بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم زهرا حاجی ربیع دانشجوی رشته: ریاضی محض** به شماره دانشجویی **۹۱۵۲۳۱۱۱۰۴** تحت عنوان: « **ناحیه ناپایداری برای وابرسانی های نوعی نگه دارنده مساحت رویه ها** » را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکترخسرو تاج بخش	استادیار	
۲- استادمشاور	دکترمیثم نصیری	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکترفرشته سعدی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر عباس فخاری	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی-پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال **۱۳۹۳** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **خسرو تاج بخش** و مشاوره جناب آقای دکتر **میثم نصیری** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یك درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰% بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهاي خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایي مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده براي فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **زهرا حاجی ربیع** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: **زهرا حاجی ربیع**

تاریخ و امضا:

۹۳/۱۱/۲۶

زهرا حاجی ربیع

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه : با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فني است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضاي هيأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمي و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکي از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولي مسئولیت علمي مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو مي‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارك علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌هاي ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامي طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می‌باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یك تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **زهرا حاجی ربیع** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی **۱۳۹۱** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:
تاریخ:

۹۲/۱۱/۲۶
زهرا حاجی ربیع

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

ناحیه ناپایداری برای وابرسانی‌های نوعی نگه‌دارنده مساحت رویه‌ها

دانشجو:

زهرا حاجی ربیع

استاد راهنما:

دکتر خسرو تاج بخش

استاد مشاور:

دکتر میثم نصیری

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم به مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم

مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عاطفه آن می دانم

پدرم مهربانی مشفق، بردبار و حامی

بوسه بر دستان پر مهرتان.

سپاس و ستایش مر خدای را اجل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ایشان، با زبان قاصر و دست ناتوان چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستشان سپرده اند تضمین؛ بر حسب وظیفه از استاد با کمالات و شایسته جناب آقای دکتر خسرو تاج بخش که در کمال سعه صدر با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ از استاد صبور و با تقوا جناب آقای دکتر میثم نصیری که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

بهمن ۹۳

چکیده

این پایان‌نامه به معرفی و بررسی ناحیه‌های ناپایداری برای وابرسانی‌های نگه‌دارنده مساحت خمینه‌های دو بعدی می‌پردازد. این مفهوم به عنوان ابزاری برای مطالعه وابرسانی‌های C^r ـ نوعی به کار می‌رود و به ویژه نقش کلیدی در اثبات قضیه فرَنکز ـ لِکالوز درباره چگال بودن مجموعه خمینه‌های پایدار (ناپایدار) نقطه‌های تناوبی ایفا می‌کند [۱۵]. این قضیه گامی مهم در راستای اثبات حدس پوانکاره است که چگال بودن نقطه‌های تناوبی برای وابرسانی‌های نوعی نگه‌دارنده مساحت را ادعا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: *عدد چرخشی، فشرده‌سازی کرانه‌ای، فشرده‌سازی کرانه‌های اول، ناحیه ناپایداری، نوعی، پیوستار.*

فهرست

پیشگفتار

هدف این پایان‌نامه ارائه یک تصویر توپولوژیکی روشن از وابرسانی‌های C^rـ نوعی نگه‌دارنده مساحت رویه‌ها است. رویه‌هایی که در نظر می‌گیریم استوانه نامتناهی و کره دو بعدی $S^۲$ هستند. حتی در این حالت خاص هم مسئله ساده نیست و با تمام پیشرفت‌هایی که در این زمینه انجام گرفته است سوالات زیادی همچنان وجود دارد. یکی از مهمترین سوالات که در این زمینه وجود دارد این است که آیا یک وابرسانی C^rـ نوعی دارای یک مجموعه چگال از نقطه های تناوبی است؟ مثبت بودن پاسخ این سوال حدسی مهم و قدیمی از پوانکاره است.

این پایان‌نامه بر اساس دستاوردهای فرَنکز و لِکالوز تدوین شده است [۱۵]. یکی از قضیه‌های اصلی، قضیه ۱۶.۱.۹ است که برای $r \geq$ ۱۶ یک مجموعه C^rـ نوعی از وابرسانی‌های نگه‌دارنده مساحت $S^۲$ وجود دارد با این خاصیت که اجتماع خمینه‌های پایدار از تمام نقطه‌های تناوبی هذلولوی یک مجموعه چگال است. مشابه این قضیه برای خمینه‌های ناپایدار هم درست است. این دو گزاره اگرچه حدس پوانکاره را اثبات نمی‌کنند ولی گامی مهم در تایید آن به شمار می‌روند.

