بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

که هر چه دارم از برکت وجود آنهاست

و تقدیم به

خواهر عزیز و برادران فداکارم

و همه عزیزانی که دوستشان دارم

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی- گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

دسته بندی واحدهای تصمیم گیری در تحلیل پوششی داده ها

استاد راهنما:

دکتر فرانک حسین زاده سلجوقی

تحقیق و نگارش:

زهرا الهی مقدم

بهمن۱۳۹۱

سپاس‌گزاری

سپاس گزار کسانی هستم که سر آغاز تولد من هستند،
از یکی زاده می شوم و از دیگری جاودانه،
استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت
و پدر و مادری که تار مویی از آن ها به پای من سیاه نماند.

از استاد فرهیخته و گرانقدر سرکار خانم دکتر حسین زاده سلجوقی که با هدایتگری و راهنمایی‌های ارزنده خویش سختی‌های این مسیر را بر من آسان نموده‌اند سپاسگزاری می‌کنم.

همچنین از زحمات بی‌دریغ پدر و مادر عزیزم و برادران دلسوز و خواهر فداکارم که همیشه مشوق بنده در امر تحصیل علم و دانش بوده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

زهرا الهی مقدم
بهمن ۱۳۹۱

چکیده

تحلیل پوششی داده ها روشی برای ارزیابی عملکرد سازمانها و واحدهای تصمیم گیری است. این روش واحدها را به چهار دسته شامل: ناکارا، کارای ضعیف، کارای غیر راسی، کارای راسی تقسیم می کند. در این پایان نامه دسته جدیدی از واحد های تصمیم گیری به نام نقاط اتکا را معرفی می کنیم. یک نقطه اتکا روی اشتراک بین مرز کارایی و قسمت آزاد مرز قرار دارد. در واقع یک نقطه اتکا، کارای راسی است که مرز کارایی ضعیف را می سازد. حذف نقاط اتکا مرز کارایی را تغییر می دهد و باعث حذف ناحیه ای از مجموعه امکان تولید می شود. نقطه اتکا دارای این ویژگی نیز می باشد که تغییر در ورودی یا خروجی آن، مرز کارایی را تغییر داده و با افزایش ورودی یا کاهش خروجی نقطه جدید هنوز روی مرز بوده و کارای راسی می باشد. از این رو ویژگی های یک نقطه اتکا اهمیت آن را آشکار می سازد. با توجه به اهمیت این نقاط، در این پایان نامه روش هایی که سریعتر نقاط اتکا را شناسایی می کند، پیشنهاد می دهیم. در ابتدا الگوریتم های بیان شده برای شناسایی این نقاط را مطرح می کنیم و سپس با استفاده از خواص این نقاط روش های مختلفی از جمله روش ابرکارایی اصلاح شده را که با محاسبات کمتری، نقاط اتکا را شناسایی می کند، پیشنهاد می کنیم. با حل مثال عددی به تشریح روش پیشنهادی و مقایسه نتایج آن با سایر روش ها می پردازیم. در پایان نیز تحلیل حساسیت را در مورد نقطه اتکا بکار می بریم و ناحیه اطمینان یک نقطه اتکا را بدست می آوریم. با توجه به نتایج مشاهده می شود که ناحیه اطمینان یک نقطه اتکا نامتناهی است.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، نقاط اتکا، مرز کارایی، ابرصفحه، ابرکارایی، تحلیل حساسیت.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها ط

