بِسْمِ اللّٰهِ الرّحمٰنِ الرّحيمِ

تقدیم به:

آستان حقیقت،

و

پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت، از رفتارشان محبت، و از صبرشان ایستادگی را آموختم،

و

برادر و خواهر عزیزم.

سپاسگزاری

سپاس خدایی که انسان را آفرید و او را به فضیلت تعلیم و تعلم بر دیگر مخلوقات برتری بخشید. خداوندا تو را شاکرم که همواره یاری‌رسانم بوده‌ای و دریچه‌های علم و معرفت را فرارویم گشوده‌ای و اکنون که این پایان نامه به اتمام رسید، بر خود لازم می دانم از الطاف و عنایت های بی دریغ همه عزیزانی که مرا در این راه راهنمایی کرده اند، سپاسگزاری نمایم.

تشکر و قدردانی بی‌دریغ از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی تا به امروز مشوق و پشتوانه‌ام بوده‌اند و برادر و خواهر نازنینم که همراه همیشگی‌ام بوده و هستند.

سپاس ویژه از جناب آقای دکتر حسام‌الدینی که در طول دوران انجام این پایان‌نامه با حسن اخلاق همیشگی‌شان در به سرانجام رساندن آن کمک شایانی کردند.

از اساتید محترم دکتر جاهدی و دکتر مهدی‌پور که مشاورت این پروژه را به عهده داشتند نیز تشکر می‌نمایم.

سپاس و درود بر دیگر اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز، جناب آقای دکتر فخارزاده جهرمی، جناب آقای دکتر ملکی، جناب آقای دکتر هاشمی و جناب آقای دکتر حاجی شعبانی که در طول این دوره افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

هم‌چنین از دوستان و هم‌کلاسیهای عزیز و مهربان که در این سه سال لحظات و خاطرات خوشی در کنارشان رقم خورد قدردانی می‌نمایم.

نیست بر دلم جز الف قامت دوست   چه کنم حرف دگر یاد نداد استادم.

چکیده

کاربردهای موجک در حل معادلات دیفرانسیل جزئی و معادله پینلوی

بوسیله‌ی:

سیمین شکرپز

اخیرا به توسعه جواب‌های عددی متناظر در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی توجه زیادی شده است. یکی از جدیدترین تحولات در ریاضیات کاربردی، استفاده از نظریه موجک‌ها است. امروزه نظریه جدید موجک‌ها جایگزین نظریه‌های کلاسیک ازجمله تفاضلات متناهی، تبدیلات لاپلاس و روش کلاسیک نظریه فوریه برای حل مسائل مختلف کاربردی شده است. مراکز صنعتی و آزمایشگاهی تحقیقاتی نیز با بکارگیری روش‌های مؤثر تقریب موجکی سعی در بالابردن کیفیت محصولات و دقت آزمایش‌های خود دارند. این نظریه جدید ریاضیات کاربردی مؤثرترین پل ارتباط علم ریاضیات نظری به عملی است که بکارگیری نتایج این علم در مراکز صنعتی و تحقیقاتی شدیداً احساس می‌شود.

فهرست

عنوان **صفحه**

فهرست جدولها

فهرست شکلها

فصل ۱

مقدمات

فصل اول

مقدمات

۱—۱ تاریخچه

در تاریخ ریاضیات ریشه‌های متعددی را می‌توان برای موجک‌ها سراغ گرفت. درمورد کارهای قبل از سال ۱۹۳۰ می‌توان به آنالیز فرکانس‌ها اشاره کرد، که به‌وسیله فوریه[1] [۲۷] شروع شد.

ایده‌ی نمایش یک تابع برحسب مجموعه‌ی کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه، ریاضیدان و فیزیکدان بین سالهای ۱۸۰۶—۱۸۰۲، طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع بکار گرفته شد. به‌عبارت دیگر فوریه نشان داد که یک تابع f را می‌توان به‌وسیله حاصل‌جمع بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $sin(ax)$ و $cos(ax)$ نمایش داد که پایه‌های فوریه نیز نامیده می‌شوند[۳۳، ۲۷].