فرَنکز و لِکالوز برای اثبات این قضیه از روش‌های توپولوژیک استفاده کرده‌اند و در این راستا مفهومی بسیار مهم ارائه می‌دهند که تعمیمی از ناحیه ناپایداری بیرخوف است [۲]. لازم به ذکر است ناحیه ناپایداری بیرخوف ناحیه‌ای است که شامل هیچ خم ساده بسته ناوردا و اساسی نیست و یک شرط کلیدی در این مفهوم که بیرخوف با استفاده از آن قضیه‌های جالبی برای این نواحی اثبات می‌کند شرط تابداری است. آن‌ها با حذف شرط تابداری مفهوم جدیدی از ناحیه ناپایداری ارائه می‌دهند که یک استوانه باز است که شامل هیچ پیوستار اساسی و ناوردا بدون نقطه‌های تناوبی نیست و نشان می‌دهند که تحت شرایط نوعی بسیاری از ویژگی‌های ناحیه ناپایداری بیرخوف به‌طور مشابه برقرار است. این یک ابزار اساسی برای اثبات قضیه ۱۶.۱.۹ است.

در فصل اول تا سوم مفاهیم استانداردی از توپولوژیک و دینامیک آورده شده است که مهمترین آن‌ها مفهوم عدد چرخشی است. در فصل چهارم دو نوع فشرده سازی از رویه‌ها به نام فشرده‌سازی با مرز ایده‌آل و دیگری فشرده‌سازی با کرانه‌های اول منسوب به کاراتئودوری آورده شده است. این فشرده‌سازی کرانه‌های اول این امکان را فراهم می‌کند که به دامنه‌های ساده همبند عدد چرخشی نسبت دهیم که ابزاری بسیار کارآمد برای مطالعه رویه‌ها است. فصل پنج تا هفت مطالعاتی درباره پیوستارهای ناوردا و ارتباط آن‌ها با نقطه‌های تناوبی است. در فصل هشت با کمک قضیه‌های فصل‌های گذشته مفهوم ناحیه ناپایداری تعمیم یافته و خواص آن ارائه شده است. در فصل نه قضیه چگال بودن خمینه‌های پایدار نقطه‌های تناوبی برای وابرسانی‌های C^rـ نوعی اثبات شده است.

فصل ۱

مروری بر توپولوژی جبری

ابتدا مفاهیمی از توپولوژی جبری را یادآوری می‌کنیم که مفاهیمی کلیدی در این پایان‌نامه هستند و در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم. مطالب این فصل از [۱۸] آورده شده است.

۱.۱ هم‌مکانی

فرض کنید g و g' نگاشت‌های پیوسته‌ای از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y باشند. g با g' ***هم‌مکان*** است درصورتی‌که نگاشت پیوسته‌ای مانند

$$G : X \times I \to Y$$

موجود باشد چنان‌که به ازای هر x از X

$$G\,(x, \circ) = g(x) \quad , \quad G\,(x, \text{۱}) = g'\,(x)$$

(در اینجا $I = [\circ, \text{۱}]$). نگاشت G یک ***هم مکانی*** بین g و g' است.

اگر $g : [\circ, \text{۱}] \to X$ نگاشت پیوسته‌ای باشد که $g(\circ) = x_\circ$ و $g\,(\text{۱}) = x_\text{۱}$ آن‌گاه g راهی در X از $x_\circ$ به $x_\text{۱}$ است. راه‌های g و g' که بازه $I = [\circ, \text{۱}]$ را به‌توی X می‌نگارند ***هم مکان راهی*** خوانده می‌شوند چنان‌که هر دو دارای نقطه آغازی $x_\circ$ و نقطه انجام $x_\text{۱}$ باشند و نگاشت پیوسته‌ای مانند $G : I \times I \to X$ موجود باشد چنان‌که به ازای هر s و t از I داشته باشیم

$$G\,(s, \circ) = g(s) \quad , \quad G\,(s, \text{۱}) = g'\,(s)$$

و

$$G\,(\circ, t) = x_\circ \quad , \quad G\,(\text{۱}, t) = x_\text{۱}.$$

G یک ***هم مکان راهی*** بین g و g' خوانده می‌شود.