فهرست جدول‌ها ی

۱ مقدمات و مفاهیم پایه ۱

۱-۱ مقدمه . . . ۲

۱-۲ کارایی . . . ۲

۱-۳ تابع تولید . . . ۳

۱-۴ تحلیل پوششی داده ها (DEA) . . . ۳

۱-۵ مجموعه امکان تولید . . . ۳

۱-۶ مدل های اساسی تحلیل پوششی داده ها . . . ۴

۱-۶-۱ مدل CCR . . . ۶

۱-۶-۲ مدل BCC . . . ۸

۱-۶-۳ مدل ابرکارایی AP . . . ۱۰

۱-۶-۴ مدل جمعی . . . ۱۱

۱-۶-۵ مدل RAM . . . ۱۲

۱-۷ دسته بندی DMU ها . . . ۱۳

۱-۷-۱ DMU های کارا . . . ۱۴

۱-۷-۲ DMU ناکارا . . . ۱۵

۱-۸ ابرصفحه های سازای فضا . . . ۱۵

۲ تعاریف و شناسایی نقاط اتکا ۱۹

۲-۱ مقدمه . . . ۲۰

۲-۲ نقاط اتکا . . . ۲۰

۲-۳ الگوریتم های تشخیص نقاط اتکا ۲۱
۲-۳-۱ الگوریتم بوگنول ۲۱
۲-۳-۲ الگوریتم جهانشاهلو و همکاران ۲۸
۲-۳-۳ یک الگوریتم کلی برای دسته بندی DMU ها ۳۱
۲-۴ مدلی برای تشخیص نقاط اتکا ۳۲

۳ نقاط اتکا و ابرصفحه های سازای فضا ۳۵
۳-۱ مقدمه ۳۶
۳-۲ ابرصفحه های سازای فضا ۳۶
۳-۲-۱ ابرصفحه های قوی ۳۷
۳-۲-۲ ابرصفحه های ضعیف ۳۸
۳-۳ ارتباط نقاط اتکا و ابرصفحه های سازای فضا ۴۳

۴ نقاط اتکا و بازه کارایی و مدل ابرکارایی اصلاح شده ۴۸
۴-۱ مقدمه ۴۹
۴-۲ نقاط اتکا و بازه کارایی و ناکارایی ۴۹
۴-۲-۱ بازه کارایی برای داده های قطعی ۵۰
۴-۲-۲ بازه ناکارایی برای داده های قطعی ۵۲
۴-۲-۳ بازه کارایی با استفاده از مدل RAM ۵۳
۴-۲-۴ بازه ناکارایی با استفاده از مدل RAM ۵۴
۴-۳ تشخیص نقاط اتکا بوسیله مدل ابرکارایی اصلاح شده ۵۷

۵ تحلیل حساسیت نقطه اتکا ۶۴
۵-۱ مقدمه ۶۵
۵-۲ تحلیل حساسیت واحد کارا ۶۵
۵-۳ تحلیل حساسیت نقطه اتکا ۶۷

مراجع ۷۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۳

فهرست شکل‌ها

شکل ۱-۱ جواب چندگانه برای مرجع یک واحد. ۱۴
شکل ۱-۲ انواع DMU. ۱۶

شکل ۲-۱ مرز کارایی با استفاده از جدول ۲-۱. . . . . ۲۵
شکل ۲-۲ تصویر ساده DMU های کارا با حذف ورودی اول. ۲۶
شکل ۲-۳ تصویر ساده DMU های کارا با حذف ورودی دوم. ۲۷
شکل ۲-۴ تصویر ساده DMU های کارا با حذف خروجی. ۲۸

شکل ۳-۱ ابرصفحه های گذرا از DMU_k. ۳۷
شکل ۳-۲ مرز کارایی داده های مثال ۳-۱. . . . . ۴۵

شکل ۵-۱ ناحیه اطمینان واحد کارای B. ۶۷
شکل ۵-۲ مرز کارایی داده های مثال ۳-۱. . . . . ۶۸
شکل ۵-۳ مرز کارایی با حذف $DMU_۲$. ۶۹

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۱ مقادیر ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیری. ۱۳

جدول ۲-۱ ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیری مثال ۲-۱. . . . . ۲۴
جدول ۲-۲ کارایی DMU. ۲۵
جدول ۲-۳ کارایی واحدهای کارا با حذف ورودی اول. ۲۶
جدول ۲-۴ کارایی واحدهای کارا با حذف ورودی دوم. ۲۷
جدول ۲-۵ کارایی واحدهای کارا با حذف خروجی. ۲۷
جدول ۲-۶ کارایی DMU ها با حل مدل $(۲ - ۳)$. ۳۳

جدول ۳-۱ ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیری مثال ۳-۱. . . . . ۴۵
جدول ۳-۲ کارایی واحدهای تصمیم گیری. ۴۶

