به نام آن که جان را فکرت آموخت

چراغ دل به نور جان برافروخت

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

آرنز منظم بودن جبرهای حاصل از نرم های تنسوری

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

شراره تقی دستجردی

بهمن ماه ۱۳۸۹

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

خانم شراره تقی دستجردی تحت عنوان

آرنز منظم بودن جبرهای حاصل از نرم های تنسوری

در تاریخ ۸۹/۱۱/۱۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر علی رجالی با مرتبه ی علمی استاد امضا

۲- استاد داور داخل گروه دکتر محمود لشکری زاده بمی با مرتبه ی علمی استاد امضا

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر اکرم یوسف زاده با مرتبه ی علمی استادیار امضا

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

امضای مدیر گروه

ستایش همه خدای را بر همه ی شایستگی هایش،

چه آن شایستگی ها که می شناسیم و چه آن ها که نمی شناسیم،

در همه حال، ستایش بر او باد.

ستایشی که با نکو داده هایش برابری کند

و پاداش آن، افزایش آن ها، بر من و همه ی آفریدگانش باشد.

بارخدایا!

مرا به آن چه آموخته ای، بهره مند گردان

و آن چه مرا بهره مند گرداند، به من بیاموز.

همواره بر دانشم بیفزا.

حضرت محمد صلی الله و علیه و آله و سلم

تقدیم به پدر و مادر مهربانم،

آموزگاران و استادان دلسوزم

و

دیگر روشنگران راه زندگی ام

چکیده

در این پایان‌نامه در نظر داریم، ضرب‌های آرنز را روی دوگان دوم جبرهای عملگرها، روی یک فضای باناخ بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا عملگرهای $\alpha-$ هسته‌ای را تعریف می‌کنیم که شامل عملگرهای تقریب‌پذیر و هسته‌ای نیز می‌شوند. هم‌چنین به مطالعه‌ی مراکز توپولوژیکی دوگان دوم این جبرها می‌پردازیم و خواهیم دید که تحت چه شرایطی مراکز توپولوژیکی این جبرها متمایز و به طور اکید، مشمول در فضای دوگان دوم و شامل فضای اصلی می‌شوند. در آخر نیز آرنز منظم بودن جبر عملگرهای فشرده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل اول: تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱–۱ مفاهیم توپولوژیکی ۲

۱–۲ مفاهیم جبری ۱۱

فصل دوم: ضرب‌های آرنز و نمایش‌ها ۱۷

۲–۱ نمایش‌های آرنز ۲۲

فصل سوم: نرم‌های تنسوری ۳۵

۳–۱ دوگان‌های ضرب‌های تنسوری و ایده‌آل‌های عملگری ۴۳

۳–۲ عملگرهای صحیح و α– صحیح؛ خاصیت رادون– نیکودیم ۵۱

۳–۲ عملگرهای هسته‌ای و α– هسته‌ای؛ خاصیت تقریب ۶۲

۳–۲ عملگرهای ۲– هسته‌ای ۷۷

فصل چهارم: ضرب‌های آرنز روی ایده‌آل‌های عملگری ۸۸

فصل پنجم: مراکز توپولوژیکی دوگان دوم ایده‌آل‌های عملگری ۹۶

۵–۱ فضای دوگان با خاصیت تقریب ۱۲۲

۵–۲ انطباق عملگرهای صحیح و هسته‌ای ۱۵۰

۵–۳ آرنز منظم بودن عملگرهای هسته‌ای ۱۵۸

فصل ششم: رادیکال دوگان دوم ایده‌آل‌های عملگری ۱۶۰

فصل هفتم: جبرهای عملگرهای فشرده ۱۶۶

فصل هشتم: چند مثال نقض ۱۸۳

۸—۱ نرم تنسوری که دردسترس نباشد ۱۸۴

۸—۲ فضای باناخی که خاصیت تقریب ندارد ۱۸۵

۸—۳ یک زیرفضای ℓ^p، $1 \leqslant p < 2$، بدون خاصیت تقریب فشرده ۱۸۷

۸—۴ فضای درختی جیمز ۱۸۹

۸—۵ آرنز منظم بودن جبر عملگرها ۱۹۰

۸—۶ خاصیت تقریب فشرده، خاصیت تقریب را نتیجه نمی‌دهد ۱۹۴

واژه نامه ۱۹۶

کتاب نامه ۲۰۴

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را می‌توانیم به صورت طولپا در فضای دوگان دومش، $\mathcal{A}''$ بنشانیم. اکنون این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توانیم ضرب روی $\mathcal{A}$ را به ضرب روی $\mathcal{A}''$ گسترش دهیم؟