پایه‌های فوریه به صورت ابزارهایی اساسی، با کاربردهای فوق‌العاده متواتر در علوم، در آمده‌اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و کمیت‌های فیزیکی فراوان بکار می‌روند. با گذشت زمان ضعف پایه‌های فوریه نمایان شد. دانشمندان پی بردند پایه‌های فوریه و نمایش توابع سینوس‌وار نه تنها ایده‌آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند. هم‌چنین آنها متوجه

[1] J. Fourier

شدند تبدیل فوریه فقط بر حسب توابع پایه مورداستفاده قرار می‌گیرد و برای توابع غیرپایه کارآمد نیست. البته در سال ۱۹۴۶ با استفاده از توابع پنجره‌ای، که منجر به تبدیل فوریه پنجره‌ای شد این مشکل حل شد[۲۹].

در سال ۱۹۰۹ هار[۲][۳۶] اولین کسی بود که به موجک‌ها اشاره کرد. امروزه هم، این موجک‌ها به همان نام یعنی به موجک‌های هار معروف‌اند. موجک‌های هار دارای دامنه تعریف فشرده بوده و غیرمشتق‌پذیر و ناپیوسته هستند. در سال ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختارهای تکین موضوعی به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند و بعد از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیک فرانسوی بنام ژان مورلت[۳][۳۵، ۳۴، ۳۲] متوجه شد که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ممکن در اکتشافات زیرزمین نیستند، این موضوع در آزمایشگاهی متعلق به الف آکلین منجر به یکی از اکتشافات تبدیل به موجک‌ها گردید.

در سال ۱۹۸۰ ایومیر[۴][۵۴] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه‌های موجکی متعامد را کشف کرد. سپس در سال ۱۹۸۲مورلت مفهوم موجک و تبدیل موجک را به‌عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین‌لرزه وارد کرد و گراسمن[۵] فیزیکدان نظری فرانسه فرمول وارونی را برای تبدیل موجک بدست آورد[۳۲].

در سال ۱۹۸۶ میر[۵۳، ۵۲] و مالات[۶][۴۸] از پایه‌های موجک متعامد آنالیز چند ریزه ساز(چند تفکیکی) را ساختند. در سال ۱۹۹۰ مورنزی همراه با آنتوان موجک‌ها را به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد دیگر گسترش دادند. بدین ترتیب بود که آنالیز موجکی پایه‌گذاری گردید. آنالیز موجک منشأ بسیاری از تحولات در علوم و مهندسی شده است و کاربردهای

---

[۲] A. Haar
[۳] Jean Morlet
[۴] Eve. Meyer
[۵] Alex Grossmann
[۶] Stephans Mallat

بسیاری را می‌توان برای آن ذکر کرد که در فصل دوم و سوم به‌طور مفصل به آن می‌پردازیم.

۱—۲ مطالعات انجام شده درباب موجک

بعد از این‌که مفهوم موجک مطرح گردید، آلکس گراسمن فرانسوی اهمیت تبدیل موجک مورلت را تشخیص داد که شبیه به فرمول‌های کیفیت منسجم کوانتوم می‌باشد و آن را به‌عنوان فرمول انعکاس[۷] برای تبدیلات موجک بکار بست. سپس در سال ۱۹۸۴ اختراع مشترک مورلت و گراسمن [۳۴، ۳۵] منجر به مطالعه جزیی‌تر تبدیل موجک پیوسته و کاربردهای آن شد و از اقدامات آن دو مشخص شد که قضیه موجک روش جدیدی را برای تجزیه تابع ایجاد کرده است. در ادامه، سال ۱۹۴۶ دنیز گابور[۸][۲۹] فیزیکدان انگلیسی اولین بار تبدیل فوریه پنجره‌ای یا تبدیل گابور با استفاده از تابع توزیع گاوسی[۹] به صورت تابع پنجره‌ای[۱۰] را مطرح کرد. اما موجک‌های گابور حاوی بعضی مشکلات الگوریتمی است که این مشکلات به‌طور موفقیت آمیزی در سال ۱۹۸۷توسط مالوار[۱۱][۵۱] حل شد. در ادامه مالوار موجک‌های جدیدی را معرفی کرد که بنام موجک‌های مالوار شناخته می‌شوند، و این موجک‌ها برتر از سایر موجک‌ها نظیر موجک‌های گابور و مورلت—گراسمن می‌باشند. در سال ۱۹۸۵ میر ریاضیدان فرانسوی ارتباط عمیق میان فرمول کالدرون[۱۲] در آنالیز هارمونیک[۱۳] و الگوریتم مورلت گراسمن را ایجاد کرد. با استفاده از اطلاعات مربوط به عملگرهای کالدرون—زیگماند[۱۴] و قضیه پلی—لیتلوود[۱۵]، میر توانست پایه و اساس قضیه موجک را ارائه دهد. اولین موفقیت‌ها