جدول ۴-۱ ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیری. ۵۵
جدول ۴-۲ بازه کارایی و ناکارایی با استفاده از مدل CCR. ۵۶
جدول ۴-۳ بازه کارایی و ناکارایی با استفاده از مدل RAM. ۵۶
جدول ۴-۴ انواعDMU. ۶۲
جدول ۴-۵ نتایج حاصل از حل مدل ابرکارایی اصلاح شده. ۶۲

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

ارزیابی عملکرد سازمانها در جهت گیری آنها نقش اساسی دارد. در این راستا می بایست میزان کارایی و بهره وری سازمانها مورد محاسبه قرار گیرد. یکی از ابزارهای مناسب و کارامد در این زمینه تحلیل پوششی داده ها DEA [۱] می باشد که به عنوان یک روش غیر پارامتری به منظور محاسبه کارایی واحدهای تصمیم گیرنده استفاده می شود.

مدل های تحلیل پوششی داده ها علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف سازمانها را در شاخص های مختلف تعیین کرده و با ارائه میزان مطلوب آنها خط مشی سازمان را بسوی ارتقای کارایی و بهره وری مشخص می کند. همچنین الگوهای کارا که ارزیابی واحدهای ناکارا بر اساس آنها انجام گرفته است به واحدهای ناکارا معرفی می شوند. الگوهای کارا، واحدهایی هستند که با ورودی های مشابه واحدهای ناکارا خروجی بیشتر تولید کرده (ماهیت خروجی)، یا همان خروجی را با استفاده ار ورودی های کمتر تولید کرده اند(ماهیت ورودی). این تنوع وسیع، موجب شده است استفاده از این تکنیک با سرعت فزاینده ای رو به گسترش باشد. همین امر باعث رشد فزاینده این تکنیک از بعد تئوری نیز شده است و آن را به یکی از شاخه های فعال در علم تحقیق در عملیات تبدیل نموده است.

هدف از این فصل، ارائه بعضی تعاریف و مدل های اساسی تحلیل پوششی داده ها می باشد. مفاهیم اساسی تحلیل پوششی داده ها اولین بار توسط چارنز و کوپر و رودز [۲] مطرح شد و با گذشت زمان توسعه یافت.

۱-۲ کارایی

به طور کلی کارایی نسبت بازده به منابع مصرف شده می باشد. به عبارت دیگر در بین واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) [۳] به واحدی کارا گفته می شود که در مقایسه با بقیه واحدها بالاترین کارایی را داشته باشد.

کارایی فارل

فرض می کنیم مجموعه ای از n واحد تصمیم گیرنده هر کدام با دو ورودی x_1, x_2 و یک خروجی y وجود دارند، فارل بحث را این گونه آغاز کرد که:

واحد (x_1, x_2, y) کارایی θ دارد اگر و فقط اگر واحد $\left(1, \frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}\right)$ کارایی θ داشته باشد.[۲۳، ۱۰]

[۱] Data Envelopment Analysis
[۲] Charnes , Cooper and Rodes
[۳] Decision Making Unite

کارایی نسبی

وقتی می گوییم DMU_k کارای نسبی است یعنی نسبت به دیگر DMU ها سنجیده شده است و کارایی DMU_k از دیگر DMU ها بهتر است.

۱-۳ تابع تولید

تابع تولید تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی ها، ماکزیمم خروجی ها را می دهد. با داشتن این تابع می توان قضاوت کرد که یک واحد تصمیم گیری کارا هست یا نه. اما در اغلب موارد به دلیل پیچیدگی فرایند تولید و ... تابع تولید در دست نیست و مجبوریم تقریبی از آن را داشته باشیم که به دو صورت امکان پذیر می باشد: ۱-روش های پارامتری ۲-روش غیر پارامتری.

در روش پارامتری شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می گیریم و با استفاده از روش های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می کنیم. از جمله روش های پارامتری روش حداقل کردن مجموع مربعات انحرافات (LSE) [۴] و همچنین روش کاب داگلاس [۵] می باشد.

