائل الکترومغناطیسی نیست و در مسائل مربوط به انتقال گرما، سیالات و آکوستیک از آن‌ها استفاده می‌شود [۱].

سوالی در اینجا مطرح می‌شود که در بین روش‌های عددی کدامیک بهترین است؟

روش MOM ، روشی است که معادلات انتگرالی را با استفاده از مانده‌های وزندار حل می‌کند. روش مانده‌های وزندار را به همان خوبی که برای معادلات مشتقی به کار می‌روند می‌توان برای حل معادلات انتگرالی به کار برد. این روش در حل مسائل تشعشعی بیکران و همچنین در ساختارهای شامل دی‌الکتریک‌های همگن و هادی‌های کامل کارایی خوبی دارد. اما برای تحلیل مسائل دارای ساختار هندسی پیچیده و غیر همگن پیشنهاد نمی‌شود.

روش *FEM*، در این روش لازم است که کل ساختار مسئله مش بندی شود و هر مش دارای خواص مغناطیسی متفاوت با مش‌های مجاور خود است. به طور کلی این روش برای تحلیل ساختارهای پیچیده غیر همگن مفید است. اما در حل مسائل تشعشعی بیکران به خوبی روش *MOM* عمل نمی‌کند. روش *FDTD*، در این روش نیز باید کل فضای مسئله مش بندی شود. معمولاً در این روش، مش بندی‌ها یکسان هستند و ابعاد مش‌ها در محیط با توجه به کوچکترین جزئیات موجود در ساختار مسئله تعیین می‌شود که بر خلاف روش‌های *MOM* و *FEM* است. این روش در حوزه زمان است و برای مسائل دارای تحلیل گذرا بسیار مناسب است. به مانند روش *FEM* این روش در مدل سازی ساختارهای پیچیده غیر همگن بسیار مفید است و همچنین در مدل سازی مسائل بیکران به نسبت روش *FEM* کارا تر است. با توجه به این ویژگی‌های روش *FDTD*، ما این روش را برای تحلیل انتشار امواج در درون محیط‌های ساختمانی بر می‌گزینیم. زیرا اتاق به همراه اشیاء موجود در آن یک ساختار غیر همگن پیچیده محسوب می‌شود و تحلیل در حوزه زمان این امکان را به ما می‌دهد که با یک بار اجرای شبیه سازی، مسئله برای رنج وسیعی از فرکانس‌ها حل شود [۲].

فصل ۲

نحوه پیدایش روش

FDTD

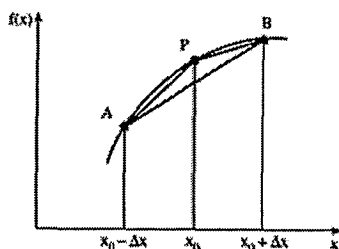
به ندرت مسائل واقعی طبیعت را می‌توانیم با استفاده از روش تحلیلی حل کنیم. در رشته برق مسئله یعنی حل معادله، در حالات زیر روش‌های تحلیلی برای حل مسائل کاربرد ندارند:

- وقتی این معادله (در اینجا منظور نوع مشتقی است) غیر خطی باشد و امکان خطی سازی آن نباشد و یا اگر خطی کنیم شدیداً بر نتیجه درست اثر می‌گذارد.
- شرایط مرزی پیچیده باشد.
- شرایط مرزی وابسته به زمان باشد.
- محیط غیر همگن یا غیر یکسانگرد باشد.

وقتی یک مسئله با این پیچیدگی بروز می‌کند باید دست به دامن راه حل‌های عددی شد. در میان روش‌هایی که برای حل معادلات مشتقی است، روش اختلاف‌های محدود قابل فهم‌تر و آسان‌تر برای پیداه‌سازی به صورت یک نرم افزار است.

