
بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی

گرایش آنالیز

نابرابری های تغییراتی برداری و بهینه سازی

استاد راهنما :

دکتر محبوبه رضایی

استاد مشاور :

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر :

سیده فرزانه سهرابی

آبان ماه ۱۳۸۹

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم فرزانه سهرابی سیده

تحت عنوان:

نابرابری های تغییراتی برداری و بهینه سازی

در تاریخ ۸۹/۸/۵ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محبوبه رضایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر طوبی جبروتیان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه

سپاسگزاری

از گزند داس دروگر وقت هیچ رونده را زنهار نیست

مگر ترانه من که در روزگار نامده بر جای می ماند

تا به ناخواست دست جفا پیشه ی دهر ، شکوه تو را بستاید.

ابتدا بر خود لازم می بینم از زحمات و راهنمایی های بی دریغ سرکار خانم

دکتر رضایی تشکر نمایم ،

و از راهنمایی های عالمانه ی جناب آقای دکتر زعفرانی سپاسگزارم.

در پایان از خانواده خویش ؛ پدر و مادر و بویژه برادر عزیزم سید آرش سهرابی که

خود را مدیون ایشان می دانم تشکر می کنم.

تقدیم به :

به پدر و مادر عزیزم .

چکیده

آنالیز محدب یکی از ابزارهایی است که کاربرد فراوانی در ریاضیات دارد. مجموعه ها و توابع محدب نقش مهمی در آنالیز محدب بازی می کنند . به عنوان مثال در توابع محدب هر مینیمم موضعی یک مینیمم سراسری است . در این پایان نامه برخی روابط بین نابرابری های تغییراتی برداری و مسائل بهینه سازی برداری مشتق ناپذیر با فرض توابع محدب پایای غیر هموار اثبات شده است. هم چنین مجموعه ی جواب های ناتهی و فشرده برای نابرابری های تغییراتی برداری مینتی و استمپاخیا که بوسیله ی توابع دو متغیره تعمیم یافته ای که روی مجموعه های غیر محدب تعریف شده اند را توسط مفاهیم شبه یکنوایی و زیر فردی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته اند . به علاوه هم ارزی روابط بین مجموعه جواب های مینتی ، استمپاخیا و جواب های مؤثر ضعیف مسائل بهینه سازی با فرض شبه محدبی و محدب پایایی اثبات شده است . توابع دو متغیره شبه آفاین را مورد توجّه قرار داده و در شرایط لازم کافی برای این گونه نگاشت ها بدست آمده است . هم چنین تابع شبه خطی و برخی ویژگی های آن را مطرح کرده و با استفاده از این ویژگی ها مجموعه ی جواب های برنامه های شبه خطی مشخص شده و ویژگی هایی برای مجموعه جواب های مسائل نابرابری تغییراتی شامل توابع دو متغیره شبه آفاین بیان شده است . در پایان رده ای از مجموعه های محدب را تعمیم داده و معادل بودن توابع پایا و توابع شبه محدب اثبات شده است . شرایط لازم و کافی برای پایایی توابع موضعاً لیپشیتز را با استفاده از زیر دیفرانسیل کلارک بدست آورده و منظم بودن توابع پایای موضعاً لیپشیتز مورد بحث قرار گرفته شده است . به علاوه تحت شرایط مناسب مانند شرط بهینگی لازم از نوع اسلتر و شرط بهینگی کافی برای مسئله ی غیر هموار شامل توابع پایا بدست آمده است.

