دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

عملگرهای ترکیبی بین جبر توابع پیوسته

نگارش:

مینو سمیع املشی

استاد راهنما: **دکتر سعید مقصودی**

استاد مشاور: **دکتر حبیب امیری**

مهر ۱۳۸۹

چکیده:

در این پایان‌نامه فشردگی و فشردگی ضعیف عملگرهای ترکیبی و ترکیبی وزندار را روی فضاهای تابعی معروف در آنالیز تابعی بررسی می‌کنیم. فضاهای مورد مطالعه عبارتند از $C_u(X)$، $C(X)$، $C(X,E)$ و $L^p(X)$ که به ترتیب فضای توابع پیوسته یکنواخت، فضای توابع پیوسته، فضای توابع پیوسته برداری مقدار و فضای لبگ هستند. نشان می‌دهیم چنین عملگرهایی از الگوی کم و بیش مشابهی پیروی می‌کنند.
رده‌بندی موضوعی: اولیه ۴۶E۲۵ ، ۴۷B۰۵. ثانویه ۴۷B۳۸.
کلمات کلیدی: عملگرهای ترکیبی و ترکیبی وزندار، عملگرهای فشرده و فشرده‌ی ضعیف، فضای توابع برداری مقدار پیوسته، فضای توابع پیوسته یکنواخت، فضای لبگ.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فضاهای برداری توپولوژیک توابع پیوسته و عملگرهای روی آن‌ها موضوع جالبی در دهه‌های گذشته بوده‌اند و نتایج بسیار مهمی در این زمینه بدست آمده است که به شرح مختصری از تاریخچه آن می‌پردازیم.
روی هر فضای تابعی دو نوع متداول عملگر وجود دارد، یکی عملگرهای ضربی و دیگری عملگرهای ترکیبی هستند. از پیوند این دو نوع عملگر، نوع دیگری از عملگرها به نام عملگرهای ترکیبی وزندار به دست می‌آید. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی و E فضای برداری توپولوژیک روی میدان K باشند که K در اینجا میدان اعداد مختلط یا میدان اعداد حقیقی است. مجموعه توابع از X به E را با $\mathcal{F}(X,E)$ نشان می‌دهیم که با اعمال نقطه‌ای فضا برداری است. فرض کنید π یک تابع اسکالر مقدار روی Y باشد و $T : Y \longrightarrow X$. تعریف کنید

$$W_{\pi,T} : \mathcal{F}(X,E) \longrightarrow \mathcal{F}(Y,E), \qquad W_{\pi,T}(f) = \pi.(f \circ T)$$

که برای هر y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_{\pi,T}(f)(y) = \pi(y).f(T(y)).$$

عملگر $W_{\pi,T}$ را تبدیل ترکیبی وزندار می‌نامند در صورتی که $W_{\pi,T}$ پیوسته باشد آن را عملگر ترکیبی وزندار می‌نامند. چنانچه برای هر y ، $\pi(y) = ۱$ عملگر $W_{\pi,T}$ را عملگر ترکیبی می‌نامند و آن را با C_T نمایش می‌دهند. هنگامی که $X = Y$ و $T : X \longrightarrow X$ نگاشت همانی باشد در این صورت عملگر

ترکیبی وزندار را عملگر ضربی روی $\mathcal{F}(X,E)$ تولید شده توسط π می‌نامند و آن را با M_π نمایش می‌دهند.

ریاضیدانان بسیاری جنبه‌های مختلف عملگرهای ترکیبی وزندار را بررسی کرده‌اند از جمله نوردگرین، کارن و سینگ و منهاز.

مطالعات اولیه درباره‌ی عملگرهای ترکیبی وزندار روی فضاهای L^p و H^p انجام شده است که تأثیر مهمی در روی مطالعه‌ی عملگرها روی فضاهای هیلبرت داشت. از جمله ریاضیدانانی که در این زمینه کار کرده‌اند می‌توان از آبراهامز، هادوین و هوور و لامبرت نام برد. در دهه‌ی ۱۹۹۰ مطالعه‌ی عملگرهای ترکیبی وزندار عمدتاً روی فضای توابع پیوسته و ارتباط آن با سیستمهای دینامیکی بوده است که مقالات [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] از جمله‌ی این کارها هستند.

بررسی عملگرهای ترکیبی وزندار در سه حوزه انجام شده است:

(الف) فضای باناخ توابع اندازه‌پذیر، این دسته شامل فضاهای L^p هستند.

(ب) فضای تابعی، مانند فضای هاردی و فضای برگمن که توسط نگاشتهای تحلیلی تعریف شده‌اند.

(ج) فضاهای توابع پیوسته روی فضاهای توپولوژیک.