در روش غیر پارامتری تابع تولید توسط یک مجموعه بنام مجموعه امکان تولید، تقریب زده می شود.

۱-۴ تحلیل پوششی داده ها (DEA)

تحلیل پوششی داده ها، تکنیکی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه ای از واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از برنامه ریزی ریاضی انجام می شود. عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی حاصل، نتیجه مقایسه واحدها با یکدیگر است. وقتی که می گوییم واحد تصمیم گیرنده j ام کاراست یعنی این واحد در مقایسه با سایر واحدها خوب عمل می کند و از منابع خود به خوبی استفاده می کند.

تعریف ۱-۱. هر گاه $\mathbf{y_j} \geqslant \mathbf{y_k}, \mathbf{x_j} \leqslant \mathbf{x_k}$ و نامساوی اکید حداقل برای یک مولفه برقرار باشد، گوییم DMU_j بر DMU_k غالب است و یا به عبارت دیگر گوییم،DMU_k مغلوب DMU_j است.[۲۳، ۱۰]

۱-۵ مجموعه امکان تولید

با داشتن تابع تولید به راحتی می توان کارایی یک واحد تصمیم گیرنده را محاسبه کرد اما به دلایل مختلف تابع تولید به راحتی محاسبه نمی گردد و در بعضی مواقع به دست آوردن صورت تحلیلی آن غیر ممکن می باشد. از این رو مجموعه ای بنام مجموعه امکان تولید (PPS) [۶] می سازیم و مرز آن را به عنوان تقریبی

[۴] Least Squares Estimate
[۵] Cobb Dauglas
[۶] Production Pasibility Set

از تابع تولید در نظر می گیریم. تابع تولید حاصل از مجموعه امکان تولید یک مرز تقریبی است. مجموعه امکان تولید که با T نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$T = \{(x, y) \,|\, x \text{بتواند} y \text{را تولید کند}\}$$

اصول موضوعه مجموعه امکان تولید

۱-اصل شمول مشاهدات: بردار ورودی $\mathbf{x_j}$ می تواند بردار خروجی $\mathbf{y_j}$ را تولید کند و تمام مشاهدات در T قرار دارند.

$$(\mathbf{x_j}, \mathbf{y_j}) \in T \quad , \quad j = ۱, ..., n$$

۲-اصل امکان پذیری:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T \quad , \quad \bar{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad (\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \in \mathbf{T}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T \quad , \quad \bar{\mathbf{y}} \leqslant \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{T}$$

۳-اصل تحدب:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T \quad , \quad (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in T \quad \Rightarrow [\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (۱ - \lambda)(\mathbf{x}', \mathbf{y}')] \in T$$

۴-اصل بیکرانی اشعه:

اگر $\lambda \geqslant ۰$ و $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ آنگاه $(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) \in T$

۵- با استفاده از اصول موضوعه، مجموعه امکان تولید به صورت زیر می باشد:

$$T_c = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \geqslant \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \quad , \quad \mathbf{y} \leqslant \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \quad , \quad \lambda_j \geqslant ۰ \quad j = ۱, ..., n \right\}$$

۱-۶ مدل های اساسی تحلیل پوششی داده ها

به طور کلی مدل های DEA به دو گروه شعاعی و غیر شعاعی تقسیم بندی می شوند.

الف) مدلهای شعاعی: این مدل ها بر اساس اندازه کارایی فارل هستند. ویژگی مهم این گروه این است که با استفاده از برنامه ریزی خطی کارایی تکنیکی را در تابع هدف، به صورت امتیاز کارایی می سنجند. از انواع

مدلهای شعاعی می توان به مدل CCR [۷] و BCC [۸] اشاره کرد.
ب) مدل های غیر شعاعی: در مدلهای غیر شعاعی کارایی تکنیکی تنها با بررسی متغیرهای کمکی(میزان کمبود یا مازاد در خروجی و ورودی ها) تعیین می شود. در مدل غیر شعاعی، الزاما امتیاز کارایی محاسبه نمی شود.