اگر g راهی در X از x_0 به x_1 و g' راه دیگری در X از x_1 به x_2 باشد آن‌گاه $g * g'$ ترکیب g و g' به عنوان راهی مانند l با تساوی زیر تعریف می شود.

$$l(s) = \begin{cases} g(2s) & , \forall s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & , \forall s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

تابع l خوش‌تعریف و پیوسته است و راهی از x_0 به x_2 است که نیمه اول آن g و نیمه دوم آن g' است. عمل ترکیب راه‌ها عمل خوش‌تعریفی بین رده‌های هم‌مکان راهی القا می‌کند که در نتیجه آن ترکیب دو رده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[g] * [g'] = [g * g']$$

عمل $*$ خواص گروه‌واری دارد و اختلاف آن با خواص گروه این است که $[g]*[g']$ فقط برای زوج‌هایی تعریف می‌شود که در شرط $g(1) = g'(0)$صدق می‌کند.

فرض کنید X یک فضا و x_0 نقطه‌ای از آن باشد. راهی در X که از x_0 آغاز و به x_0 پایان می‌یابد یک ***کمند*** بر پایه x_0 نامیده می‌شود. مجموعه رده‌های هم‌مکان راهی کمندهای بر پایه x_0 با عمل $*$، ***گروه بنیادی*** X نسبت به پایه x_0 نامیده می‌شود. این گروه با $\pi_1(X, x_0)$ نمایش داده می‌شود.

فضای X ***ساده همبند*** است هرگاه فضای همبند راهی باشد و به ازای هر عضو از X مانند x_0 گروه $\pi_1(X, x_0)$ بدیهی (تک عضوی) باشد. اغلب بدیهی بودن آن با تساوی $\pi_1(X, x_0) = 0$ نشان داده می‌شود.

۲.۱ فضای پوششی

فرض کنید $p : E \to B$ یک نگاشت پیوسته پوشا باشد. مجموعه باز U از B با نگاشت p به طور هموار پوشانده می‌شود هرگاه تصویر عکس $p^{-1}(U)$ را بتوان در E به صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز جدا از هم V_α نوشت چنان‌که به ازای هر α تحدید p به V_α همانسانی از V_α بر U باشد. اگر هر نقطه b از B دارای همسایگی مانند U باشد که با نگاشت p به طور هموار پوشانده شود آن‌گاه p یک ***نگاشت پوششی*** و E یک ***فضای پوششی*** B نامیده می‌شود.

اگر E یک فضای ساده همبند و $p : E \to B$ یک نگاشت پوششی باشد آن‌گاه E ***فضای پوششی عام*** B خوانده می‌شود.

مثال ۱.۲.۱. نگاشت $p : \mathbb{R} \to S^۱$ با ضابطه زیر یک نگاشت پوششی است.

$$p\left(x\right) = \left(\cos ۲\pi x, \sin ۲\pi x\right)$$

می‌توان p را به صورت تابعی مجسم کرد که ضمن پیچاندن خط حقیقی $\mathbb{R}$ دور دایره هر بازه $[n, n+۱]$ را بر $S^۱$ می‌نگارد.

برهان. پوششی بودن نگاشت p از خواص مقدماتی توابع $\sin$ و $\cos$ نتیجه می‌شود. برای مثال زیر مجموعه U از $S^۱$ متشکل از همه نقطه‌ها با مختص اول مثبت در نظر می‌گیریم. مجموعه $p^{-۱}\left(U\right)$ از نقطه‌هایی مانند x تشکیل می‌شود که به ازای آن‌ها $\cos ۲\pi x$ مثبت است. یعنی $p^{-۱}\left(U\right)$ برابر با اجتماع مجموعه‌های V_n به‌صورت زیر است.

$$V_n = \left(n - \frac{۱}{۴}, n + \frac{۱}{۴}\right), n \in \mathbb{Z}$$

اکنون با تحدید p به هریک از بازه‌های بسته $\overline{V}_n$ نگاشتی یک به یک به‌دست می‌آید. زیرا $\sin ۲\pi x$ بر چنین بازه‌ای به‌طور اکید یکنوا است. به‌علاوه بنابر قضیه مقدار میانی p مجموعه $\overline{V}_n$ را بر $\overline{U}$ و V_n را بر U تصویر می‌کند. چون $\overline{V}_n$ فشرده است $p|_{\overline{V}_n}$ یک همانسانی بین $\overline{V}_n$ و $\overline{U}$ می‌باشد و $p|_{V_n}$ یک همانسانی از V_n به U است. استدلال مشابهی را می‌توان در مورد مقطع $S^۱$ با نیم‌صفحه‌های باز بالایی و پایینی و نیم‌صفحه چپ اعمال کرد. این مجموعه‌های باز $S^۱$ را می‌پوشانند و هریک توسط p به‌طور هموار پوشانده می شوند. بنابراین $p : \mathbb{R} \to S^۱$ یک نگاشت پوششی است. □

تبدیل عرشه ای از یک نگاشت پوششی $p : E \to B$ یک همانسانی $T : E \to E$ است چنان‌که $poT = T$.