---

[۷] Inversion formula
[۸] Dennis Gabor
[۹] Gaussian distribution function
[۱۰] Window function
[۱۱] H. Malvar
[۱۲] Calderon
[۱۳] Harmonic analysis
[۱۴] Zygmund
[۱۵] Paley-Littlewood

در زمینه آنالیز موجک توسط دابشی، گراسمن و ساختار میر از بسط موجک غیرمتعامد در سال ۱۹۸۶ حاصل شد[۱٦].

در سال‌های ۱۹۸٦–۱۹۸۵، کار بعدی میر و لوماری [۱٦] [۴۷] در ساخت پایه موجک متعامدیکه هموار روی R و R^N پایه‌گذاری شد که آغاز همکاری آنها در قضیه موجک را نتیجه داد. همان زمان استفان مالات فیلترهای مزدوج درجه دوم را سازماندهی کرد که نقش بسیار مهمی در ساخت پایه‌های موجک متعامد ایفا می‌کند و سیستم هار را تعمیم می‌دهد. در ادامه میر و مالات کشف کردند که پایه‌های موجک متعامد می‌توانند به‌طور سیستماتیک از یک فرمول عمومی تبعیت کنند. اوج همکاری آن دو به آنالیز چند ریزه ساز[۱۷] شهرت یافت[۵۵]. هم‌چنین مالات الگوریتم تجزیه[۱۸] و الگوریتم بازسازی[۱۹] را بااستفاده از آنالیز چند ریزه ساز ایجاد کرد[۵۰، ۴۹]. حاصل کار مالات سرچشمه بسیاری از پیشرفت‌های جدید درباب موجک شد. چند ماه بعد باتل (۱۹۸۷)[۲۰][۳] و لوماری (۱۹۸۸)[۴٦] به‌طور مستقل ساختار موجک‌های متعامد اسپلاین با میرایی نمایی[۲۱] را پیشنهاد کردند.

از لحاظ مفاهیم ریاضی هدف آنالیز چند ریزه ساز ارائه تابع (سیگنال) f به صورت حد یک سری از تقریبات متوالی است که هرکدام نوع بهتری از تابع f را دربر می‌گیرند. این تقریبات متناظر با سطوح متفاوتی از جواب هستند. بنابراین آنالیز چند ریزه ساز یک روش قراردادی برای ساخت پایه‌های موجک متعامد با بکارگیری مجموعه نامتناهی از قاعده‌هاست. هدف توصیف فرآیندهای مختلف مربوط به مطالعه توابع و تصاویر در مقیاس‌های مختلف می‌باشد. از طرفی می‌توان فضای کل تابع را به زیرفضاهای بخصوص $V_n \subset V_{n+1}$ تجزیه کرد

---

[۱٦] P. G. Lemarie
[۱۷] Multiresolution analysis
[۱۸] Decomposition algorithm
[۱۹] Reconstruction algorithm
[۲۰] G. Battle
[۲۱] Exponential decay