در سال ۱۹۵۱، ریچارد آرنز [۱] در مرجع [۲] نشان داد که ضرب روی $\mathcal{A}$ را می‌توانیم به دو ضرب طبیعی روی $\mathcal{A}''$ گسترش دهیم، که ضرب‌های اول و دوم آرنز نامیده می‌شوند. این دو ضرب را، به ترتیب با $\square$ و $\Diamond$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی این دو ضرب یکسان عمل نمی‌کنند (مرجع [۲۱] را ببینید)؛ اما فضاهایی نیز وجود دارند که ضرب‌های آرنز روی فضای دوگان دوم آن‌ها یکی می‌شود. در این حالت فضا را آرنز منظم می‌نامیم.

از آن زمان تاکنون، بررسی این که چه جبرهای باناخی آرنز منظم هستند، به یکی از مسائل جذاب آنالیز ریاضی تبدیل شده است. ریاضی‌دانان، در طول این سال‌ها نتایج بسیاری نیز به‌دست آورده‌اند. برای مثال هر C^*- جبر، آرنز منظم است (در مرجع [۵]، تعدادی از نتایج در این زمینه جمع آوری شده است).

فرض کنید E یک فضای باناخ و $\mathcal{B}(E)$ جبر عملگرهای خطی و کران‌دار روی E باشد. دراین‌صورت اگر زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{B}(E)$ شامل عملگرهای با رتبه‌ی متناهی و آرنز منظم

[۱] Richard Arens

باشد، آن‌گاه E بازتابی است (مرجع [۳۱] را ببینید). در مرجع [۷] نشان داده شده است که جهت عکس همواره برقرار نیست و به شرطی قوی‌تر از بازتابی بودن فضای E نیاز داریم. اما همان‌طور که در این پایان‌نامه خواهید دید، برای آرنز منظم بودن زیر جبرهای بسته‌ی مشمول در ایده‌آل عملگرهای فشرده روی E (که آن را با $\mathcal{K}(E)$ نشان می‌دهیم)، شرط بازتابی بودن فضای E، کافی است (مرجع [۳۱] را ببینید). برای آن که آرنز منظم بودن چنین جبری را بدون فرض بازتابی بودن فضای E بررسی کنیم، به مفهوم مراکز توپولوژیکی نیاز داریم.

هم‌چنین، آرنز منظم بودن جبر عملگرهای حاصل از نرم‌های تنسوری را بررسی می‌کنیم. فرض کنید α یک نرم تنسوری منطقی (به مفهومی که در ادامه خواهید دید) روی $E' \otimes E$ باشد. دراین‌صورت تتمیم این فضا که با $E'\hat{\otimes}_\alpha E$ نشان می‌دهیم، به $\mathcal{K}(E)$ نشانده می‌شود و تصویر آن با نرم خارج قسمتی یک جبر باناخ است که با $\mathcal{N}_\alpha(E)$ نشان داده می‌شود. در این پایان‌نامه این جبر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

هم‌چنین آرنز منظم بودن مجموعه‌ی عملگرهای تقریب‌پذیر، که با $\mathcal{A}(E)$ نشان می‌دهیم و ارتباط آن با $\mathcal{K}(E)$ و $\mathcal{N}(E)$ بررسی می‌شود. در این راستا، شرایطی روی فضای باناخ E و نرم تنسوری α قرار می‌دهیم.

این پایان‌نامه شامل ۸ فصل است. در فصل اول برخی از تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم، آورده شده است. برای دسترسی بهتر خواننده، آن‌ها را در دو بخش مجزا (بخش اول مفاهیم توپولوژیکی و بخش دوم مفاهیم جبری) آورده‌ایم.