نگاشت پوششی $p : E \to B$ را در نظر بگیرید. اگر g یک نگاشت پیوسته از فضایی مانند X بتوی B باشد نگاشت $\tilde{g}$ یک ***بالابر*** g است چنان‌که $po\tilde{g} = g$.

۳.۱ گروه‌های مانستگی

یک nـ ***سادک*** Δ^n ساده‌ترین شکل هندسی مشخص شده با مجموعه‌ای از $(n+۱)$ نقطه در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است. Δ^n به‌طور هندسی گراف کامل روی $(n+۱)$ راس است.

یک nـ ***وجه*** از یک سادک زیرمجموعه‌ای از مجموعه راس‌های سادک با مرتبه $(n+۱)$ است.
مجتمع سادکی K یک مجموعه باپایان از سادک‌ها است که

۱. برای همه سادک‌های $A \in K$ با یک وجه α از A داریم $\alpha \in K$.

۲. اگر $A, B \in K$ آن‌گاه $A \cap B$ یا تهی است یا وجهی از دو سادک است یعنی خودش یک سادک است.

برای مجموعه S از راس‌های یک سادک، یک جهت روی سادک با انتخاب ترتیبی از S در نظر می‌گیریم. هر سادک دو جهت دارد. یک جهت روی یک nـسادک، جهتی روی $(n-۱)$ـوجه‌ها القا می‌کند. شکل (۱.۱) را ببینید. اگر $A^n = (v_۰, v_۱, ...v_n)$ یک nـسادک جهت‌دار باشد آن‌گاه جهت $(n-۱)$ـوجه‌های A^n با مجموعه راس‌های $\{v_۰, ..., v_{i-۱}, v_{i+۱}, ..., v_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_i = (-۱)^i \left(v_۰, ..., v_{i-۱}, v_{i+۱}, ..., v_n\right)$$

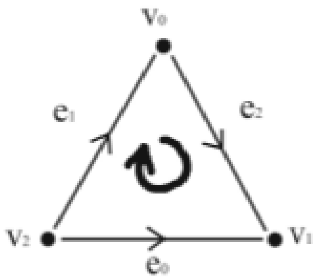
برای یک مجموعه $A^n_۱, ..., A^n_k$ از nـسادک‌های جهت‌پذیر دلخواه از یک مجتمع سادکی K و یک گروه آبلی G، nـ ***زنجیر*** x با ضرایب در G که $g_i \in G$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x = g_۱ A^n_۱ + g_۲ A^n_۲ + ... + g_k A^n_k$$

قرار می‌دهیم $G = \mathbb{Z}$. برای $x = \sum_{i=۱}^{k} g_i A^n_i$ و $y = \sum\limits_{i=۱}^{k} h_i A^n_i$ داریم $x + y = \sum_{i=۱}^{k} (g_i + h_i) A^n_i$. مجموعه nـزنجیرها با این جمع تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد. گروه nـزنجیرها با L_n نشان داده می‌شود.

فرض کنید A^n یک nـسادک جهت‌پذیر در مجتمع سادکی K باشد. مرز A^n به صورت $(n-۱)$ـزنجیر از K بر $\mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف می‌شود که $A^{n-۱}_i$ یک $(n-۱)$ـوجه از A^n است.

$$\delta\left(A^n\right) = A^{n-۱}_۰ + A^{n-۱}_۱ + ... + A^{n-۱}_n$$



شکل ۱.۱: ۲ـ‌سادک جهت‌پذیر

یک nـ زنجیر یک **_دور_** نامیده می‌شود اگر مرز آن صفر باشد. مجموعه nـ دورهای K روی $\mathbb{Z}$ با Z_n نشان داده می‌شود. Z_n زیرگروهی از L_n است و می‌تواند به صورت $Z_n = \mathrm{Ker}\,(\delta)$ نوشته شود.