که در آن V_n شامل توابع با مقیاس کوچکتر در V_{n+1} می‌باشد و تجزیه هر تابع به مؤلفه‌هایش در مقیاس‌های متفاوت را نتیجه می‌دهد به‌طوری که یک مؤ لفه بخصوص از تابع عمومی f در هر زیرفضا اتفاق بیفتد. این مولفه‌ها می‌توانند تقریب بهتری از تابع f را توصیف کنند. لذا از نقطه نظر کاربردی آنالیز چند ریزه ساز یک روند کاری مؤثر و ریاضی وار برای تجزیه سلسله مراتب یک تابع به مؤلفه‌هایش در مقیاس‌های مختلف ارائه می‌دهد. با الهام‌بخشی از کار میر، دابشی [۲۲] همکاری قابل توجهی را برای قضیه موجک با ساخت خانواده‌های موجک متعامدیکه با تکیه گاه فشرده و درجات هموارى مختلف ارائه داد[۱۵]. هر[۲۳] (۱۹۸۸)[۳٦] نیز روی مطالعه موجک‌ها و کاربردهای گوناگون آن تأثیر قابل توجهی گذاشت. مطالعات هر به‌طور مستقیم ارتباط بین موجک‌های پیوسته روی R و موجک‌های گسسته روی Z و Z^N را توضیح داد.

نظریه قاب‌ها بعد از این‌که در سال ۱۹۵۲ توسط دافین[۲۴] و اسچفر[۲۵][۲۴] بیان شد، به‌طور جزئی‌تر در سال‌های ۱۹۹۲ — ۱۹۹۰، توسط دابشی مطالعه شد[۱۴]. سپس در سال ۱۹۹۲ کوهن[۸] موجک‌های دو به دو متعامد را مطالعه و بررسی کرد و در سال‌های ۱۹۹۲ — ۱۹۹۰، چای[۲٦] و وانگ[۲۷] [۷] به بررسی موجک‌های اسپلاین و آنالیز موجک‌های شبه‌متعامد[۲۸] با تکیه‌گاه فشرده پرداختند. از طرف دیگر در سال‌های ۱۹۹۲ — ۱۹۹۱، بلکین[۲۹]، کویفمن[۳۰] و روخلین[۳۱] [۴] آنالیز چند ریزه ساز را که به صورت تابع مقیاس کاملاًمتعامد تعمیم یافته

---

[۲۲] I. Daubechies
[۲۳] Her
[۲۴] R. J. Duffin
[۲۵] Schaeffer
[۲٦] W. Chui
[۲۷] Wang
[۲۸] Semi-orthogonal wavelets
[۲۹] Beylkin
[۳۰] R.R. Coifman
[۳۱] Rokhlin

است برای مطالعه عملگرهای انتگرال روی $L^2(R)$ توسط یک ماتریس در یک پایه موجک بکار بردند. سپس در سال ۱۹۹۲ در ادامه روند آنالیز موجک کویفمن در همکاری با میر و ویکرهوسر[۳۲][۱۲] بسته‌های موجک[۳۳] را کشف کردند که برای طرح‌های کارا در نمایش و فشرده‌سازی سیگنال[۳۴] و تصاویر بکار می‌رود[۵۶]. این به ساختار پایه‌های متعامدیکه با توسعه روش آنالیز چند ریزه ساز و کاربردهای فیلترهای مزدوج درجه دوم[۳۵] منجر شد. کاربردهای فراوانی از موجک در بسیاری از زمینه‌های مختلف شامل ریاضی فیزیک و مهندسی موجود است، از جمله در پردازش سیگنال، کامپیوتر، نظریه آشوب[۳۶]، پردازش تصویر[۳۷]، گرافیک کامپیوتری، اپتیک کوانتوم، مهندسی پزشکی، قضیه ماتریس و نمونه‌گیری، سیستم‌های بصری و شنیداری و ....