تا آنجایی که ما می‌دانیم اولین بار عملگرهای ترکیبی در سال ۱۸۷۱ در مقاله‌ای از شولدرز ظاهر شدند. مسأله از این قرار بود که نگاشت T داده شده است تابع f و عدد α را طوری پیدا کنید که برای هر z متعلق به دامنه‌ی تابع داشته باشیم

$$f \circ T(z) = \alpha f(z).$$

در سال ۱۸۸۴ کونیگز این مسأله را روی توابع با دامنه‌ی دیسک واحد حل کرد. عملگرهای ترکیبی وزندار به طور جدی در قضیه‌ی کلاسیک باناخ—استون وارد می‌شوند. نتایج بدست آمده بیان می‌کند که برای فضاهای هاسدورف فشرده‌ی X و Y، اگر $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ یک طولپایی دوسویی باشد آن‌گاه T یک عملگر ترکیبی وزندار است. به عبارت دقیق‌تر

قضیه(باناخ—استون): فرض کنید X و Y دو فضای فشرده باشند و $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ یک طولپایی دوسویی باشد. آن‌گاه یک همانریختی $\pi : Y \longrightarrow X$ و یک تابع $\alpha \in C(Y)$ وجود دارد به طوری که برای هر y، $\mid \alpha(y) \mid = ۱$ و برای هر $f \in C(X)$ و هر $y \in Y$ ، $(Tf)(y) = \alpha(y) f(\pi(y))$.

همچنین عملگرهای ترکیبی وزندار در کتاب معروف باناخ در سال ۱۹۳۲ در ارتباط با مشخصه‌سازی یکریختی‌های طولپا روی فضای $L^p[0,1]$ بکار گرفته شده‌اند. این کار را لامپرتی در سال ۱۹۷۴ به فضای $L^p(X)$ دلخواه گسترش داد. در سال ۱۹۷۴ کامبرن این نتایج را به فضاهای برداری—مقدار

تعمیم داد. اولین بار کامویتز در سال ۱۹۸۱ فشردگی و فشردگی ضعیف عملگرهای ترکیبی وزندار را بررسی کرد. در سال ۱۹۹۰ فلدمن عملگرهای ترکیبی وزندار فشرده را روی فضاهای تابعی کلی‌تری بررسی کرد. این دسته شامل فضاهای L^p و شبکه‌های باناخ هستند. در سال ۱۹۸۸ جیمسون و راجاگوپالان فشردگی عملگر ترکیبی وزندار روی $C(X,E)$ را برای حالتی که X یک فضای هاسدورف فشرده و E یک فضای باناخ است، بررسی کردند آنها نتیجه کامویتز را برای حالت برداری—مقدار توسعه دادند.

در این پایان نامه ابتدا در فصل ۱ مقدمات مورد نیاز برای دیگر فصل‌ها را می‌آوریم. در فصل ۲، عملگرهای ترکیبی بین جبر توابع پیوسته‌ی یکنواخت روی فضای متریک دلخواه را بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم فشردگی و فشردگی ضعیف عملگرهای ترکیبی برای این فضاها معادل‌اند.

در فصل ۳، فشردگی و فشردگی ضعیف عملگرهای ترکیبی بین فضای توابع پیوسته روی یک فضای کاملاً منظم را که مجهز به توپولوژی فشرده — باز است، بررسی می‌کنیم. در فصل ۴، به بررسی فشردگی و فشردگی ضعیف درون‌ریختی‌ها روی جبر توابع پیوسته یک فضای هاسدورف فشرده دلخواه می‌پردازیم، این فصل در واقع کار اساسی کامویتز در این حوزه است. فصل ۵ اختصاص به بررسی مسئله‌ی مطرح شده از فصل ۴ برای جبر توابع برداری—مقدار دارد. در فصل پایانی فشردگی و فشردگی ضعیف عملگرهای ترکیبی روی فضاهای لبگ را بررسی می‌کنیم.

مینو سمیع املشی

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم.

با ارایه برخی از مفاهیم مربوط به فضاهای توپولوژیک این فصل را شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ (۱) مجموعه‌ی D را جهت‌دار می‌نامیم. اگر رابطه‌ای مانند $<$ روی D موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in D$ داشته باشیم

(الف) اگر $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$، آن‌گاه $\alpha > \gamma$.

(ب) برای هر $\alpha, \beta \in D$، $\gamma \in D$ موجود باشد که $\gamma > \alpha$ و $\gamma > \beta$.

(۲) منظور از یک تور در مجموعه‌ی X تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$ که در آن D مجموعه‌ی جهت‌دار است. معمولا با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$، تور $f : D \longrightarrow X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به طور ساده با (x_α) نمایش می‌دهیم.