یک nـ دور x از یک kـ سادک K **_متشابه_** با صفر است اگر مرز یک $(n+۱)$ـ زنجیر از K باشد که $n = ۰, ۱, ..., k - ۱$. یک مرز هر دوری متشابه با صفر است. این رابطه به صورت $x \sim ۰$ نوشته می‌شود و زیر گروهی از Z_n از مرزها به‌صورت $B_n = \mathrm{Im}\,(\delta)$ نشان داده می‌شود. رابطه $x \sim ۰$ یک رابطه هم‌ارزی می‌دهد: برای دو زنجیر x و y

$$(x - y) \sim ۰ \Rightarrow x \sim y$$

و x با y متشابه است.

چون B_n زیرگروهی از Z_n است رابطه خارج قسمتی $H_n = Z_n/B_n$ را داریم. گروه H_n **_گروه مانستگی_** nـ بعدی از مجتمع سادکی K روی $\mathbb{Z}$ است. داریم $H_n = \mathrm{Ker}\,(\delta)/\mathrm{Im}\,(\delta)$.

فصل ۲
همانسانی‌های دایره و عدد چرخشی

در این فصل همانسانی‌های دایره را بررسی و مفهومی به نام عدد چرخشی که به هر همانسانی دایره نسبت داده می شود تعریف می‌کنیم. این عدد برای چرخش‌های دایره برابر زاویه چرخش است و گویا یا گنگ بودن آن اطلاعاتی در مورد دینامیک به ما می دهد که نقطه های تناوبی داریم یا خیر [۶]. عدد چرخشی مفهومی کلیدی در این پایان‌نامه است و در ادامه کار به آن نیاز خواهیم داشت. در فصل چهار می‌بینیم این عدد برای دامنه ساده همبند از صفحه مختلط نیز قابل تعریف است و اطلاعاتی در مورد دینامیک این دامنه‌ها به‌دست می‌دهد.

دایره $\mathbb{T}^۱$ را به صورت فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ در نظر می‌گیریم که مجموعه کلاس‌های هم ارزی اعداد حقیقی است که اختلافشان یک عدد صحیح است. می‌توان دایره را به صورت مجموعه $S^۱ = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$ هم تعریف کرد. آن‌گاه با قرار دادن $z = e^{۲\pi i x}$ این دو تعریف معادل هستند.

۱.۲ چرخش‌های گویا و گنگ دایره

نگاشت $R_\alpha : \mathbb{T}^۱ \to \mathbb{T}^۱$ برای $\alpha \in \mathbb{R}$ یک ***انتقال*** یا **چرخش** دایره نامیده می‌شود اگر به شکل زیر باشد.

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{۱}$$

چرخش‌های دایره ساده‌ترین نمونه برای همانسانی‌های دایره است و دینامیک آن‌ها بسته به گویا یا گنگ بودن α است.

گزاره ۱.۱.۲. فرض کنید $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ یک چرخش دایره با زاویه α باشد. آن گاه:

۱. α گویا است اگر و تنها اگر هر مداری در $\mathbb{T}^1$ تناوبی باشد.

۲. α گنگ است اگر و تنها اگر هر مداری در $\mathbb{T}^1$ چگال باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید $\alpha = {}^p\!/_q$ گویا است آن‌گاه

$$R_\alpha{}^q(x) = x + p = x \pmod 1$$

پس هر نقطه‌ای تناوبی و از دوره تناوب q است. از طرف دیگر فرض کنید نقطه x تناوبی و از دوره تناوب q است. آن‌گاه

$$R_\alpha{}^q(x) = x + q\alpha = x \pmod 1$$

که به‌دست می‌دهد $q\alpha = 0 \pmod 1$ و یعنی $\alpha = p/q$.

اکنون فرض کنید مدار نقطه x چگال است. آن‌گاه این مدار تناوبی نمی‌باشد و بنابر قسمت قبل زاویه چرخشی α نمی‌تواند گویا باشد پس α گنگ است. به‌طور وارون فرض کنید α گنگ است. برای سادگی فرض می‌کنیم $\alpha > 0$؛ حالت $\alpha < 0$ اثبات مشابه است. باید نشان دهیم مدار هر نقطه x_0 به دلخواه نزدیک هر نقطه دلخواه دیگری می‌شود. به‌طور خاص برای هر ε، $\mathbb{T}^1$ را با تعداد باپایان (نه لزوما مجزا) کمان به طول ε می‌پوشانیم آن‌گاه کافی است نشان دهیم که هر کمان شامل تعدادی از نقطه‌های مدار x_0 است. از آن جایی که مدار x_0 تناوبی نیست پس شامل تعداد بی‌پایان نقطه مجزا می‌باشد. بنابراین حداقل دو نقطه

$$x_l = x + l\alpha \pmod 1 \quad , \quad x_m = x + m\alpha \pmod 1$$

موجود است که داخل کمان یکسانی با طول ε قرار می‌گیرد.