چارنز و همکاران در سال ۱۹۸۵، اولین بار مدل جمعی را به عنوان یک مدل غیر شعاعی پیشنهاد دادند. همچنین کوپر و همکاران در سال ۱۹۹۹ یک مدل غیر شعاعی DEA به عنوان مدل RAM [۹] که یک مدل جمعی محدود شده بود، پیشنهاد کردند.

در این مطالعه ابتدا دو مدل شعاعی و سپس دو مدل غیر شعاعی را مرور می کنیم. در روش DEA واحد یا سازمان تحت بررسی، واحد تصمیم گیرنده (DMU) نامیده می شود. یک واحد تصمیم گیرنده عبارتست از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$ بردار خروجی مانند $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_s)$ را تولید می نماید. به طور کلی DMU ، سازمان یا نهادی است که ورودی ها را به خروجی ها تبدیل می کند و ارزیابی عملکرد آن مورد نظر است.
هر واحد تصمیم گیری را با m ورودی و s خروجی در نظر بگیرید و در تمام مشاهدات $\mathbf{x_j} \geqslant \mathbf{0}$ $\mathbf{x_j} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{y_j} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{y_j} \neq \mathbf{0}$.

تعریف ۱-۲. واحدهای تصمیم گیری که جزء داده های مساله می باشند را DMU مشاهده شده می گویند.[۲۳، ۱۰]

تعریف ۱-۳. واحدهای تصمیم گیری که جزء داده های مساله نباشند و از ترکیب خطی نامنفی دیگر واحدها بدست آمده باشد واحد مجازی گفته می شود. ورودی و خروجی یک واحد مجازی به صورت $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j}\right)$ می باشد به طوریکه حداقل دو λ_j بزرگتر از صفر باشند.[۲۳، ۱۰]

تعریف ۱-۴. DMU_k با بردار ورودی $\mathbf{x_k}$ و بردار خروجی $\mathbf{y_k}$ را کارای نسبی گوییم اگر $(-\mathbf{x_k}, \mathbf{y_k})$ به وسیله هیچ زوج مرتبی مانند $\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j}\right)$ مغلوب نگردد که در آن $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j}\right)$ از اعضای مجموعه امکان تولید می باشد.[۲۳، ۱۰]

[۷] Cooper Charnes Rhodes
[۸] Banker Charnes Cooper
[۹] Range Adjusted Measure

الف) مدل های شعاعی

۱-۶-۱ مدل CCR

در ارزیابی عملکرد، در واقع بدنبال این هستیم که هر واحد تصمیم گیری روی مرز کارایی (یا مرز مجموعه امکان تولید قرار دارد) یا خیر. به این منظور، مدل های مختلفی پیشنهاد شده است. اگر بر حسب ورودی کار کنیم باید بسنجیم که به ازای حداقل چه مقدار از θ، $(\theta\mathbf{x_k}, \mathbf{y_k})$ روی مرز T_c قرار دارد، بنابراین مدل CCR بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_k \\ s.t: \quad & (\theta\mathbf{x_k}, \mathbf{y_k}) \in T_c, \end{aligned}$$

اما شرط عضویت در T_c آنست که

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} &\leqslant \theta_k \mathbf{x_k}, \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} &\geqslant \mathbf{y_k}, \end{aligned}$$

پس در واقع مدل زیر را برای ارزیابی کارایی واحد حل می کنیم:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_k \\ s.t: \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \leqslant \theta_k \mathbf{x_k}, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \geqslant \mathbf{y_k}, \\ & \lambda_j \geqslant 0 \qquad\qquad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

که به این مدل، مدل CCR با ماهیت ورودی گفته می شود.

مدل برنامه ریزی خطی CCR با ماهیت ورودی بعد از استانداردسازی عبارتست از:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_k \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_k x_{ik}, \quad i = 1, ..., m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{ij} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = 1, ..., s, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \qquad\qquad j = 1, ..., n, \\ & s_i^- \geqslant 0, \qquad\qquad i = 1, ..., m, \\ & s_r^+ \geqslant 0, \qquad\qquad r = 1, ..., s, \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

قضیه ۱-۵. *اگر θ_k^* [۱۰] مقدار بهینه مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی باشد، آنگاه $0 < \theta_k^* \leqslant 1$.*

برهان. [۱۰، ۲۳]

[۱۰] نماد (*) در این پایان نامه بهینگی را نشان می دهد.