روش اختلاف‌های محدود (FDM) اولین بار توسط تام در دهه ۱۹۲۰ تحت عنوان "روش مربع‌ها" برای حل معادلات هیدرودینامیک غیرخطی به کار گرفته شد [۱]. از آن زمان به بعد این روش در حل مسائل مختلف میدان کاربردهایی پیدا کرد. راهکار اختلاف‌های محدود بر پایه تقریب‌هایی که اجازه می‌دهند معادلات مشتقی بوسیله معادلات اختلاف‌های محدود جایگزین شوند استوار است. این تقریب‌ها به صورت جبری هستند و به مقدار تابع در یک نقطه از فضای مسئله با نقاط مجاورش مربوط هستند. از این روش اختلاف‌های محدود اساساً شامل سه گام است:

۱. تقسیم کردن فضای مسئله به یک شبکه از نقاط
 ۲. تقریب زدن معادلات مشتقی بوسیله معادله‌های تفاضلی
 ۳. حل کردن معادلات تفاضلی تحت شرایط مرزی مفروض و یا شرایط اولیه
- قبل از هر چیز به نحوه بدست آوردن تقریب تفاضلی از یک معادله مشتقی مفروض می‌پردازیم.



شکل (۲-۱): تخمین مشتق تابع $f(x)$ در نقطه P

تابع $f(x)$ را در شکل (۲-۱) در نظر می‌گیریم. برای این تابع می‌توانیم مشتق یا شیب آن در نقطه‌ای به نام P را با شیب کمان‌های PB یا AP یا AB تقریب بزنیم که به ترتیب تفاضل جلویی، عقبی و مرکزی می‌نامیم.

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

این روش یک روش شهودی است. روش عمومی‌تر بکارگیری سری تیلور است. بر طبق بسط تیلور

داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

و با تفاضل این‌ها:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2(\Delta x) f'(x_0) + o(\Delta x)^2$$

$O(\Delta x)^2$ خطای حاصل از قطع کردن سری است. می‌گوییم این خطا از مرتبه $(\Delta x)^2$ یا به اختصار همان $O(\Delta x)^2$ است. از طرفی $O(\Delta x)^2$ بزرگتر از $(\Delta x)^2$ نیست. پس به راحتی قابل صرف نظر کردن است.

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

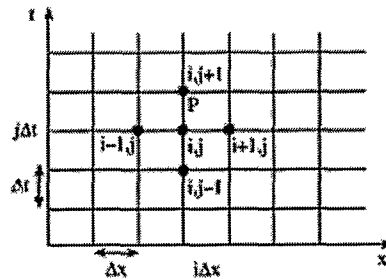
اگر تعداد جملات بیشتری از سری تیلور را استفاده کنیم تقریب‌هایی با دقت بالاتر برای مشتق اول تابع $f(x)$ بدست می‌آید. همچنین می‌توانیم تقریب‌هایی برای مشتق‌های مراتب بالاتر تابع $f(x)$ بدست آوریم. برای نمونه با جمع کردن بسط‌های مفروض داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + o(\Delta x)^4$$

و بدست می‌آید:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

برای تابع $\Phi(x, t)$ ، ابتدا فضای مسئله به مانند شکل (۲-۲) مش بندی می‌شود.



شکل (۲-۲): مش بندی فضای مسئله برای دو متغیر مستقل x و t

برای سهولت در نوشتن عبارات، ساده سازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x = i\Delta x \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = j\Delta t \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

و مقدار Φ در نقطه‌ای به نام P

$$\Phi_p = \Phi(i\Delta x, j\Delta t) = \Phi(i, j)$$

با این روش ساده سازی تقریب مشتق‌هایی از Φ در نقطه (i, j) ام به قرار زیر است:

$$\Phi_x|_{i,j} \equiv \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta x}$$

$$\Phi_t|_{i,j} \equiv \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2\Delta t}$$

$$\Phi_{xx}|_{i,j} \equiv \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2}$$

$$\Phi_{tt}|_{i,j} \equiv \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta t)^2}$$

در حل معادلات مشتقی که تقریب‌هایی از این دست جایگزین عبارات‌های مشتقی می‌شوند به یک دستگاه از معادلات جبری می‌رسیم که باید به صورت همزمان حل شوند. برای حل همزمان معادلات جبری به دو طریق می‌توان اقدام کرد.