به‌طور ویژه

$$|x_m - x_l| \leq \varepsilon.$$

بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $m > l$ آن‌گاه

$$(m - l)\alpha = |x_m - x_l| \leq \varepsilon \pmod 1.$$

اکنون زیر دنباله‌ای از نقطه‌های روی مدار x_0 به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$x_{n(m-l)} = x + n(m-l)\alpha$$

این در واقع متناظر با به کار بردن مکرر چرخشی با زاویه‌ای به اندازه $n(m-l)\alpha < \varepsilon$ است. بنابراین این زیردنباله باید هر کمانی به طول ε را قطع کند و اثبات تمام است. $\square$

۲.۲ عدد چرخشی

عدد چرخشی یک همانسانی دایره مانند $F : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ در واقع میزان چرخش نقطه‌ها تحت تکرارهای F را اندازه می‌گیرد. برای تعریف عدد چرخشی لازم است ابتدا مفهوم بالابر از یک همانسانی دایره را معرفی کنیم.

نگاشت تصویر $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ بر فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ که هر عدد حقیقی را به نقطه‌ای روی $\mathbb{T}^1$ می‌نگارد متناظر با مقدار اعشاری خود می‌شود.

$$\pi(x) = x = x - [x] \pmod 1$$

چنان‌که

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

این نگاشت تصویر یک نگاشت پوششی است. یعنی هر $x \in \mathbb{T}^1$ یک همسایگی مانند U_x دارد چنان‌که $\pi^{-1}(U_x)$ اجتماع مجزای مجموعه‌های باز و همبندی است که هرکدام با نگاشت π به‌طور همانسان بر U_x نگاریده می‌شود و $\mathbb{R}$ فضای پوششی عام $\mathbb{T}^1$ است.

فرض کنید $F : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ یک همانسانی دایره باشد. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک ***بالابر*** از F است اگر

$$\pi o f = F o \pi.$$

توجه کنید که این شرط شبیه شرط ***مزدوج*** است با این تفاوت که π تنها پوشا است و دوسویی نیست. π یک ***شبه مزدوج*** بین Fو f است.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $F = R_\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ یک چرخش دایره باشد.

$$F(x) = x + \alpha \pmod 1$$

همچنین فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$ و نگاشت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(x) = x + \alpha + k$$

آن‌گاه

$$\pi(f(x)) = \pi(x + \alpha + k) = x + \alpha + k = x + \alpha = \pi(x) + \alpha = F(\pi(x)) \pmod{۱}$$

پس f یک بالابر از F است.

توجه کنید که اگر f و g دو بالابر از $F : \mathbb{T}^۱ \to \mathbb{T}^۱$ باشند این دو بالابر تنها در یک عدد صحیح با هم تفاوت دارند. اگر همانسانی F جهت نگه‌دار و f یک بالابر آن باشد آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $f(x+n) = f(x) + n$.

گزاره ۲.۲.۲. فرض کنید $F : \mathbb{T}^۱ \to \mathbb{T}^۱$ یک همانسانی جهت نگه‌دار و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک بالابر از F باشد. آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$ موجود و مستقل از نقطه x است. این حد با $\rho(f)$ نشان داده می‌شود. به‌علاوه عدد $\pi(\rho(f))$ مستقل از بالابر f است.

برای اثبات این قضیه لم ساده زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۳.۲.۲. فرض کنید $\{c_n\}$ یک دنباله زیر جمعی از عددهای مثبت باشد (برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $c_{m+n} \le c_m + c_n$). آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \inf\{\frac{c_n}{n} : n \in N\}$$

و این حد وجود دارد.

برهان. برای هردو عدد صحیح مثبت k و n، $q \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ و $r \in \{۰, ..., q - ۱\}$ وجود دارد که $n = qk + r$. آن‌گاه

$$\frac{c_n}{n} \le \frac{c_{qk} + c_r}{qk + r} \le \frac{qc_k + c_r}{qk + r}$$

پس برای ثابت دلخواه k

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} \le \frac{c_k}{k}$$

و بنابراین وقتی $n \to \infty$ داریم $q \to \infty$ و چون k دلخواه بود