بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

ساختار مترویدهای ۳–همبند

با پهنای مسیر سه

طیبه رسول زاده

مرکز آموزش‌های نیمه حضوری دانشگاه ارومیه

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر قدرت‌اله آزادی

پاییز ۱۳۸۸

پایان نامه **خانم طیبه رسول زاده** به تاریخ **۸۸/۸/۲۰** شماره ۳ -۱۹۷ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه **عالی** و نمره ۱۸ قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: **آقای دکتر قدرت اله آزادی**

۲- استاد مشاور: -

۳- داور خارجی: **آقای دکتر حبیب اذانچیلر**

ازادی

۴- داور داخلی: **آقای دکتر خیراله هوشیار قهرمانلو**

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: **آقای دکتر سعید استادباشی**

۸۸/۸/۲۲

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ علم و دانش را نصیب و روزی‌ام گرداند.

با لطف و عنایت خداوند منان توانستم این پایان نامه را به کمک استاد ارجمندم جناب آقای دکتر آزادی تدوین کنم که جا دارد سپاس بی‌دریغ خود را نثار ایشان کنم که با زحمات فراوانشان مرا مدیون خود ساختند.

همچنین از محضر اساتید محترم آقایان دکتر اذانچیلر، دکتر هوشیار قهرمانلو، دکتر استادباشی، دکتر سزیده و دیگر اساتید محترم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از تمام اعضای خانواده‌ام به خاطر همیاری و کمک‌های بی‌دریغ‌شان در طول تدوین این پایان نامه، تشکر و قدردانی می‌کنم.

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و متروید ۱

۱.۱ مباحثی ازنظریه گراف ۱

۲.۱ مباحثی از نظریه متروید ۵

۲ همبندی مترویدها ۱۸

۱.۲ همبندی ۱۸

۲.۲ همبندی مراتب بالاتر ۲۴

۳ مترویدهای دنباله‌ای ۳۳

۱.۳ ۳—جداسازی‌های دنباله‌ای ۳۳

۲.۳ ترویدهای دنباله‌ای ۴۰

۳.۳ لم‌های مقدماتی روی ۳—دنباله ها ۵٦

۴ ویژگی‌های ترویدهای دنباله‌ای و ۳—دنباله‌ها ٦۸

۵ ترتیب‌های دنباله‌ای ۷٦

٦ فن‌ها ۸۱

۷ اثبات قضایای بخش ۲.۳ ۱۰۲

پیشگفتار

دراین پایان نامه تمامی ترتیبهای دنباله‌ای که یک متروید می‌تواند داشته باشد را مطرح کرده و چگونگی ایجاد یک متروید دنباله‌ای از متروید دنباله‌ای دیگر را ارائه کرده‌ایم. به ویژه ثابت خواهیم کرد که متروید M دارای دو انتهای ثابت می‌باشد که هر کدام از آن‌ها یک قطعه ماکسیمال، هم—قطعه ماکسیمال یا یک فن ماکسیمال می‌باشند.

متروید ۳—همبند M دنباله‌ای یا دارای پهنای مسیر سه می‌باشد، اگر بتوان مجموعه زمینه آن یعنی $E(M)$ را به صورت $(e_۱, e_۲, ..., e_n)$ مرتب کرد به طوری که برای هر $k \in \{۳, ۴, ..., n-۳\}$، افراز $(\{e_۱, e_۲, ..., e_k\}, \{e_{k+۱}, e_{k+۲}, ..., e_n\})$ یک ۳—جداسازی آن باشد. کانینگهام[۱] و ادمونس[۲] برای متروید‌های ۲—همبند M، یک تجزیه درختی از متروید را به دست آورده‌اند که نمایش دهندهٔ همهٔ ۲—جداسازی‌های متروید M می‌باشد. برای متروید‌های ۳—همبند، آکسلی[۳] یک تجزیه درختی از M را به دست آورده که همهٔ ۳—جداسازی های غیردنباله‌ای متروید را نشان می‌دهد.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر تنظیم شده است.

R.Hall, J.Oxley, C.Semple, The structure of 3−connected matroids of path width three,

J.Combin.Theory Ser.B 28 (2007) 964-989

Cunningham[۱]
Edmonds[۲]
Oxley[۳]

مقدمه

این پایان‌نامه در ۷ فصل تنظیم شده است.

فصل اول را با ارائه مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و ماترویید آغاز می‌کنیم.