(۳) فرض کنیم E و D مجموعه‌های جهت‌دار باشند. در این صورت تور $(y_\beta)_{\beta \in E}$ را یک زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نامیم اگر تابعی مانند $g : E \longrightarrow D$ موجود باشد به طوری که

(الف) $y_\beta = x_{g(\beta)}$ برای هر $\beta \in E$.

(ب) برای هر $\alpha \in D$، $\beta \in E$ موجود باشد که برای هر $\gamma \in E$ با شرط $\gamma > \beta$ داشته باشیم $g(\gamma) > \alpha$.

(۴) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X به x_0 همگراست،

هرگاه برای هر همسایگی U از $x_\circ$ در X، عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha > \alpha_\circ$، $x_\alpha \in U$ و می‌نویسیم $x_\alpha \to x_\circ$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x_\circ$. می‌توان ثابت کرد که $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به $x_\circ$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به $x_\circ$ همگرا باشد.

گزاره ۲.۱ اگر X فضای توپولوژیک باشد و $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ توری همگرا به x باشد. آن‌گاه هر زیر تور آن نیز به x همگراست.

اثبات. به مرجع [۳۰] رجوع کنید. ■

گزاره ۳.۱ فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند، $f : X \longrightarrow Y$ در $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ همگرا به x در X، تور $f(x_\alpha)$ نیز همگرا به $f(x)$ باشد.

اثبات. به قضیه‌ی ۱.۶ از [۳۰] رجوع کنید. ■

تعریف ۴.۱ فضای توپولوژیک X را تفکیک پذیر می‌نامند. هرگاه دارای یک زیر مجموعه‌ی چگال شمارشپذیر باشد.

قضیه ۵.۱ فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد. $A \subseteq X$ فشرده است، هرگاه هر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \subseteq A$ دارای یک زیر تور همگرا در A باشد. توجه کنید در صورتی که X فضای متریک باشد به جای تور، می‌توانیم دنباله را جایگزین کنیم.

اثبات. به مرجع [۲۸] رجوع کنید. ■

تعریف ۶.۱ (الف) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. $A \subseteq X$ را فشرده نسبی گویند، هرگاه $\overline{A}$ فشرده باشد.

(ب) زیر مجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک X فشرده دنباله‌ای است اگر و تنها اگر هر دنباله در A شامل زیر دنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای در A باشد.

(ج) زیر مجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک X فشرده‌ی شمارشی است هر گاه هر پوشش باز شمارای آن دارای زیر پوشش متناهی باشد.

(د) زیر مجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک X فشرده برحسب نقطه حدی است هر گاه هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی آن دارای نقطه‌ی حدی باشد. گوییم x یک نقطه حدی برای مجموعه‌ی A است هر گاه هر همسایگی x مجموعه‌ی A را در غیر از خود x قطع کند.

گزاره **۷.۱** فرض کنید X فضایی متریک‌پذیر باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند.

(الف) X فشرده است.

(ب) X فشرده بر حسب نقطه‌ی حدی است.

(ج) X فشرده دنباله‌ای است.

اثبات. به قضیه‌ی ۴.۷ از مرجع [۱۶] رجوع کنید. ■

تعریف **۸.۱** (الف) فضای توپولوژیک X را $k_{\mathbb{R}}$—فضا می‌نامند اگر پیوستگی تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه‌های فشرده، پیوستگی f روی X را نتیجه دهد.

(ب) فضای توپولوژیک X را k—فضا گویند، هرگاه $A \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی K در X، $A \cap K$ در K باز باشد.

بوضوح هر k—فضا یک $k_{\mathbb{R}}$—فضا است. متذکر می‌شویم هر فضای موضعاً فشرده و هر فضای شمارش‌پذیر نوع اول، k—فضا هستند. برای اثبات به [۳۱] مراجعه کنید.

تعریف **۹.۱** فضای توپولوژیک X را شمارش‌پذیر نوع اول می‌نامند. اگر در اصل شمارش‌پذیری نوع اول صدق کند. یعنی به ازای هر نقطه‌ی $x \in X$، خانواده‌ی حداکثر شمارش‌پذیر مانند B از زیر مجموعه‌های باز شامل x یافت شود به طوری که هر مجموعه‌ی باز G شامل x حاوی عضوی از B باشد.

تعریف **۱۰.۱** (الف) فضای توپولوژیک X نرمال است، هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی بسته و از هم جدای F_1 و F_2 از X، مجموعه‌های باز و از هم جدایی مانند G و H موجود باشند به طوری که $G \supseteq F_1$ و $F_2 \subseteq H$.

(ب) فضای توپولوژیک X کاملاً منظم است هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی بسته‌ی F از X و $p \notin F$ تابع پیوسته‌ای مانند $f : X \longrightarrow [0, 1]$ موجود باشد به طوری که $f(p) = 0$ و $f(F) = \{1\}$.