در فصل دوم مفهوم اساسی آرنز منظم بودن و برخی گزاره‌های مربوط به آن بیان شده است. در بخش اول از این فصل، ابتدا با تعریف نرم تصویری و ویژگی‌های آن و سپس با نمایش‌های آرنز آشنا می‌شویم. در پایان این بخش دو گزاره‌ی مهم را که ابزاری برای برخی از

قضیه‌ها و نتایج در فصل‌های دیگر است، آورده‌ایم.

در فصل سوم که خود شامل چهار بخش است، به معرفی نرم‌های تنسوری و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته‌ایم. ابتدا به معرفی نرم تزریقی و ویژگی‌هایش می‌پردازیم و مفاهیم دیگری را برای نرم تنسوری تعریف می‌کنیم. در بخش اول از این فصل با نرم‌های دوگان آشنا می‌شویم که منجر به تعریف نرم‌های تنسوری دردسترس و کاملاً دردسترس می‌شوند. سپس به معرفی ایده‌آل‌های عملگری می‌پردازیم و با مثال‌هایی از آن آشنا می‌شویم. در بخش دوم تعریف عملگرهای صحیح و $\alpha-$ صحیح و قضیه‌های مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در این زمینه قضیه‌ی ۲۱.۳، ایده‌ی مفهوم خاصیت رادون− نیکودیم را پررنگ‌تر می‌کند. در آخر این بخش قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که وضعیت تعدادی از فضاهای باناخ را از این نظر که خاصیت رادون− نیکودیم دارند یا خیر، روشن می‌کند. در بخش سوم عملگرهای هسته‌ای و خاصیت تقریب را تعریف می‌کنیم و ارتباط این مفاهیم را با عملگرهای صحیح و $\alpha-$ صحیح و خاصیت رادون− نیکودیم، در قالب چندین گزاره مشخص می‌کنیم. یکی از قضیه‌های پرکاربرد این بخش قضیه‌ی ترکیب گروتندیک است. در بخش چهارم نرم‌های جدید شِوِ− سافَر را معرفی می‌کنیم که منجر به تعریف عملگرهای $p-$ هسته‌ای می‌شوند. در این بخش حالت خاصی را که $p=۲$ باشد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. قضیه‌ی کلیدی این بخش قضیه‌ی تسلطی پیچه است.

در فصل چهارم، به بررسی ضرب‌های آرنز روی ایده‌آل‌های عملگری، به ویژه ایده‌آل عملگری هسته‌ای می‌پردازیم. هم‌چنین، نیم‌نرمی را روی حاصل‌ضرب‌های تنسوری معرفی می‌کنیم که به مفهوم تنسوریال منجر می‌شود.

در فصل پنجم که خود شامل ۳ بخش است، روی مراکز توپولوژیکی دوگان دوم ایده‌آل‌های عملگری مطالعه می‌کنیم. ابتدا با به کارگیری نمایش‌های آرنز که در بخش ۲−۱ معرفی

کردیم، نتایجی را در این راستا به‌دست می‌آوریم. سپس در بخش اول، با گذاشتن این شرط که فضای E' خاصیت تقریب کران‌دار داشته باشد، مطالعه‌ی مراکز توپولوژیکی $\mathcal{N}_\alpha(E)$ را ادامه می‌دهیم. در بخش دوم شرط با خاصیت تقریب کران‌دار بودن فضای E' را حذف می‌کنیم و حالتی را که عملگرهای صحیح و هسته‌ای روی E' یکسان باشند، مطالعه می‌کنیم. در بخش سوم، با توجه به نتایجی که در بخش‌های قبل به‌دست آورده‌ایم، آرنز منظم بودن عملگرهای هسته‌ای را در حالتی که فضای E بازتابی باشد، بررسی می‌کنیم.

در فصل ششم به مطالعه‌ی رادیکال $\mathcal{N}_\alpha(E)''$ می‌پردازیم. در آخر این فصل نیم‌ساده بودن جبرهای باناخ $\mathcal{N}(E)''$ و $\mathcal{A}(E)''$ را بررسی کرده‌ایم.