تعریف ۱-۶. اگر در مدل CCR ، $\theta_k^* = ۱$، آنگاه DMU_k کاراست.[۲۳، ۱۰]

تعریف ۱-۷. DMU_k در مدل CCR به مفهوم پاراتو کاراست، اگر و فقط اگر

۱-مقدار بهینه هدف یک بدست آید.($\theta_k^* = ۱$)

۲- در تمامی جواب های بهینه $(\mathbf{s}^-, \mathbf{s}^+) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ [۲۳، ۱۰]

شرط اول در تعریف ۱-۷ کارایی تکنیکی یا کارایی شعاعی نامیده می شود، $\theta^* < ۱$ اجازه می دهد که ورودی ها را بطور همزمان کاهش داد. مدل $(۱ - ۱)$ در واقع در دو مرحله حل می شود. در مرحله اول مینیمم θ را می یابیم و در مرحله دوم ماکزیمم مجموع متغیرهای کمکی را با در نظر گرفتن مقدار بهینه مرحله اول می یابیم.

در ارزیابی ماهیت خروجی، باید بسنجیم که به ازای چه مقدار افزایش خروجی، DMU به مرز کارایی می رسد. در واقع باید بررسی نمود به ازای چه مقدار φ ، $(\mathbf{x_k}, \varphi\mathbf{y_k}) \in T_c$. و شرط عضویت در T_c آن است که

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \leqslant \mathbf{x_k},$$
$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \geqslant \varphi \mathbf{y_k},$$

بنابراین برای بدست آوردن میزان کارایی باید مدل زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} max \quad & \varphi_k \\ s.t: \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \leqslant \mathbf{x_k}, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \geqslant \varphi_k \mathbf{y_k}, \\ & \lambda_j \geqslant ۰, \qquad\qquad j = ۱, ..., n \end{aligned}$$

که این مدل، مدل CCR با ماهیت خروجی نامیده می شود.

مدل CCR با ماهیت خروجی بعد از استاندارد سازی عبارتست از:

$$\begin{aligned} max \quad & \varphi_k \\ s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ik}, \quad i = ۱, ..., m \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j - s_r^+ = \varphi_k y_{rk}, \quad r = ۱, ..., s, \\ & \lambda_j \geqslant ۰, \qquad\qquad j = ۱, ..., n, \\ & s_i^- \geqslant ۰, \qquad\qquad i = ۱, ..., m, \\ & s_r^+ \geqslant ۰, \qquad\qquad r = ۱, ..., s, \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

دوگان مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی به صورت زیر می باشد که به آن مدل مضربی CCR می گوییم.

$$\begin{array}{ll} max & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rk} \\ s.t. & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} \leqslant ۰, \quad j = ۱, ..., n \\ & \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ik} = ۱, \\ & u_r \geqslant ۰, \qquad\qquad r = ۱, ..., s, \\ & v_i \geqslant ۰, \qquad\qquad i = ۱, ..., m, \end{array} \tag{۱-۳}$$

تعریف ۱-۸. اگر در مدل مضربی $\sum_{r=۱}^{s} u_r^* y_{rk} = ۱$ ، آنگاه DMU_k کاراست.[۲۳، ۱۰]

قضیه ۱-۹. *اگر در مدل مضربی* $\sum_{r=۱}^{s} u_r^* y_{rk} = ۱$ *و* $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ *به گونه ای یافت شود که* $\mathbf{u}^* > \mathbf{0}, \mathbf{v}^* > \mathbf{0}$ ، *آنگاه* DMU_k *به مفهوم پاراتو کاراست.*

برهان. [۲۳، ۱۰]

۱-۶-۲ مدل BCC

مجموعه امکان تولید مدل BCC با اضافه کردن قید $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱$ به T_c به وجود می آید و به صورت زیر می باشد.

$$T_v = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,|\mathbf{x} \geqslant \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \;\;,\;\; \mathbf{y} \leqslant \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \;\;,\;\; \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱ \;,\; \lambda_j \geqslant ۰ \;\; j = ۱, ..., n \right\}$$