قضیه ۱۱.۱ (الف) هر فضای هاسدورف فشرده، نرمال است.
(ب) زیر فضای هر فضای کاملاً منظم، کاملاً منظم است.

اثبات. به مرجع [۲۸] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.
(الف) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط ـ مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع، یک فضای برداری است.
(ب) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط− مقدار کراندار روی X را با $C_b(X)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیرفضای $C(X)$ است و همراه با $\|.\|_u$ یک فضای باناخ است. یادآوری می‌کنیم که

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \quad (f \in C_b(X)).$$

گاهی اوقات $\|.\|_u$ را با $\|.\|_\infty$ نیز نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۳.۱ فرض کنید X فضای کاملاً منظم باشد. در این صورت توپولوژی X توسط $C(X)$ مشخص می‌شود به عبارت دیگر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \subseteq X$ به x همگراست، اگر و تنها اگر $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ برای هر $f \in C(X)$.

اثبات. به مرجع [۳۰] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. اگر C زیر مجموعه فشرده از X و U زیر مجموعه‌ی باز از Y باشد، مجموعه‌ی $S(C,U) = \{f \in C(X,Y) :\ f(C) \subseteq U\}$ تشکیل یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی $C(X,Y)$ می‌دهد که آن را توپولوژی فشرده− باز می‌نامند.

گزاره ۱۵.۱ فرض کنید X، k−فضا باشد. در این صورت $C(X)$ با توپولوژی فشرده−باز فضایی کامل است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۱.۴۳ از مرجع [۳۱] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم X یک فضای موضعا فشرده‌ی هاسدورف و (Y,d) یک فضای متریک باشد. همچنین $C_b(X,Y)$ را فضای تمام توابع پیوسته‌ی کراندار از X به Y در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌ی $K\subseteq C_b(X,Y)$ را همپیوسته در نقطه‌ی $x_\circ\in X$ گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon>\circ$ همسایگی U از $x_\circ$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in U$ و $f\in K$ داشته باشیم

$$d(f(x),f(x_\circ))<\varepsilon.$$

K را همپیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه‌ی $x\in X$ همپیوسته باشد.

تعریف ۱۷.۱ منظور از توپولوژی همگرای نقطه‌ای روی زیر مجموعه‌ای از فضای توابع از X به Y عبارت است از توپولوژی حاصلضربی فضای Y^X.

قضیه ۱۸.۱ **(قضیه آرزلا—اسکولی)** فرض کنید X یک فضای هاسدورف منظم یا k—فضا و Y یک فضای متریک باشد. خانواده $\mathcal{F}$ از توابع پیوسته از X به Y در توپولوژی فشرده—باز، فشرده است اگر و تنها اگر

(الف) $\mathcal{F}$ با توپولوژی همگرای نقطه‌ای روی Y^X بسته باشد.

(ب) برای هر $x\in X$، مجموعه‌ی $\{f(x):f\in\mathcal{F}\}$ فشرده‌ی نسبی در Y باشد.

(ج) $\mathcal{F}$ روی هر مجموعه‌ی فشرده از X همپیوسته باشد.

اثبات. به ۱۵.۴۳ از مرجع [۳۱] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۹.۱ **(قضیه گسترش تیتزه)** فرض کنید X فضای نرمال باشد. همچنین فرض کنید F زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از X باشد. در این صورت هر تابع پیوسته کراندار روی F به تابعی پیوسته و کراندار روی X قابل گسترش است.

اثبات. به مرجع [۲۸] مراجعه کنید. ■

قضیه ۲۰.۱ **(لم اوریسون)** فرض کنید X فضای نرمال، A و B دو زیر فضای بسته و مجزا از X باشند. آن‌گاه تابع حقیقی پیوسته‌ی f روی X وجود دارد که مقادیر آن در بازه‌ی واحد بسته‌ی $[\circ,۱]$ واقع‌اند به طوری که $f(A)=\{\circ\}$ و $f(B)=\{۱\}$.

اثبات. به مرجع [۲۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۱.۱ (الف)(**قضیه‌ی استون—وایرشتراس حالت حقیقی**) فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده باشد. همچنین فرض کنید A زیر جبر بسته‌ای از $C(X,\mathbb{R})$ باشد به طوری که نقاط X را جدا می‌کند و یک تابع ثابت غیر صفر را در بر دارد. آن‌گاه A برابر $C(X,\mathbb{R})$ است.

(ب) (**قضیه‌ی استون—وایرشتراس حالت مختلط**) فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده باشد. همچنین فرض کنید A زیر جبر بسته‌ای از $C(X,\mathbb{C})$ باشد به طوری که نقاط X را جدا کند و یک تابع ثابت غیر صفر را در بر دارد و بعلاوه تحت مزدوج مختلط بسته باشد. آن‌گاه A برابر $C(X,\mathbb{C})$ است.