واژه های کلیدی : مجموعه ی محدب پایا ، نابرابری تغییراتی برداری ، مسئله ی بهینه سازی برداری ، توابع شبه یکنوا ، توابع شبه خطی ، توابع دو متغیره ، توابع پایا ، زیر دیفرانسیل ، توابع زیر فرد.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست مطالب

پیشگفتار

بهینه سازی علمی است برای یافتن بهترین پاسخ برای مسئله‌ای که به صورت ریاضی تعریف شده است. در این علم تابع هدف و قیدهای موجود مسئله مطالعه می‌گردد و روش‌های مدون برای حل آنها تعیین می‌شود. امروزه بهینه سازی کاربرد وسیعی در رشته‌های مختلف مهندسی پیدا کرده است. روشهای بهینه سازی که برنامه ریزی ریاضی نیز نامیده می‌شوند، تنوع بسیار زیادی دارند. در این پژوهش تعمیم‌های مهم توابع محدب مانند توابع محدب پایا که توسط هن سون [۱] [۱۱] ارائه شده است و مفهوم نابرابری‌های تغییراتی برداری توسط ژیانسی [۲] [۹] مطرح گردیده، بررسی می‌کنیم. نکته‌ی قابل توجه ارتباط بین نابرابری‌های تغییراتی با مسائل بهینه سازی است.

در این پایان نامه که شامل پنج فصل است هدف یافتن هم ارزی‌های بین مجموعه جواب‌های نابرابری‌های تغییراتی استمپاخیا و مینتی و... و مجموعه جواب مسائل بهینه سازی است. همچنین با طرح تعمیم‌های مختلفی از مفهوم تحدب مانند $\alpha-$ محدب پایایی و $E-$ محدب و $B-$ پایایی سعی در برقراری ارتباط با مسائل بهینه سازی و گاهی نیز با مسائل نابرابری تغییراتی را در حالات مختلف داریم.

در فصل اول با استفاده [۱۸]، [۴] و [۲۱] به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایا و نتایج کلیدی می‌پردازیم.

در فصل دوم با استفاده از [۱۳]، [۱۴] به بررسی مفهوم توابع آفاین نما و توابع غیر هموار خطی نما می‌پردازیم. همچنین تحت فرض خطی نمایی و آفاین نمایی، مجموعه‌ی‌جواب‌های مسئله بهینه سازی را مشخص می‌کنیم. با استفاده از [۱۸] مجموعه جواب‌های نا تهی و فشرده برای نا برابری‌های تغییراتی برداری استمپاخیا و مینتی با طرح کردن مفاهیمی مانند یکنوا نمایی و زیر فردی تعمیم یافته مورد تحقیق

---

[۱] Hanson

[۲] Giannessi

قرار می‌دهم. بعلاوه هم ارزی‌های بین مجموعه جواب‌های استمپاخیا، مینتی و جواب‌های مؤثر ضعیف با استفاده از مشتق کلارک مورد توجه قرار می‌دهیم.

در فصل سوم با استفاده از [۸] و [۱۷] کلاس جدیدی از توابع محدب پایا و $\alpha-$ محدب پایا را بیان می‌کنیم و با طرح نابرابری‌های تغییراتی $(VVLI)$ و $(WVVLI)$ به اثبات روابط بین نابرابری تغییراتی و مسائل بهینه سازی غیر هموار تحت فرض توابع محدب پایا ، $\alpha-$ محدب پایا می‌پردازیم.

در فصل چهارم [۱۰]، [۲۳] و [۷] به بیان یک تعمیم تحدب برای مجموعه‌ها و توابع به عنوان $E-$ محدب، $E-$ محدب پایایی و ... ضمن بیان برخی خواص این مجموعه‌ها و توابع، روابط آنها را با مسائل بهینه سازی ارائه می‌کنیم.

در فصل پنجم به بررسی توابع $B-$ پایا و $E-$ $B-$ پایا و ارتباط آنها با توابع شبه محدب پرداخته و شرایط لازم برای $B-$ پایایی توابع موضعاً لیپشیتز را می‌یابیم و توابع منظم، موضعاً لیپشیتز و $B-$ پایا و برنامه ریزی‌های با توابع $B-$ پایا را مورد بحث قرار می‌دهیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با استفاده از مراجع [۱۸]، [۴] و [۲۱] مفاهیم اولیه که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته است را بیان می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم Y و X فضای برداری توپولوژیکی باشند.