در فصل هفتم جبرهای عملگرهای فشرده را مطالعه می‌کنیم. در این راستا، ابتدا نتایجی در مورد مراکز توپولوژیکی آن‌ها به‌دست می‌آوریم و سپس مفهوم خاصیت تقریب فشرده و خاصیت $\mathcal{K}(E)^a-$ تقریب را بیان می‌کنیم. در آخر این فصل نتایجی درباره‌ی آرنز منظم بودن $\mathcal{K}(E)$ و رادیکال $\mathcal{K}(E)''$ به‌دست می‌آوریم.

فصل هشتم مشتمل بر ٦ بخش است. در هر بخش، یک یا چند مثال نقض را در ارتباط با نتایجی که در فصل‌های پیش به‌دست آمده بود، بدون اثبات می‌آوریم. علت آن که مثال‌ها را در یک فصل جداگانه آورده‌ایم، به این دلیل است که بیشتر این مثال‌ها دارای مفاهیمی هستند که آوردن آن‌ها در فصل‌های اصلی، موجب خارج شدن از مسیر اصلی پایان‌نامه می‌شد. هم‌چنین برای برخی از آن‌ها تعدادی از مفاهیمی را که در فصل‌های قبل آورده بودیم، بررسی کرده‌ایم. بنابراین آن‌ها را در یک قسمت مجزا آورده‌ایم تا بررسی هم‌زمان و مقایسه‌ی همه‌ی خاصیت‌هایشان امکان‌پذیر باشد.

فصل ۱

در این پایان‌نامه با برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی روبه‌رو می‌شویم که اغلب با آن‌ها آشنایی داریم و یا این که می‌توانیم در بیشتر کتاب‌های مربوطه مثال‌ها و اثبات‌های آن‌ها را ببینیم. لذا در این فصل این تعاریف و قضایا را تنها یادآوری می‌کنیم.

۱−۱　مفاهیم توپولوژیکی

تعریف ۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری باشد. یک نیم‌نرم روی E، یک تابع $\|\,.\,\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ است که

۱) برای هر $x \in E$، $\circ \leqslant \| x \|$،

۲) برای هر $x \in E$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$،

۳) برای هر x و $y \in E$، $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

یک نرم روی E، یک نیم‌نرم است که به علاوه داشته باشیم $\| x \| > \circ$ $(\circ \neq x \in E)$.

گوی یکه بسته برای E را با $E_{[1]}$ نشان می‌دهیم و به طور کلی تعریف می‌کنیم:

$$E_{[t]} = \{x \in E : \| x \| \leqslant t\}.$$

تعریف ۲.۱ فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. فضای تابعک‌های خطی و پیوسته روی E را فضای دوگان گوییم و با E' نشان می‌دهیم.

نمادگذاری ۳.۱ در این پایان‌نامه $\mu(x)$ ($\mu \in E'$ و $x \in E$) را با $< \mu, x >$ نمایش می‌دهیم.

برای زیرفضای F از فضای E قرار دهید:

$$F^{\circ} = \{\mu \in E' : < \mu, x >= \circ \ (x \in F)\},$$

و به‌طور مشابه، برای زیرفضای G از E' قرار دهید:

$$^{\circ}G = \{x \in E : < \mu, x >= \circ \ (\mu \in G)\}.$$

در این صورت، می‌توانیم به طور طبیعی $(E/F)'$ را با F° یکسان بگیریم.

برای هر فضای باناخ E، نگاشت طولپای طبیعی $\kappa_E : E \longrightarrow E''$ را داریم که با

$$< \kappa_E(x), \mu >=< \mu, x > \quad (\mu \in E',\ x \in E)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۱ گوییم E بازتابی است، هرگاه نگاشت κ_E یک یکریختی باشد.

تعریف ۵.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و $A \subseteq E'_{[1]}$. فرض کنید

$$\| x \|= \sup\{| < \mu, x > | :\ \mu \in A\} \quad (x \in E).$$

دراین‌صورت گوییم A یک مجموعه نرم‌پذیر است.

مثال ۶.۱ گوی یکه‌ی بسته از E، یک مجموعه‌ی نرم‌پذیر در E''، فضای دوگان دوم E است.