۱. روش ماتریسی

۲. روش تکرار

روش ماتریسی، وقتی تقریب معادله مشتقی را برای تمام نقاط بکار ببریم به یک مجموعه از معادله‌های جبری می‌رسیم:

$$[A][X] = [B]$$

$[A]$ یک ماتریس پراکنده است یعنی دارای تعداد زیادی درایه صفر است. $[X]$ یک بردار ستونی است و $[B]$ هم یک بردار ستونی است. در این رابطه $[X]$ مجهول است که با محاسبه ماتریس معکوس قابل محاسبه است.

$$[X] = [A]^{-1}[B]$$

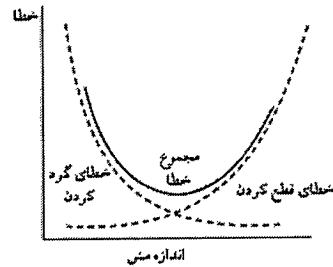
روش تکرار، این روش برای محاسبه یک مجموعه بزرگ از معادلات جبری همزمان بکار می‌رود و بدین طریق است که از تقریب اول برای حل معادله، برای محاسبه تقریب دوم استفاده می‌شود. از تقریب دوم برای محاسبه تقریب سوم و الی آخر. شروع بدین گونه است که مقدار تابع موجود در معادله، بر روی مرزهای مسئله معلوم است. سایر نقاط را صفر در نظر می‌گیریم و مقدار تابع را برای هر نقطه موجود در فضای مسئله با توجه به نقاط مجاور محاسبه می‌کنیم. همین کار را چند بار تکرار می‌کنیم تا مقدار جدیدی که برای تابع در نقطه بدست می‌آید نسبت به مقدار قبلی‌اش تفاوت کمی داشته باشد. مقدار این تفاوت بستگی به مطلوب ما دارد.

دقت در اینجا یعنی نزدیکی پاسخ تقریبی به پاسخ درست (فرض می‌کنیم موجود است) و پایداری یعنی شرایطی که به موجب آن دامنه پاسخ با افزایش زمان افزایش پیدا نکند.
سه منبع اجتناب ناپذیر تولید کننده خطا در حل عددی مسائل فیزیکی داریم:

۱. خطاهای مدل سازی
۲. خطاهای قطع یا گسسته سازی
۳. خطاهای گرد کردن

هر کدام از این نوع خطاها بر روی دقت پاسخ بدست آمده تاثیر می‌گذارند. خطاهای مدل سازی در نتیجه گرفتن فرض‌هایی برای رسیدن به مدل ریاضی حادث می‌شود. خطاهای قطع کردن در تحلیل عددی بر اثر این واقعیت که در محاسبات تنها با تعداد جملات محدودی از یک سری نامحدود کار می‌کنیم به وجود می‌آید. با بکار بردن تعداد جملات بیشتر یا با کاهش اندازه مش‌ها خطای قطع کردن کاهش می‌یابد. خطاهای گرد کردن در نتیجه اینکه محاسبات بوسیله یک کامپیوتر با دقت محدود انجام می‌شود رخ می‌دهد و اجتناب ناپذیر است زیرا اندازه ثبات‌ها در واحد محاسبه و منطق کامپیوتر محدود است. تنها راه اجتناب از بروز خطای گرد کردن این است که عملیات محاسباتی برای اعداد صحیح باشد که در کاربردهای عملی خیلی به ندرت رخ می‌دهد. البته باید به این نکته توجه داشت که برای کاهش خطای قطع کردن نمی‌توانیم به هر میزان که بخواهیم اندازه مش‌ها را کاهش دهیم زیرا موجب افزایش تعداد عملیات‌های محاسباتی و در نتیجه افزایش خطای گرد کردن می‌شود. برای مجموع خطاهای گرد کردن و قطع کردن (یا همان گسسته سازی) می‌توان یک

منحنی بر حسب اندازه مش همان طور که در شکل (۲-۳) می بینید در نظر گرفت. این منحنی دارای یک نقطه مینیمم است پس به ازای یک اندازه کمترین خطا رخ می دهد [۱].