در مدل BCCمانند مدل CCR برای بدست آوردن اندازه کارایی باید بسنجیم که هر واحد روی مرز کارایی و یا مرز مجموعه امکان تولید قرار دارد یا خیر. اگر بر حسب ورودی کار کنیم باید بسنجیم که به ازای حداقل چه مقدار از θ، $(\theta \mathbf{x_k}, \mathbf{y_k})$ روی مرز T_v قرار دارد.

$$\begin{array}{ll} min & \theta_k \\ s.t: & (\theta \mathbf{x_k}, \mathbf{y_k}) \in T_v, \end{array}$$

اما شرط عضویت در T_v آن است که

$$\begin{array}{l} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \leqslant \; \theta_k \mathbf{x_k}, \\ \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \geqslant \mathbf{y_k}, \\ \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱ \,, \end{array}$$

پس در واقع مدل زیر را برای ارزیابی کارایی واحد حل می کنیم:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_k \\ s.t: \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{x_j} \leqslant \theta_k \mathbf{x_k}, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \mathbf{y_j} \geqslant \mathbf{y_k}, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱ \\ & \lambda_j \geqslant ۰ \qquad\qquad j = ۱, ..., n \end{aligned}$$

که به این مدل، مدل BCC با ماهیت ورودی گفته می شود.

مدل برنامه ریزی خطی BCC با ماهیت ورودی بعد از استانداردسازی عبارتست از:

$$\begin{aligned} min \quad & \theta_k \\ s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_k x_{ik}, \quad i = ۱, ..., m, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{ij} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = ۱, ..., s, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \\ & \lambda_j \geqslant ۰, \qquad\qquad j = ۱, ..., n, \\ & s_i^- \geqslant ۰, \qquad\qquad i = ۱, ..., m, \\ & s_r^+ \geqslant ۰, \qquad\qquad r = ۱, ..., s, \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

دوگان مدل (۱ − ۴) به صورت زیر می باشد که به آن مدل مضربی BCC گفته می شود.

$$\begin{aligned} max \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rk} + u_o \\ s.t. \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} + u_o \leqslant ۰, \quad j = ۱, ..., n \\ & \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ik} = ۱, \\ & u_r \geqslant ۰, \qquad\qquad r = ۱, ..., s, \\ & v_i \geqslant ۰, \qquad\qquad i = ۱, ..., m, \\ & u_o \text{ آزاد} \end{aligned} \tag{۵-۱}$$

تعریف ۱-۱۰. اگر در مدل BCC، $\theta_k^* = ۱$، آنگاه DMU_k کاراست. در غیر این صورت ناکارای BCC است. [۱۰، ۲۳]

تعریف ۱-۱۱. اگر در مدل BCC، $\theta_k^* = ۱$ و همچنین $(\mathbf{s}^-, \mathbf{s}^+) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$، آنگاه DMU_k به مفهوم پاراتو کاراست. [۱۰، ۲۳]

تعریف ۱-۱۲. اگر در مدل مضربی $\sum_{r=۱}^{s} u_r^* y_{rk} = ۱$ ، آنگاه DMU_k کاراست. [۲۳، ۱۰]

۱-۶-۳ مدل ابرکارایی AP

در سال ۱۹۹۳ اندرسون و پیترسون [۱۱] مدل ابرکارایی AP را برای رتبه بندی DMU های کارا معرفی کردند. روش آن ها بدین صورت بود که واحد تصمیم گیرنده DMU_k را از مجموعه امکان تولید حذف نمودند و مدل DEA باقیمانده را برای باقی مانده DMU ها اجرا نمودند،[۲]. مدل پیشنهادی برای آنها، جهت رتبه بندی چنین است:

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rk} + u_o \\
s.t. \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} + u_o \leqslant ۰, \quad j = ۱, ..., n, j \neq k \\
& \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ik} = ۱, \\
& u_r \geqslant ۰, \qquad\qquad r = ۱, ..., s, \\
& v_i \geqslant ۰, \qquad\qquad i = ۱, ..., m, \\
& u_o \text{ آزاد}
\end{aligned}
\tag{۱-۶}
$$