در فصل دوم همبندی ماتروییدها و همبندی مراتب بالاتر را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

در فصل سوم به ۳—جداسازی های دنبا له‌ای و ماتروییدهای دنبا له‌ای پرداخته‌ایم و نشان داده‌ایم که ترتیب های دنباله‌ای از M، دارای انتهاهای راست و چپ یکسان می‌باشند و چهار قضیه اصلی این پایان نامه را مطرح کرده‌ایم.

فصل چهارم به ویژگیهای ۳—دنبا له‌ها می‌پردازد و نشان می‌دهد که قطعه‌ها، هم—قطعه‌ها، چرخ‌ها و چرخش‌ها تنها ماتروییدهای ۳—همبند می‌باشند که یک ترتیب دوری دارند که هر زیردنبا له متوالی از عضوهایشان ۳—جداکننده می‌باشد.

در فصل پنجم ترتیبهای دنبا له‌ای را مطرح کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که اگر یک مثلث یا سه‌تایی در یک انتهای ترتیب دنبا له‌ای از ماترویید دنباله‌ای M واقع شود، در دیگر ترتیبهای دنبا له‌ای از M، متعلق به یک قطعه، هم—قطعه یا یک فن خواهد بود.

در فصل ششم فن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم و ثابت کرده‌ایم در یک ترتیب دنبا له‌ای از M که شامل یک فن ماکسیمال است، یا سه عضو اول ترتیب دنبا له‌ای در فن واقع می‌باشند یا سه عضو آخر آن.

در فصل هفتم که فصل آخر پایان‌نامه می‌باشد؛ اثبات چهار قضیه اصلی فصل سوم این پایان‌نامه را ارائه کرده‌ایم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و متروید

دراین فصل تعاریف و نتایج مقدماتی را که در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌کنیم.

۱.۱ مباحثی ازنظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف[۱] G، سه‌تایی است متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ که اعضای آن رأس‌های گراف[۲]، و مجموعه $E(G)$ که اعضای آن یال[۳]‌های گراف نامیده می‌شوند به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می‌کند.

اگر $e = uv$ یک یال ازگراف G باشد، آن‌گاه u و v را نقاط انتهایی[۴] آن یال گوییم. علاوه بر این u و v را دو

[۱] Graph
[۲] vertex
[۳] edge
[۴] End points

رأس مجاور[۱] نیز می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $e = uv$ یالی از گراف G باشد که نقاط انتهایی آن یکسان می باشند، آن‌گاه e را یک **طوقه** [۲] گوییم؛ و اگر دو یال دارای نقاط انتهایی یکسان باشند آن‌ها را **موازی** [۳] می نامیم.

گراف فاقد طوقه و یال‌های موازی را ساده [۴] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ درجه [۵] رأس v_i که با نماد $d(v_i)$ نمایش داده می شود، تعداد یال‌هایی می باشد که از آن رأس می گذرند.

تعریف ۴.۱.۱ گراف H را یک زیرگراف [۶] گراف G گوییم هرگاه $V(H)$ و $E(H)$ به ترتیب زیر مجموعه هایی از $V(G)$ و $E(G)$ باشند.

تعریف ۵.۱.۱ هرگاه $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند، اجتماع[۷] آن‌ها که با نماد $G_۱ \cup G_۲$ نمایش داده می شود، گرافی است با مجموعه ی رئوس $V(G_۱) \cup V(G_۲)$ و مجموعه یالهای $E(G_۱) \cup E(G_۲)$.

تعریف ۶.۱.۱ دو گراف G و H را یکریخت [۸] گوییم هرگاه نگاشت های دو سویی $\psi : V(G) \to V(H)$ و $\theta : E(G) \to E(H)$ چنان موجود باشند که $uv \in E(G)$، اگروتنها اگر $\psi(u)\psi(v) \in E(H)$. دو گراف یکریخت G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می دهیم.

---

[۱] Adjacent
[۲] Loop
[۳] Multiple edges
[۴] Simple
[۵] Degree
[۶] Subgraph
[۷] Union
[۸] Isomorphic

تعریف ۷.۱.۱ در یک گراف n رأسی مانند G، اگر هر دو رأس دلخواه آن با هم مجاور باشند، گراف را کامل [۱] گوییم و با نماد K_n نمایش می دهیم .

تعریف ۸.۱.۱ مکمل[۲] گراف G که آن را با نماد $\overline{G}$ نشان می‌دهیم، گراف ساده ای با مجموعه رئوس $V(G)$ است که در آن $uv \in E(\overline{G})$ اگر و تنها اگر $uv \notin E(G)$.