اثبات. به مرجع [۲۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۲.۱ (**فشرده سازی استون—چخ**) فرض کنید X یک فضای کاملاً منظم باشد. آن‌گاه یک فضای هاسدورف فشرده‌ی βX با خواص زیر وجود دارد.

(۱) X زیر فضای چگال βX است.

(۲) هر تابع حقیقی پیوسته‌ی کراندار روی X گسترشی یکتا به یک تابع حقیقی پیوسته‌ی کراندار روی βX دارد.

اثبات. به مرجع [۲۸] مراجعه کنید. ■

لم ۲۳.۱ فرض کنید X فضای هاسدورف کاملاً منظم باشد. اگر $f \in C_b(X)$ و $\hat{f} \in C(\beta X)$ گسترش استون—چخ از f باشد، آن‌گاه $\|\hat{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$.

اثبات. چون $\hat{f}$ گسترشی از f است بنابراین

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|\infty.$$

اکنون باید نشان دهیم که $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. فرض کنید $x_\circ \in \beta X$ چنان باشد که $\|\hat{f}\|_\infty = |\hat{f}(x_\circ)|$. اگر $x_\circ \in X$، آن‌گاه $\|\hat{f}\|_\infty = |f(x_\circ)| \leq \|f\|_\infty$. اگر $x_\circ \in \beta X \setminus X$، چون $\overline{X} = \beta X$ بنابراین تور $(x_\alpha) \in X$ موجود است به طوری که $x_\alpha \longrightarrow x_\circ$، در نتیجه

$$f(x_\alpha) = \hat{f}(x_\alpha) \longrightarrow \hat{f}(x_\circ),$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، α_0 وجود دارد که $|\hat{f}(x_0) - f(x_{\alpha_0})| < \varepsilon$. به عبارت دیگر

$$|\hat{f}(x_0)| < |f(x_{\alpha_0})| + \varepsilon,$$

در نتیجه $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. ■

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید X فضای برداری باشد، زیرمجموعه‌ی C از X را محدب گوییم. هرگاه برای هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم $tC + (1-t)C \subset C$.

تعریف ۲۵.۱ (الف) فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد. گوییم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیک است هرگاه اعمال جمع برداری و ضرب عددی پیوسته باشند.

(ب) فرض کنید (X, τ) فضای برداری توپولوژیک باشد. فضای همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته روی (X, τ) را فضای دوگان X می‌نامند و با X^* نشان می‌دهند. بعلاوه مقدار تابعک $f \in X^*$ در X را با $f(x)$ یا $< f, x >$ نشان می‌دهیم. چنانچه X فضای باناخ باشد. در این صورت X^* همراه با اعمال نقطه‌ای و نرم

$$\|f\| = \sup\{| < f, x > | : \|x\| \leq 1\}$$

یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۶.۱ منظور از یک فضای موضعا محدب، یک فضای برداری X همراه با توپولوژی هاسدورف τ با یک پایه‌ی موضعی متشکل از همسایگی‌های صفر از مجموعه‌های محدب است که تحت آن نگاشت‌های $(x, y) \mapsto x + y$ از $X \times X$ به X و $(c, x) \mapsto cx$ از $\mathbb{C} \times X$ به X پیوسته‌اند. به خصوص یک فضای نرم‌دار X موضعا محدب است. در واقع $\{\delta B_X : \delta \geq 0\}$ یک پایه‌ی موضعی با شرایط مزبور تشکیل می‌دهد که در آن B_X گوی یکه‌ی بسته در X است.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنیم X یک فضای موضعا محدب باشد و $Y \subseteq X^*$. در این صورت

(الف) کوچکترین توپولوژی روی X را به طوری که هر $f \in Y$ پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف روی X، القایی توسط Y گوییم و با $\sigma(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ را به طور ساده توپولوژی ضعیف می‌نامیم. در واقع تور (x_α) در X تحت توپولوژی ضعیف به $x \in X$ همگراست اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^*$ داشته باشیم $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x)$. در این حالت می‌نویسیم $x_\alpha \xrightarrow{w} x$.

(ب) کوچکترین توپولوژی روی X^* که خانواده‌ی $\hat{x}$ ها را پیوسته می‌کند توپولوژی ضعیف* نامیده می‌شود و به صورت $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم. در واقع تور (f_α) در X^* تحت توپولوژی ضعیف* به $f \in X^*$ همگراست اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$. در این حالت می‌نویسیم $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$. در اینجا $\hat{x}$ تصویر کانونی x در X^{**} است.