دوگان مدل (۱ − ۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
min \quad & \theta_k \\
s.t. \quad & \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_k x_{ik}, \quad i = ۱, ..., m, \\
& \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} \lambda_j y_{ij} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = ۱, ..., s, \\
& \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} \lambda_j = ۱, \\
& \lambda_j \geqslant ۰, \qquad\qquad j = ۱, ..., n, \\
& s_i^- \geqslant ۰, \qquad\qquad i = ۱, ..., m, \\
& s_r^+ \geqslant ۰, \qquad\qquad r = ۱, ..., s,
\end{aligned}
\tag{۱-۷}
$$

مدل های (۱ − ۶) و (۱ − ۷) مدل های مضربی و پوششی $AP - BCC$ در ماهیت ورودی می باشند.

در مدل ابرکارایی حذف واحدهای ناکارا تغییری در مرز کارایی ایجاد نمی کند و همان مرز قبلی باقی می ماند. بنابراین مدل به ازای حذف واحد ناکارا همواره شدنی است.

حذف واحد کارای غیر راسی و کارای ضعیف (در صورت عدم وجود ورودی یا خروجی صفر) نیز تغییری در شکل مرز ایجاد نمی کند زیرا این واحدها جزء رئوس مرز کارایی نیستند و مدل همواره شدنی

[۱۱] Anderson and Petersen

است. تنها حذف واحدهای کارای راسی شکل مرز را تغییر می دهد زیرا این واحدها رئوس مرز کارایی هستند و با حذف آنها شکل مرز تغییر می کند.

قضیه ۱-۱۳. *مدل ابرکارایی AP همواره شدنی است اگر و فقط اگر هیچ کدام از داده ها مولفه ی صفر نداشته باشد.*

برهان. [۲۳، ۱۰]

ب) مدل های غیر شعاعی

۱-۶-۴ مدل جمعی

محققان مدت طولانی است که به مدل جمعی به عنوان جایگزینی برای مدل های شعاعی، توجه دارند. زیرا مدل جمعی در ماهیت ورودی یا ماهیت خروجی مطرح نمی شود که یک اندازه کارایی تکنیکی غیر شعاعی تولید کند، یعنی این مدل اندازه های مازاد ورودی و کمبود خروجی را جهت تولید یک مقدار کارایی تکنیکی غیر شعاعی جمع می کند،[۵]. کارایی k -امین DMU به صورت زیر اندازه گیری می شود:

$$\begin{aligned} max \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ik}, \quad i = 1, ..., m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, ..., s, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \qquad\qquad j = 1, ..., n, \\ & s_i^- \geqslant 0, \qquad\qquad i = 1, ..., m, \\ & s_r^+ \geqslant 0, \qquad\qquad r = 1, ..., s, \end{aligned} \tag{۸-۱}$$

مدل جمعی، میزان کارایی تکنیکی را با استفاده از متغیرهای کمکی تعیین می کند. بدین صورت که:

۱) کارایی کامل: مقدار بهینه تابع هدف صفر باشد یعنی به ازای هر i و r داریم $\left(s_i^{-*}, s_r^{+*}\right) = (0, 0)$

۲) ناکارایی: حداقل یک متغیر کمکی غیر صفر وجود داشته باشد.

مدل جمعی (۱-۸)، مقدار کارایی تکنیکی را نمی دهد مطابق نظر کوپر و همکاران [۹] اندازه کارایی تکنیکی در مدل جمعی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$AM^* = 1 - \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{ik}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{rk}}\right) \qquad (۹-۱)$$

در عبارت (۱ − ۹) همه x_{ik}, y_{rk} مثبت فرض می شوند. متغیرهای کمکی $(\mathrm{s}^{-^*}, \mathrm{s}^{+^*})$ از جواب بهین (۱ − ۸) بدست آمده اند. قسمت دوم عبارت (۱ − ۹) میزان ناکارایی کل را نشان می دهد که مقدار کارایی تکنیکی از کم کردن ناکارایی کل از یک بدست می آید.