تعریف ۹.۱.۱ دنبالهٔ $v_0 e_1 v_1 ... v_{k-1} e_k$ از عناصر گراف G را که برای هر $k \leq i \leq 1$، v_i ها رأس‌های گراف و e_i ها یال‌های آن می‌باشند به‌طوری که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند را یک گشت[۳] گوییم.

هر گشتی که در آن رئوس و لذا یال‌ها مجزا باشند، یک مسیر[۴] نامیده می‌شود.

هر مسیر بسته را یک دور[۵] گوییم .

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف فاقد دور را جنگل[۶] گویند.

لم ۱۱.۱.۱ هر u,v–گشت، شامل یک u,v–مسیر می‌باشد.

برهان : [[۸] لم ۵.۲.۱]. ■

تعریف ۱۲.۱.۱ گراف همبند[۷]، گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u - v$ مسیر موجود باشد.

---

[۱] Complete

[۲] Complement

[۳] Walk

[۴] Path

[۵] Cycle

[۶] forest

[۷] connected

تعریف ۷.۱.۱ در یک گراف n رأسی مانند G، اگر هر دو رأس دلخواه آن با هم مجاور باشند، گراف را کامل [۱] گوییم و با نماد K_n نمایش می دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ مکمل[۲] گراف G که آن را با نماد $\overline{G}$ نشان می‌دهیم، گراف ساده ای با مجموعه رئوس $V(G)$ است که در آن $uv \in E(\overline{G})$ اگر و تنها اگر $uv \notin E(G)$.

تعریف ۹.۱.۱ دنبالهٔ $v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k$ از عناصر گراف G را که برای هر $1 \leq i \leq k$، v_i ها رأس‌های گراف و e_i ها یال‌های آن می‌باشند به‌طوری که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند را یک گشت[۳] گوییم.

هر گشتی که در آن رئوس و لذا یال‌ها مجزا باشند، یک مسیر[۴] نامیده می‌شود.

هر مسیر بسته را یک دور[۵] گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف فاقد دور را جنگل[۶] گویند.

لم ۱۱.۱.۱ هر u,v–گشت، شامل یک u,v–مسیر می‌باشد.

برهان: [[۸] لم ۵.۲.۱]. ∎

تعریف ۱۲.۱.۱ گراف همبند[۷]، گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u-v$ مسیر موجود باشد.

---

[۱] Complete
[۲] Complement
[۳] Walk
[۴] Path
[۵] Cycle
[۶] forest
[۷] connected

تعریف ۱.۱.۱۳ هر زیرگراف همبند ماکسیمال گراف G را یک **مؤلفه**[۸] گراف G گویند.

تعریف ۱.۱.۱۴ یک برش رأسی[۱] گراف G، مجموعه‌ای از رأس‌ها است که با حذف آن‌ها تعداد مؤلفه‌های گراف G افزایش می‌یابد.

تعریف ۱.۱.۱۵ گراف G، k-همبند است هرگاه هر برش رأسی G دارای حداقل k-رأس باشد.

همبندی گراف G را با $K(G)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(G) = min\{k : \text{همبند است}-k \text{ ،}G\}$$

تعریف ۱.۱.۱۶ گراف جدانشدنی[۲] گرافی همبند و غیربدیهی است که هیچ برش رأسی ندارد.

تعریف ۱.۱.۱۷ گراف همبند و بی‌دور را یک درخت[۳] می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۸ گراف $G = (V, E)$ را دوبخشی [۴] گوییم، هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه مجزا چنان افراز کرد که رئوس انتهایی هر یال در افرازهای متمایزی قرار گیرند.

هرگاه تعداد عناصر مجموعه‌های X و Y به ترتیب برابر m و n باشند و هر عضو X مجاور با هر عضو Y باشد، گراف دوبخشی حاصل از آن‌ها را با نماد $K_{m,n}$ نمایش داده و آن را گراف دوبخشی کامل گوییم.

---

[۸] component
[۱] vertex cut
[۲] nonseparable graph
[۳] tree
[۴] Bipartite graph

۲.۱ مباحثی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ متروید M[1]، زوج مرتب $(E,\mathcal{I})$ می‌باشد که در آن E مجموعه‌ای متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(I۱) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I۲) هرگاه $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آن‌گاه $I' \in \mathcal{I}$.

(I۳) هرگاه I_1 و I_2 متعلق به $\mathcal{I}$ باشند و $|I_1| < |I_2|$، آن‌گاه عضوی از $I_2 - I_1$ مانند e موجود است که $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

شرط سوم را اصل استقلال گوییم.