تعریف ۱.۱ . $A \subseteq X$ را یک مجموعه‌ی محدب [۱] می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in A$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in A.$$

[۱] Convex

تعریف ۲.۱ . $K \subseteq X$ را یک مجموعه‌ی محدب پایا [۲] نسبت به $\eta : X \times X \to X$ گوییم اگر برای هر $x, y \in K$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$x + \lambda\eta(x, y) \in K.$$

تعریف ۳.۱ . فرض کنیم $A \subseteq X$. در این صورت کوچک ترین مجموعه‌ی محدب شامل A را غلاف محدب A [۳] گوییم و با $conv A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱ . تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

در صورتی که $-f$ محدب باشد f را مقعر گوییم.

تعریف ۵.۱ . تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را شبه محدب [۴] گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

اگر نابرابری بالا به صورت اکید برای هر $x, y \in X$، $x \neq y$ و هر $t \in (0, 1)$ بر قرار باشد در این صورت تابع f را اکیداً شبه محدب می‌نامیم.

[۲] Invex

[۳] Covex hull

[۴] Quasi convex

تعریف ۶.۱ . تابع $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ در نقطه‌ی $x_\circ \in X$ نیم پیوسته‌ی پایینی [۵] (نیم پیوسته بالایی [۶]) گوییم اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ همسایگی U از $x_\circ$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که برای هر $x \in U$ داشته باشیم $f(x) \geq f(x_\circ) - \varepsilon$ ($f(x) \leq f(x_\circ) + \varepsilon$).

تعریف ۷.۱ . $C \subseteq X$ را مخروط [۷] می‌نامیم اگر برای هر $\lambda \geq \circ$ داشته باشیم:

$$\lambda C \subseteq C$$

هر گاه $C \cap (-C) = \{\circ\}$ در این صورت C را مخروط نوک دار گوییم.

تعریف ۸.۱ . فرض کنید $C \subseteq X$ مخروط محدب با $int\ C \neq \emptyset$. در این صورت رابطه‌ی ترتیبی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x \geq_C y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in C \quad , \quad x >_C y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in int\ C$$
$$x \ngeq_C y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \notin C \quad , \quad x \not>_C y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \notin int\ C.$$

تعریف ۹.۱ . تابع $g : X \to \mathbb{R}$ را همگن مثبت [۸] می‌نامیم هر گاه

$$g(tx) = tg(x), \quad \forall t \geq \circ.$$

[۵] Lower semi-continuous
[۶] Upper semi-continuous
[۷] Cone
[۸] Positively homogeneous

تعریف ۱۰.۱ . برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ رابطه‌ی ترتیبی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ x = y &\Leftrightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ x < y &\Leftrightarrow x_i < y_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

تعریف ۱۱.۱ . نگاشت $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را خود توان [۹] گوییم هر گاه

$$FoF = F.$$

تعریف ۱۲.۱ . تابع $f : X \to Y$ در نقطه‌ی $x \in X$ و در جهت $v \in X$ دارای مشتق جهت دار[۱۰] است اگر $w \in Y$ بگونه‌ای وجود داشته باشد که

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x) - tw}{t} = 0_Y$$

در این صورت $w = f'(x, v)$ قرار می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱ . تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را در نزدیکی $x \in X$ لیپشیتز[۱۱] می‌نامیم هر گاه $K > 0$ و یک همسایگی از x مانند U موجود باشد که برای هر $y, z \in U$ داشته باشیم:

$$|f(y) - f(z)| \leq K \|y - z\|$$

در صورتی که f در نزدیکی هر نقطه‌ی X لیپشیتز باشد تابع f را موضعاً لیپشیتز گوییم.