۳—۱ روش‌های حل معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی در بسیاری از زمینه‌های فیزیک و مهندسی رایج است. در سال‌های اخیر تلاش‌های فراوانی برای توسعه روش‌های حل در این زمینه وجود داشته است. از طرفی بسیاری از معادلات نمی‌توانند به صورت تحلیلی به جواب برسند لذا باید آنها را تقریب بزنیم. برای تقریب جواب‌ها الگوریتم‌های مختلفی مطالعه شده‌اند. روش موجک نسبت به روش‌های دیگر فواید متعددی دارد. به‌عنوان مثال موجک‌ها توانایی نمایش توابع در سطوح متفاوتی از جواب را دارند.

در این تحقیق چگونگی حل معادلات دیفرانسیل با بکارگیری موجک را شرح می‌دهیم.

[۳۲] Wickerhauser
[۳۳] Wavelet packets
[۳۴] Signal
[۳۵] The quadratic mirror filters
[۳۶] Turbulence
[۳۷] Image proccessing

سپس روش موجک گالرکین[۳۸] و روش هم‌مکانی موجک[۳۹] را موردبحث قرار می دهیم. خصوصیات این روش‌ها در فصل سوم مورد بحث قرار گرفته است. در فصل‌های چهارم و پنجم هر دو روش فوق برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی بکار گرفته شده‌اند. نتایج عددی حاصل نیز با روش‌های دیگر مقایسه می‌شوند.

در این فصل بعد از بیان پیش‌نیازها، روش‌های عددی و تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش‌های تحلیلی مطرح شده برای مقایسه جواب‌های عددی به کار می‌روند.

۱—۴ پیش‌نیازها

درابتدا بعضی نمادها و نتایجی از آنالیز فوریه را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۱: فضای برداری H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم اگر به هر جفت از بردارهای y, x در H یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ بنام حاصل‌ضرب داخلی y, x چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

(۱) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$،

(۲) اگر $x, y, z \in H$ آنگاه: $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$،

(۳) اگر $x, y \in H$ و α اسکالر باشد، آنگاه: $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$،

(۴) به ازای هر $x \in H$: $\langle x, x\rangle \geq 0$،

(۵) $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

[۳۸] Galerkin wavelet method
[۳۹] Wavelet collocation method

فضای ضرب داخلی H با تابع

$$d : H \times H \to R^{+} \cup \{\circ\}$$

$$d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

یک فضای متریک است. اگر فضای ضرب داخلی H با این متر تام باشد، آن را فضای هیلبرت گوییم.

تعریف ۲.۱: با تعریف فوق H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است اگر زیرمجموعه‌ی شمارای E از X وجود داشته باشد به‌طوری که :

$$\overline{E} = H$$

یعنی زیرمجموعه‌ی شمارای E از X در X چگال باشد.

تعریف ۳.۱: فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از R باشد. فضای تمام توابع مختلط مقدار اندازه‌پذیر لبگ روی X که در آن

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p dx < \infty$$

را با $L^p(X)$ نشان می‌دهیم.

$$L^p(X) = \{f : X \to C : \text{اندازه‌پذیر لبگ است } f, \ \int_X |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

اگر $p = ۲$، آنگاه $L^۲(R)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle = \int_R f(x)\overline{g(x)}dx$$

می‌باشد.

تعریف ۴.۱: برای $p \geq ۱$، فضای $L^p[\circ, ۲\pi]$ شامل توابع اندازه‌پذیر لبگ مانند f با دوره تناوب ۲π است به‌طوری که

$$\|f\|_p = (\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} |f(x)|^p dx)^{\frac{۱}{p}} < \infty.$$

توجه می‌کنیم که $۱ \in L^p[\circ, ۲\pi]$ و $\|۱\|_p = ۱$.

قضیه ۵.۱: فرض کنیم p, q نماهای مزدوج بوده ($\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$)، $۱ < p, q < \infty$ و X یک فضای اندازه‌پذیر باشد. هم‌چنین فرض کنیم f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[\circ, +\infty)$ باشند. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) (نامساوی هولدر) $\int_X fg dx \leq (\int_X f^p dx)^{\frac{۱}{p}} (\int_X g^q dx)^{\frac{۱}{q}}$

(ب) (نامساوی مینکوفسکی) $(\int_X (f+g)^p dx)^{\frac{۱}{p}} \leq (\int_X f^p dx)^{\frac{۱}{p}} + (\int_X g^p dx)^{\frac{۱}{p}}$

اگر $p = q = ۲$ نامساوی مینکوفسکی را نامساوی شوارتز[۴۰] می‌نامیم.