شکل (۲-۳): خطا به عنوان تابعی از اندازه مش

یک الگوریتم عددی پایدار گفته می شود اگر خطای کوچک در هر مرحله، تولید خطای انبساطی کوچکتر کند و در غیر این صورت ناپایدار است. نتیجه ناپایداری بروز یک پاسخ بیکران است. برای تعیین اینکه یک الگوریتم اختلاف محدود پایدار است پارامتر خطایی به نام ϵ^n تعریف می کنیم که n گام زمانی است که خطا در آن ایجاد شده و فرض می کنیم که یک متغیر مستقل است و مقدار این خطا در گام زمانی $n+1$ را تعریف می کنیم:

$$\epsilon^{n+1} = g\epsilon^n$$

که g را به عنوان فاکتور تقویت می شناسیم. در حالت های پیچیده، ما دو یا چند متغیر مستقل داریم و این رابطه شکل کاملتری به خود می گیرد:

$$[\epsilon]^{n+1} = [G][\epsilon]^n$$

که $[G]$ ماتریس تقویت است. برای پایداری باید شرط زیر برقرار باشد:

$$|\epsilon^{n+1}| \leq |\epsilon^n| \Rightarrow g \leq 1$$

و برای حالت کلی

$$\|G\| \leq 1$$

معادلاتی که ما در اینجا می‌خواهیم به حل آن‌ها بپردازیم معادلات کرل ماکسول هستند.
معادلات کرل ماکسول در حوزه زمان :

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} - J_m$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J_e$$

$$\nabla \cdot D = \rho, \quad D = \epsilon E, \quad J_e = \sigma E$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad B = \mu H, \quad J_m = \sigma^* H$$

E بردار میدان الکتریکی است و واحد آن ولت بر متر می‌باشد. D بردار چگالی شار الکتریکی و واحد آن کولمب بر متر مربع. H بردار میدان مغناطیسی است و واحد آن آمپر بر متر می‌باشد. B بردار چگالی شار مغناطیسی و واحد آن وبر بر متر مربع. J_e بردار چگالی جریان القایی الکتریکی با واحد آمپر بر متر مربع و J_m بردار چگالی جریان القایی مغناطیسی که واحد آن ولت بر متر مربع می‌باشد [۳].
 μ نفوذپذیری مغناطیسی با واحد هانری بر متر و ϵ گذردهی الکتریکی با واحد فاراد بر متر است.
 ρ هم چگالی حجمی بار الکتریکی است که واحد آن کولن بر متر مکعب است. σ و σ^* به ترتیب هدایت الکتریکی و هدایت مغناطیسی با واحد زیمنس بر متر و اهم بر متر هستند.

باید توجه کرد که جریان مغناطیسی یا چگالی آن وجود واقعی ندارد اما برای مدل سازی برخی از پدیده‌های فیزیکی ناچاریم وجود چنین جریانی را بپذیریم.

جفت معادله کرل ماکسول را می‌توان به فرم دیگری بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} (\nabla \times E + \sigma^* H)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times H - \sigma E)$$

با نوشتن مولفه‌های برداری عملگر کرل در مختصات مستطیلی، به یک دستگاه با شش معادله اسکالر

می‌رسیم:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma^* H_x \right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma^* H_y \right)$$

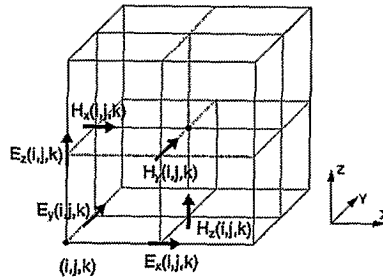
$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma^* H_z \right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right)$$

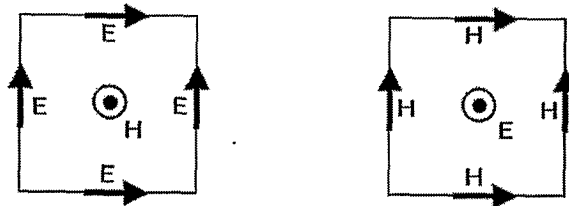
برای بدست آوردن معادل تفاضلی برای این دستگاه شامل شش معادله اسکالر مشتقی، از تقریب تفاضل مرکزی استفاده می‌کنیم. با این تقریب به یک دستگاه با شش معادله جبری می‌رسیم که باید همزمان حل شوند. حل همزمان یک دستگاه با شش معادله جبری برای یک فضای مش بندی شده چه به روش ماتریسی و چه به روش تکرار کار بسیار مشکلی است.