تعریف ۲۸.۱ (الف) فضای موضعاً محدب X را کامل گوییم، هرگاه هر تور کشی در آن همگرا باشد. تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X را کشی گوییم هرگاه برای هر همسایگی U از صفر α_0 موجود باشد که $x_\alpha - x_\beta \in U$ برای هر $\beta, \alpha \geq \alpha_0$.

(ب) فضای برداری توپولوژیک X شبه کامل است، هرگاه هر زیر مجموعه‌ی بسته و کراندار آن کامل باشد.

تعریف ۲۹.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. زیر مجموعه‌ی B از X را کلاً کراندار یا پیش‌فشرده نامیم، هرگاه برای هر همسایگی U از صفر، زیر مجموعه‌ی متناهی $F \subseteq B$ موجود باشد به طوری که $B \subseteq F + U$.

قضیه ۳۰.۱ هر مجموعه‌ی فشرده‌ی نسبی درفضای برداری توپولوژیک کلاً کراندار است. بعلاوه هر مجموعه‌ی کلاً کراندار، کراندار است.

اثبات. به قضیه‌ی ۶.۴.۱ از [۳۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۱.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. زیر مجموعه‌ی S از X فشرده است اگر و تنها اگر کلاً کراندار و کامل باشد.

اثبات. به قضیه‌ی ۶.۵.۷ از [۳۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۲.۱ (**ابرلین—اشمولین**) فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد و $E \subseteq X$. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

(۱) $E \subseteq X$ فشرده‌ی ضعیف نسبی است.

(۲) $E \subseteq X$ فشرده‌ی شمارشی ضعیف است.

(۳) $E \subseteq X$ فشرده دنباله‌ای ضعیف است.

اثبات. به مرجع [۳۰] مراجعه کنید. ■

گزاره **۳۳.۱** فضای باناخ X را در نظر بگیرید. آن‌گاه

(الف) گوی یکه X فشرده‌ی ضعیف است اگر و تنها اگر X انعکاسی باشد.

(ب) گوی یکه X فشرده است اگر و تنها اگر X متناهی بعد باشد.

اثبات. به مرجع [۱۹] مراجعه کنید. ■

تعریف **۳۴.۱** اگر X و Y فضاهای برداری توپولوژیک باشند و $\mathcal{F}$ دسته‌ای از توابع خطی از X به Y باشند، $\mathcal{F}$ همپیوسته است هر گاه برای هر همسایگی W از صفر در Y متناظر آن همسایگی V از صفر در X چنان یافت شود به طوری که برای هر $\varphi \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $\varphi(V) \subseteq W$.

تعریف **۳۵.۱** (الف) فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده است، اگر و تنها اگر هر مجموعه‌ی کراندار از X را به یک زیر مجموعه فشرده‌ی نسبی از Y بنگارد.

(ب) فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند. عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را ضعیف فشرده گویند، هرگاه هر مجموعه کراندار از X را به یک زیرمجموعه فشرده‌ی ضعیف نسبی در Y بنگارد.

تذکر **۳۶.۱** اگر X و Y دو فضای باناخ باشند. با توجه به اینکه فشردگی و فشردگی دنباله‌ای در فضای باناخ یکی هستند، عملگر T از X به توی Y فشرده است اگر و تنها اگر تصویر هر دنباله‌ی کراندار تحت T دارای یک زیر دنباله‌ی همگرا باشد. با توجه به قضیه‌ی ابرلین—اشمولین حکم مشابهی برای ضعیف فشردگی عملگر T برقرار است. بوضوح هر عملگر فشرده، فشرده‌ی ضعیف است. اما عکس این مطلب درست نیست. برای مثال فرض کنید X فضای باناخ انعکاسی بینهایت بعدی باشد. عملگر همانی I از X به توی X یک عملگر فشرده‌ی ضعیف است اما با توجه به گزاره‌ی ۳۳.۱ فشرده نیست.

گزاره **۳۷.۱** فرض کنید X، Y و Z فضاهای باناخ باشند.

(الف) هر عملگر با رتبه متناهی از X به Y، فشرده است.

(ب) فضای عملگرهای فشرده از X به Y نسبت به نرم عملگری بسته است.

(ج) فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ و $S : Y \longrightarrow Z$ دو عملگر خطی باشند. اگر T فشرده باشد در این صورت $S \circ T$ عملگری فشرده است.

اثبات. به مرجع [۱۹] مراجعه کنید. ■

تعریف **۳۸.۱** (الف) اگر X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی کراندار T از X به Y وارون‌پذیر است، اگر عملگر خطی کراندار $S : Y \longrightarrow X$ موجود باشد به طوری که

$$ST = I = TS,$$

که در اینجا I عملگر همانی است. توجه کنید دامنه عملگرهای در نظر گرفته شده همواره برابر مجموعه اول فرض می‌شود.