تعریف ۷.۱ فرض کنید E یک فضای برداری باشد. برای هر $\mu \in E'$، نیم‌نرم p_μ را با $p_\mu(x) = | < \mu, x > |$ تعریف می‌کنیم. توپولوژی تعریف شده روی E توسط خانواده‌ی نیم‌نرم‌های $\{p_\mu :\ \mu \in E'\}$ را توپولوژی ضعیف روی E گوییم و اغلب با $\sigma(E, E')$ نشان می‌دهیم. تور (x_α) را در E همگرای ضعیف به $x_\circ \in E$ گوییم اگر و تنها اگر

$$< \mu, x_\alpha >\to< \mu, x_\circ > \quad (\mu \in E').$$

به‌طور مشابه، برای هر $x \in E$، نیم‌نرم p_x را روی E' با $p_x(\mu) = | < \mu, x > |$ تعریف می‌کنیم. توپولوژی تعریف شده روی E' توسط خانواده‌ی نیم‌نرم‌های $\{p_x :\ x \in E\}$ را

توپولوژی ضعیف* روی E گوییم و اغلب با $\sigma(E', E)$ نشان می‌دهیم. تور (μ_α) را در E' همگرای ضعیف* (w^*−همگرا) به $\mu_\circ \in E'$ می‌نامییم اگر و تنها اگر

$$< \mu_\alpha, x > \to < \mu_\circ, x > \quad (x \in E).$$

تعریف ۸.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. توپولوژی عملگری قوی، ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\mathcal{B}(H)$ است که نگاشت $T \to T(x)$ برای هر عضو x در فضای H، پیوسته باشد. این توپولوژی از توپولوژی حاصل از نرم ضعیف‌تر است.

تعریف ۹.۱ عملگر $T : E \longrightarrow F$ را فشرده گوییم هرگاه T، گوی یکه‌ی بسته‌ی E را به زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی نسبی F بنگارد؛ یعنی $\overline{T(E_{[1]})}$ در F فشرده باشد. در این حالت می‌نویسیم $T \in \mathcal{K}(E, F)$ و $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E)$.

به طور مشابه، عملگر ضعیف− فشرده تعریف می‌شود. مجموعه‌ی عملگرهای ضعیف− فشرده را با $\mathcal{W}(E, F)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۰.۱ فرض کنید G یک فضای باناخ بازتابی و E و F فضاهای باناخ باشند. دراین‌صورت $\mathcal{B}(E, G) = \mathcal{W}(E, G)$ و $\mathcal{B}(G, F) = \mathcal{W}(G, F)$.

برهان. مرجع [۵] را ببینید.

قضیه ۱۱.۱ (قضیه‌ی باناخ− آلااُگلو[1])

فرض کنید E یک فضای نرم‌دار باشد. دراین‌صورت $E'_{[1]}$، w^*−فشرده است و هر تور در $E'_{[1]}$، دارای یک زیرتور w^*−همگراست.

برهان. مرجع [۵] را ببینید.

[1] Banach-Alaoglu's Theorem

فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و $T : E \longrightarrow F$. برای هر $x \in E$ و $\lambda \in F'$، $T' : F' \longrightarrow E'$ را با $< T'(\lambda), x >=< \lambda, T(x) >$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۱ (قضیه‌ی شودر[۲])

فرض کنید E و F فضای باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(E,F)$. دراین‌صورت T فشرده است اگر و تنها اگر T' فشرده باشد.

برهان. مرجع [۴] را ببینید.

قضیه ۱۳.۱ (قضیه‌ی گانت ماخر[۳])

فرض کنید E و F فضاهای باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(E,F)$. دراین‌صورت $T \in \mathcal{W}(E,F)$ اگر و تنها اگر $T' \in \mathcal{W}(F',E')$.

برهان. مرجع [۲۷] را ببینید.

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید E و F فضاهای باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(E,F)$. دراین‌صورت $T \in \mathcal{W}(E,F)$ اگر و تنها اگر $T''(E'') \subseteq \kappa_F(F)$.

برهان. مرجع [۲۷] را ببینید.

قضیه ۱۵.۱ (قضیه‌ی گلدشتین[۴])

فرض کنید E یک فضای باناخ باشد. برای هر $\Phi \in E''$، یک تور (x_ν) در E وجود دارد که برای هر ν، $\| x_\nu \| \leqslant \| \Phi \|$ و $\kappa_E(x_\nu)$ در $(E'', \sigma(E'', E'))$ به Φ همگراست.