در سال ۱۹۶۶ فردی به نام یی [۴] پیشنهادی برای حل این دستگاه ارائه کرد و بعدها کار او توسط تافلو [۵] و سایرین دنبال شد. او برای مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی یک چنین خاص در نظر گرفت. با این چنین حل دستگاه معادلات جبری از حالت همزمانی در می‌آید و کار بسیار آسان می‌شود. به این صورت که برای هر گام زمانی ابتدا، به عنوان مثال مولفه‌های میدان الکتریکی از روی مولفه‌های میدان مغناطیسی محاسبه می‌شود و بعد از روی مولفه‌های میدان الکتریکی، مولفه‌های میدان مغناطیسی جدید بدست می‌آید. برای از دست ندادن مولفه‌های میدان گام‌های قبلی، در هر گام زمانی مولفه‌های میدان را در حافظه فیزیکی کامپیوتر ذخیره می‌کنیم. با ادامه همین کار مولفه‌های میدان برای گام‌های بعدی قابل محاسبه است. حال به معرفی پیشنهاد او که به سلول یی شهرت یافته است می‌پردازیم [۶].



شکل (۲-۴) سلول Yee

با این پیشنهاد هر مولفه میدان الکتریکی بوسیله چهار مولفه میدان مغناطیسی احاطه می‌شود و هر مولفه میدان مغناطیسی توسط چهار مولفه میدان الکتریکی.



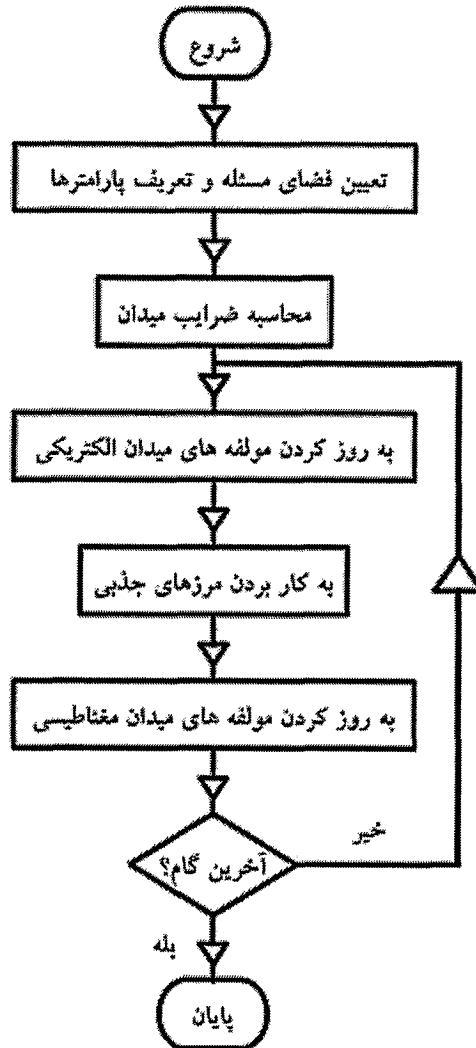
شکل (۲-۵): نحوه قرار گرفتن میدان‌ها به دور یکدیگر در سلول Yee

اگر مسئله ما مستقل از بعد سوم باشد و در دو بعد قابل حل باشد، شکل دو بعدی سلول یی از مکعب به یک مربع تقلیل می‌یابد که مولفه‌های میدان بر روی مربع، بسته به اینکه مد انتشاری TE یا TM باشد به صورت شکل‌های زیر در می‌آید:



شکل (۶-۲): سلول Yee برای حالت دو بعدی

با این تفاسیر می‌توانیم برای روش حل عددی $FDTD$ یک فلوچارت [۶] در نظر بگیریم:



شکل (۷-۲): فلوچارت روش حل عددی $FDTD$