اثبات: برای اثبات به قضیه‌های (۱.۲.۷) و (۱.۲.۸) از [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۱: فرض کنیم V فضای برداری بر میدان F باشد، زیرمجموعه S از بردارها را مستقل‌خطی گویند هرگاه بردارهایی متمایز مانند $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، . . . ، α_n در S و اسکالرهای $c_۱$، $c_۲$، . . . ، c_n باشند به‌طوری که اگر

$$c_۱\alpha_۱ + c_۲\alpha_۲ + ... + c_n\alpha_n = \circ$$

آنگاه $c_۱ = c_۲ = ... = c_n = \circ$.

لذا یک پایه برای V مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای V است که فضای V را می‌سازد.

[۴۰] Schwarz

قضیه ۷.۱: فرض کنیم W زیرفضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی V و E تصویر متعامد V روی W باشد، در این‌صورت E تبدیل خطی خودتوان از V روی W است، $W^{\perp}$ فضای پوچ E است، و

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

اثبات: برای اثبات به قضیه (۵) از فصل هشتم [۷۴] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۸.۱: اگر V فضای برداری بر روی میدان F باشد، یک تبدیل خطی f از V در هیأت اسکالرهای F یک تابعک خطی روی V نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر f تابعی

است از V در F که به ازای همه بردارهای α و β از V و اسکالرهای c از F،

$$f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta).$$

تعریف ۹.۱: اگر V فضای برداری باشد، دسته‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی روی V که با V^* یا $L(V, F)$ نشان داده می‌شود را فضای دوگان V می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۱: اگر V فضای برداری با بعد متناهی بر هیأت F و $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، پایه‌ی دوگان یکتای $\beta^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ برای V^* وجود دارد به‌طوری که:

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$$

اثبات: برای اثبات به قضیه‌های (۱) و (۱۵) از فصل سوم [۷۴] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۱.۱: هرگاه K حلقه‌ی جابجایی با عنصر همانی و V فضای برداری بر K و r عدد صحیح مثبتی باشد، تابع L از $V^r = V \times \ldots \times V$ در K چندخطی نامیده می‌شود هرگاه $L(\alpha_۱, \ldots, \alpha_r)$ به‌عنوان تابعی از هر α_i، وقتی α_jهای دیگر ثابت نگه داشته شوند، خطی باشد. یعنی به ازای هر i،

$$L(\alpha_۱, \ldots, c\alpha_i + \beta_i, \ldots, \alpha_r) = cL(\alpha_۱, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r) + L(\alpha_۱, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_r).$$

به چنین تابعی گاهی یک r—تانسور روی V گفته می‌شود.

تعریف ۱۲.۱: توابع چندخطی $f : X_۱ \times \ldots \times X_p \to K$ و $g : Y_۱ \times \ldots \times Y_q \to K$ را در نظر می‌گیریم. ضرب تانسوری f و g عبارتست از نگاشت

$$f \bigotimes g : X_۱ \times \ldots \times X_p \times Y_۱ \times \ldots \times Y_q \to K$$

که به‌وسیله رابطه‌ی

$$(f \bigotimes g)(x_۱, \ldots, x_p, y_۱, \ldots, y_q) = f(x_۱, \ldots, x_p) g(y_۱, \ldots, y_q)$$

معین می‌شود.

تعریف ۱۳.۱: ایزومتری نگاشتی است که طول را تحت انتقال ثابت نگه می‌دارد. هم‌چنین هر ایزومتری حافظ ضرب داخلی است.

تعریف ۱۴.۱: دو عنصر x و y از فضای هیلبرت H را متعامد گوییم و می‌نویسیم $x \bot y$ هرگاه

$$\langle x, y \rangle = ۰.$$