اعضای $\mathcal{I}$ را **مجموعه‌های مستقل**[2] و مجموعه E را **مجموعه زمینه**[3] M گوییم.

مجموعه‌های مستقل ماکسیمال را پایه[4]های یک متروید گوییم.

زیرمجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، عناصر وابسته[5] متروید گوییم.

---

[1] Matroid

[2] Independant Sets

[3] Ground Set

[4] Base

[5] Dependant

مثال ۲.۲.۱ فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نام‌گذاری شده‌اند. در این‌صورت با فرض:

$E = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset,\{۱\},\{۲\},\{۴\},\{۵\},\{۱,۲\},\{۱,۵\},\{۲,۴\},\{۲,۵\},\{۴,۵\}\}$

$(E,\mathcal{I})$ یک متروید می‌باشد.

اعضای $\mathcal{I}$ تمامی زیرمجموعه‌های مستقل خطی از بردارهای ستونی ماتریس A می‌باشند. متروید بالا را یک متروید برداری[1] گوییم.

تعریف ۳.۲.۱ زیرمجموعه‌های وابسته مینیمال M را یک دور می‌نامند؛ گردایه همهٔ دورهای M را با $C(M)$ و یا با C نمایش می‌دهند؛ دوری از M که شامل n عضو باشد، یک n—دور M گویند.

مجموعه C از دورهای متروید M دارای خواص زیر است:

$(C۱)$ $\emptyset \notin C$.

$(C۲)$ هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصری از C باشند و $C_۱ \subseteq C_۲$، آن‌گاه $C_۱ = C_۲$.

$(C۳)$ هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصر متمایزی از C باشند و $e \in C_۱ \cap C_۲$، آن‌گاه عضوی از C مانند $C_۳$ چنان موجود است که $C_۳ \subseteq (C_۱ \cup C_۲) - e$.

[1] Vector Matroid

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه $\mathcal{I}$ را گردایه مجموعه‌های یال‌های تمامی زیرگراف های بی‌دور G در نظر بگیرید. در این صورت $(E, \mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را متروید دوری [۱] گراف G گوییم و با نماد $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱ دو متروید M_1 و M_2 را **یکریخت** گوییم و با نماد $M_1 \cong M_2$ نمایش می‌دهیم، هرگاه نگاشتی دوسویی مانند $\psi : E(M_1) \to E(M_2)$ چنان موجود باشد که برای هر $X \subseteq E(M_1)$، $\psi(X)$ در M_2 مستقل باشد اگر و تنها اگر X در M_1 مستقل باشد.

تعریف ۶.۲.۱ متروویدی را که یکریخت با یک مترووید دوری باشد، **مترووید گرافیک** [۲] گوییم.

تعریف ۷.۲.۱ هر مترووید فاقد طوقه و یال‌های موازی را **مترووید ساده** [۳] گوییم.

تعریف ۸.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال مترووید M را یک پایه [۴] M می‌نامند. پایه‌های مترووید M را با نماد $\mathcal{B}(M)$ یا $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهند.

لم ۹.۲.۱ اگر B_1 و B_2 دو پایه مترووید M باشند، آن‌گاه $|B_1| = |B_2|$.

برهان : [[۳] لم ۱.۲.۱]. ■

همان طور که می‌توان هر مترووید را توسط دورهایش تبیین کرد، می‌توان آن را توسط پایه‌هایش نیز مطابق قضیه زیر بیان کرد:

---

[۱] Cycle Matroid

[۲] Graphic Matroid

[۳] Simple Matroid

[۴] base

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$(B2)$ هرگاه B_1 و B_2 عناصری از $\mathcal{B}$ باشند و $x \in B_1 - B_2$، آن‌گاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ چنان موجود است که : $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه آن زیرمجموعه‌های E است که در یک عضو $\mathcal{B}$ جای می‌گیرند. دراین‌صورت $(E, \mathcal{I})$ یک ماترویید است که $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های آن است.

برهان : [[۳] قضیه ۳.۲.۱] . ■

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید و $X \subseteq E$ باشد. رتبه X را چنین تعریف می‌کنیم:

$$r(X) = Max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{I}\}$$

برای تابع رتبه فوق، لم و گزاره زیر را داریم:

لم ۱۲.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $r : 2^E \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ تابعی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(R1)$ اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $0 \leq r(X) \leq |X|$.

$(R2)$ اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن‌گاه $r(X) \leq r(Y)$.