(ب) فرض کنید X یک فضای باناخ و T یک عملگر خطی پیوسته روی X باشد. طیف T به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \text{وارونپذیر نباشد.}\ T - \lambda I\}.$$

(ج) عدد مختلط λ را یک مقدار ویژه عملگر T گویند در صورتی که $T - \lambda I$ یک به یک نباشد. x را یک بردار ویژه‌ی عملگر T گوییم هر گاه در شرط $Tx = \lambda x$ صدق کند.

تذکر **۳۹.۱** توجه کنید $\lambda \in \sigma(T)$ اگر و تنها اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

(الف) عملگر $T - \lambda I$ پوشا نباشد.

(ب) $T - \lambda I$ یک به یک نباشد.

تعریف **۴۰.۱** فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. فرض کنید T یک عملگر خطی از X به Y باشد. عملگر الحاقی T که با T^* نشان داده می‌شود عبارت است از عملگر $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ که برای هر $y^* \in Y^*$ و $x^* \in X^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$< T^*(y^*), x >=< y^*, T(x) > .$$

گزاره **۴۱.۱** فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار باشند. اگر $T : X \longrightarrow Y$ نگاشتی کراندار باشد، آن‌گاه نگاشت الحاقی $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$، ضعیف$^*-$ ضعیف* پیوسته است.

اثبات. به لم VI.۲.۳ از مرجع [٦] رجوع کنید. ■

تعریف ۴۲.۱ فضای برداری $\mathcal{A}$ تحت میدان مختلط $\mathbb{C}$ را یک جبر می‌نامند، هرگاه برای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$

$$x(yz) = (xy)z,$$

$$x(y+z) = xz + yz,$$

$$(x+y)z = xz + yz,$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

بعلاوه اگر $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ باشد آن را یک جبر باناخ می‌نامند، هرگاه نامساوی زیر برقرار باشد

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

تعریف ۴۳.۱ فرض کنیم A یک جبر باشد. نگاشت خطی $f : A \longrightarrow A$ را یک همریختی می‌نامیم. هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $f(ab) = f(a)f(b)$. همریختی f را یکریختی می‌نامیم اگر دوسویی نیز باشد.

تعریف ۴۴.۱ فرض کنید $\mathcal{M}$ یک فضای برداری و $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. گوییم $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}-$ مدول چپ است، هرگاه نگاشت $. : \mathcal{A} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ موجود باشد به طوری که برای هر $n, m \in \mathcal{M}$ و $a, b \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$(ab).m = a.(b.m),$$

$$\alpha(a.m) = a.(\alpha m),$$

$$(a+b).m = a.m + b.m,$$

$$a.(m+n) = a.m + b.n.$$

فصل ۲

عملگرهای ترکیبی بین جبر توابع پیوسته‌ی یکنواخت

در این فصل، به بررسی خاصیت‌هایی از نگاشت‌های پیوسته‌ی یکنواخت روی فضاهای متریک و عملگرهای ترکیبی مرتبط با آنها می‌پردازیم و نشان می‌دهیم برای نگاشت $\varphi : Y \longrightarrow X$ که X و Y دو فضای متریک هستند، شرایط زیر معادل‌اند :

(۱) φ پیوسته‌ی یکنواخت است.

(۲) برای هر $f \in C_u(X)$، $f \circ \varphi \in C_u(Y)$.

همچنین ثابت می‌کنیم هر نگاشت پیوسته‌ی یکنواخت $\varphi : Y \longrightarrow X$، یک عملگر ترکیبی $T_\varphi : C_u(X) \longrightarrow C_u(Y)$ که در واقع یک همریختی به صورت $T_\varphi f = f \circ \varphi$ است، تولید می‌کند.

برای $T_\varphi f$ شرایط زیر هم ارزند:

(۱) T_φ فشرده‌ی ضعیف است.

(۲) T_φ فشرده است.

(۳) φ ثابت است.

این فصل نتایج مقاله‌ی [۱۲] از یاوانا است.

با یاد آوری تعریف زیر این فصل را شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ فرض کنید (X,d_1) و (Y,d_2) دو فضای متریک باشند. نگاشت f از (X,d_1) به توی (Y,d_2) را پیوسته‌ی یکنواخت گوییم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x,x' \in X$ اگر $d_1(x,x') < \delta$ نتیجه بگیریم $d_2(f(x),f(x')) < \varepsilon$.

فضای توابع حقیقی—مقدار کراندار و پیوسته‌ی یکنواخت روی (X,d) را با $C_u(X)$ نشان می‌دهیم و با نرم یکنواخت $\|.\|_u$ مجهز می‌کنیم.
در ابتدا لم ساده‌ی زیر را که در اثبات قضیه‌ی اصلی این بخش نقش اساسی دارد اثبات می‌کنیم.