برهان. مرجع [۵] را ببینید.

[۲] Schauder's Theorem

[۳] Gantmacher's Theorem

[۴] Goldstein's Theorem

تعریف ۱.۱۶ فرض کنید E و F فضاهای برداری نرم‌دار باشند. عملگر $Q : F \longrightarrow E$ را خارج قسمتی گوییم هرگاه پوشا باشد و برای هر $x \in E$،

$$\| x \| = \inf\{\| y \| : y \in F,\ Q(y) = x\}.$$

تعریف ۱.۱۷ فرض کنید E یک فضای برداری باشد. یک تابعک زیرخطی روی E، یک نگاشت $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری که

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (x, y \in E,\ \alpha \in \mathbb{R}^+).$$

قضیه ۱.۱۸ (قضیه‌ی هان− باناخ[۵])

فرض کنید F یک زیرفضای برداری از فضای برداری E باشد. فرض کنید q یک تابعک زیرخطی روی E (در حالت خاص q می‌تواند یک نرم روی E باشد) و λ یک تابعک خطی روی F باشد که برای هر $x \in F$، $|< \lambda, x >| \leqslant q(x)$. دراین‌صورت یک تابعک خطی Λ روی E وجود دارد به‌طوری که $\Lambda_{|F} = \lambda$ و برای هر $x \in E$، $|< \Lambda, x >| \leqslant q(x)$.

برهان. مرجع [۵] را ببینید.

در ادامه برخی از نتایج مهم قضیه‌ی هان− باناخ را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱.۱۹ فرض کنید E یک فضای برداری نرم‌دار باشد. دراین‌صورت

۱) برای هر x ناصفر در E، تابعک $\mu \in E'$ وجود دارد که $\| \mu \| = 1$ و $\| x \| = < \mu, x >$.

۲) برای هر x و y در E که $x \neq y$، تابعک $\mu \in E'$ وجود دارد که $< \mu, x > \neq < \mu, y >$.

برهان. مرجع [۲۷] را ببینید.

---
[۵] Hahn-Banach's Theorem

نتیجه ۲۰.۱ فرض کنید E یک فضای برداری نرم‌دار و M زیرفضایی از آن باشد. برای هر μ در M'، تابعک λ در E' وجود دارد به‌طوری که $\| \mu \| = \| \lambda \|$ و $\lambda_{|_M} = \mu$.

برهان. مرجع [۲۷] را ببینید.

نتیجه ۲۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری نرم‌دار و M زیرفضایی از آن باشد. هم‌چنین فرض کنید $x_\circ \in E$ چنان باشد که $d = d(x_\circ, M) > \circ$. دراین‌صورت $\mu \in E'$ وجود دارد که $\| \mu \| = ۱$ و به علاوه

$$< \mu, x_\circ >= d, \quad < \mu, y >= \circ \quad (y \in M).$$

برهان. مرجع [۲۷] را ببینید.

تعریف ۲۲.۱ فضای توپولوژیکی $< X, \tau >$ را به‌طور موضعی فشرده گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$، یک مجموعه‌ی باز G_x شامل x و یک مجموعه‌ی فشرده‌ی K شامل G_x وجود داشته باشد.

از تعریف دیده می‌شود که هر فضای فشرده، به‌طور موضعی فشرده است. اما عکس آن لزوماً برقرار نیست. برای مثال $\mathbb{R}^n$ به‌طور موضعی فشرده است اما فشرده نیست.

یادآوری ۲۳.۱ گوییم تابع f بر فضای هاسدرف و به‌طور موضعی فشرده‌ی X در بی‌نهایت صفر می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، مجموعه‌ی فشرده‌ای مانند $K \subseteq X$ وجود داشته باشد که

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (x \neq K).$$

رده‌ی تمام توابع پیوسته که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_\circ(X)$ نشان می‌دهیم.

هم‌چنین، رده‌ی تمام توابع پیوسته که محافظ فشرده دارند را با $C_{\circ\circ}(X)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $f \in C_{\circ\circ}(X)$ اگر و تنها اگر $\overline{\{x \in X : \ f(x) \neq \circ\}}$ فشرده باشد.