$(R3)$ اگر X و Y دو زیرمجموعه از E باشند، آن‌گاه:

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه زیرمجموعه‌های X از E است که $|X| = r(X)$. دراین‌صورت $(E,\mathcal{I})$ یک مترویید است که r تابع رتبه آن می‌باشد.

برهان : [[۳] لم ۱.۳.۱]. ■

خاصیت $(R۳)$ را خاصیت زیرمدولار[۱] تابع رتبه مترویید گویند.

گزاره ۱۳.۲.۱ فرض کنید M یک مترویید با تابع رتبه r باشد و $X \subseteq E(M)$. آن‌گاه روابط زیر برقرارند:

(۱) X مستقل است اگر و تنها اگر $r(X) =| X |$.

(۲) X یک پایه است اگر و تنها اگر $| X |= r(X) = r(M)$.

(۳) X یک دور است اگر و تنها اگر X غیرتهی بوده و برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $r(X - x) =| X | - ۱ = r(X)$.

برهان : [[۳] گزاره ۵.۳.۱]. ■

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید M یک مترویید روی E با تابع رتبه r باشد. تابع

$$cl : ۲^E \to ۲^E$$

باضابطه

$$\forall X \subseteq E \;, \quad cl(X) = \{x \in E \mid r(X \cup x) = r(X)\}$$

را عملگر بستار[۲] M گوییم. به عبارت دیگر بستار، شامل عناصری می‌باشد که افزودن آن‌ها به مجموعه X، رتبه را تغییر نمی‌دهد. بدیهی است که

[۱] submodular

[۲] Closure Operator

$$x \notin cl(X) \Rightarrow r(X \cup x) = r(X) + ۱$$

لم ۱۵.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه غیرتهی بوده و $cl : ۲^E \to ۲^E$ یک تابع باشد. دراین‌صورت شرط لازم و کافی برای اینکه cl عملگر بستار یک متروید باشد، این است که در شرایط زیر صدق کند:

($cl۱$) اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $X \subseteq cl(X)$.

($cl۲$) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن‌گاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

($cl۳$) اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

($cl۴$) اگر $X \subseteq E$، $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آن‌گاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان: [[۳] لم ۲.۴.۱]. ■

لم ۱۶.۲.۱ اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$، آن‌گاه

$$r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + ۱$$

برهان: [[۳] لم ۳.۴.۱]. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید M یک متروید باشد و $X \subseteq E(M)$. $cl(X)$ را بستار[۱] (توسیع[۲]) X در M نامیده و با $\overline{X}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $X = cl(X)$، آن‌گاه X را یک مجموعه بسته[۳] و یا یک فلت[۴] گوییم.

تعریف ۱۸.۲.۱ یک ابرصفحه[۵] از M، یک مجموعه بستهٔ M از رتبه $r(M) - ۱$ می‌باشد.

---

۱ Closure

۲ Span

۳ Closed Set

۴ Flat

۵ hyperplane

تعریف ۱۹.۲.۱ زیرمجموعه X از $E(M)$ را یک مجموعه فراگیر[1] گوییم، اگر $cl(X) = E(M)$.

قضیه ۲۰.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید بوده و $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های این ماترویید باشد. تعریف می‌کنیم $\mathcal{B}^* = \{X|\ E - X \in \mathcal{B}\}$. در این‌صورت $\mathcal{B}^*$ گردایه پایه‌های یک ماترویید روی E می‌باشد: این ماترویید را با M^* نمایش داده و آن را ماترویید دوگان[2] M می‌نامیم.

برهان : [[۳] قضیه ۲.۱.۱]. ■

پایه‌ها و دورهای ماترویید M^* را به ترتیب هم پایه‌ها[3] و هم دورهای[4] M گوییم.

برای دوگان ماترویید M روابط زیر برقرارند:

$$\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}(M^*) \qquad , \qquad (M^*)^* = M$$

گزاره ۲۱.۲.۱ اگر $X \subseteq E(M)$، آن‌گاه $r^*(X) = |X| + r(E - X) - r(M)$.

برهان : [[۳] گزاره ۹.۱.۲]. ■

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید دلخواه و $X \subseteq E$ باشد. حذف[5] X از M را با $M \backslash X$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌های مستقل این ماترویید عبارت است از:

$$\mathcal{I}|_{(E-X)} = \{I \subseteq E - X : I \in \mathcal{I}\}$$

---

[1] spanning
[2] dual
[3] cobase
[4] cocircuit
[5] deletion