لم ۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد و $A,B \subseteq X$ به طوری که

$$d(A,B) = \inf\{d(a,a') : a \in A, a' \in B\} > 0.$$

آن‌گاه $f \in C_u(X)$ وجود دارد که برای هر $x \in X$، $0 \le f(x) \le 1$ و $f(A) = \{0\}$ و $f(B) = \{1\}$.

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} \qquad (x \in X).$$

بوضوح $f(A) = \{0\}$ و $f(B) = \{1\}$. اکنون ثابت می‌کنیم f پیوسته یکنواخت است.

قرار دهید $\inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\} = \alpha$. در این صورت برای هر $z \in X$ و $a \in A$ و $b \in B$ داریم

$$\alpha \le d(a,b) \le d(a,z) + d(z,b).$$

بنابراین برای هر $z \in X$

$$\alpha \le d(z,A) + d(z,B).$$

حال برای هر $x,y \in X$ داریم

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} - \frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,B)}\right| \\
&= \frac{|(d(y,A)+d(y,B))d(x,A) - (d(x,A)+d(x,B))d(y,A)|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&= \frac{|(d(x,A)-d(y,A))d(x,B) + (d(y,B)-d(x,B))d(x,A)|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&\le \frac{(d(x,B)+d(x,A))d(x,y)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&= \frac{d(x,y)}{d(y,A)+d(y,B)} \\
&\le (\frac{1}{\alpha})d(x,y).
\end{aligned}$$

چون $\frac{1}{\alpha}$ عدد ثابت است، بنابراین f بوضوح پیوسته یکنواخت است. ■

لم ۳.۲ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. چنانچه $(x_n)_n$ و $(x'_n)_n$ دنباله‌هایی در X باشند به طوری که برای هر $f \in C_u(X)$، $\lim_{n\longrightarrow\infty} |f(x_n) - f(x'_n)| = \circ$، آن‌گاه $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x'_n) = \circ$.

اثبات. با برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ و یک دنباله صعودی از اعداد صحیح مثبت $(n_j)_j$ موجود باشد به طوری که $d(x_{n_j}, x'_{n_j}) \geq \varepsilon$ برای هر j.

روند اثبات، استفاده از تکرار و انتخاب زیر دنباله‌هایی است که جملاتشان به اندازه کافی جدا شده‌اند. آن‌گاه با استفاده از لم ۲.۲ به تناقض می‌رسیم.

گام اول : دنباله‌ی $(x_{n_j})_j$ هیچ زیر دنباله‌ی همگرایی ندارد. در واقع اگر یک زیر دنباله‌ی $(x_{n_{j_k}})_k$ همگرا به $x_\circ$ داشته باشد در این صورت تابع $f \in C_u(X)$ را با $f(x) = d(x, x_\circ)$ تعریف می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow\infty} d(x'_{n_{j_k}}, x_\circ) &= \lim_{k\longrightarrow\infty} d(x'_{n_{j_k}}, x_\circ) - \lim_{k\longrightarrow\infty} d(x_{n_{j_k}}, x_\circ)\\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} |f(x_{n_{j_k}}) - f(x'_{n_{j_k}})|\\ &= \circ,\end{aligned}$$

که به تناقض می‌رسیم زیرا

$$\begin{aligned}\circ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} d(x_{n_{j_k}}, x_\circ) + \lim_{k\longrightarrow\infty} d(x'_{n_{j_k}}, x_\circ)\\ &\geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf_{k\geq n}\{d(x_{n_{j_k}}, x'_{n_{j_k}})\}\\ &\geq \varepsilon.\end{aligned}$$

با استفاده از استدلال مشابهی دنباله‌ی $(x'_{n_j})_j$ نیز هیچ زیر دنباله‌ی همگرایی ندارد. قرار می‌دهیم $A = \{x_{n_j} : j \geq ۱\}$ و $B = \{x'_{n_j} : j \geq ۱\}$. توجه کنید که هیچ کدام از این دو زیر مجموعه‌های فشرده نسبی در X نیستند. بنابراین نتیجه می‌شود دنباله‌های فوق زیر دنباله‌های غیر همگرا دارند. لذا یک $\varepsilon > \alpha > \circ$ و یک دنباله‌ی صعودی از اعداد صحیح مثبت مانند $(j_k)_k$ وجود دارد به طوری که برای هر $r \neq s$

$$d(x_{n_{j_r}}, x_{n_{j_s}}) \geq \alpha, \quad d(x'_{n_{j_r}}, x'_{n_{j_s}}) \geq \alpha.$$

گام دوم : یک دنباله‌ی صعودی از اعداد صحیح مثبت مانند $(k_l)_l$ با این خاصیت وجود دارد که برای هر