[۹] Indepotent

[۱۰] Directionally differentiable

[۱۱] Lipchitz

تعریف ۱۴.۱ . مشتق دینی پایینی و بالایی تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Df^+(x;v) = \limsup_{t \to \circ^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$Df^-(x;v) = \liminf_{t \to \circ^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنید تابع $f : X \to \mathbb{R}$ موضعاً لیپشیتز باشد. مشتق جهت دار تعمیم یافته کلارک [۱۲] تابع f در نقطه‌ی x و درجهت بردار v که با $f^\circ(x;v)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$f^\circ(x;v) = \lim_{t \downarrow \circ} \sup_{y \to x} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}.$$

منظور از زیر دیفرانسیل تابع f در نقطه‌ی x عبارت است از

$$\partial^c f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ f^\circ(x;v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\}.$$

قضیه ۱۶.۱ . فرض کنید تابع $f : X \to \mathbb{R}$ در نزدیکی $x \in X$ لیپشیتز از مرتبه K باشد در این صورت:

(الف) تابع $f^\circ(x;v)$ نسبت به متغیر دوم متناهی، همگن مثبت و شرط زیر بر قرار است:

$$|f^\circ(x;v)| \leq K\|v\|.$$

(ب) برای هر $x, v \in X$ داریم:

$$f^\circ(x;-v) = (-f)^\circ(x;v).$$

[۱۲] Clark's generaliezed dirrectional derivative

اثبات . به مرجع [۴] رجوع کنید.

گزاره ۱۷.۱ . فرض کنید تابع $f : X \to \mathbb{R}$ موضعاً لیپشیتز باشد. دراین صورت برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\partial^c(\lambda f) = \lambda \partial^c f(x).$$

اثبات . به مرجع [۴] رجوع کنید.

گزاره ۱۸.۱ . اگر توابع $f, g : X \to \mathbb{R}$ در نزدیکی $x \in X$ لیپشیتز باشند. در این صورت

$$\partial^c(f+g)(x) \subseteq \partial^c f(x) + \partial^c g(x).$$

اثبات . به مرجع [۴] رجوع کنید.

تعریف ۱۹.۱ . تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را در نقطه‌ی $x \in X$ منظم[۱۳] نامیم هر گاه

$$f^\circ(x; v) = f'(x; v), \quad \forall v \in X.$$

تعریف ۲۰.۱ . فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ و $K \subseteq X$ باشد. مسئله‌ی بهینه سازی برداری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min_{x \in K} f(x).$$

$\overline{x} \in K$ جواب مؤثر[۱۴] برای مسئله‌ی بهینه سازی فوق است اگر برای هر $y \in K$ داشته باشیم:

$$f(y) \nleq f(\overline{x})$$

[۱۳] regular

[۱۴] Efficient solution

و $\overline{x} \in K$ جواب مؤثر ضعیف [۱۵] برای مسئله‌ی بهینه سازی فوق است اگر برای هر $y \in K$ داشته باشیم:

$$f(y) \nless f(\overline{x}).$$

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^n$ است. نگاشت چند مقداری $F : E \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ را نگاشت KKM[۱۶] گوییم اگر برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ از E داشته باشیم:

$$conv\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

لم ۲۲.۱ .(**لم** KKM) فرض کنید برای هر $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی $F(x)$ بسته در $\mathbb{R}^n$ است. بعلاوه حداقل برای یک $x \in E$ مجموعه‌ی $F(x)$ کراندار و F نگاشت KKM باشد. در این صورت

$$\bigcap_{x \in E} F(x) \neq \emptyset.$$

اثبات . به مرجع [۱۸] رجوع کنید.■

تعریف ۲۳.۱ . فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^m$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد. در این صورت تابع چند مقداری $F : E \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ را بسته [۱۷] می‌نامیم اگر نمودار F که به صورت زیر تعریف می‌شود مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ باشد.

$$grap\ F = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}^n | y \in F(x)\}$$

[۱۵] Weakly efficient solution

[۱۶] KKM map

[۱۷] close

لم ۲۴.۱ . فرض کنید $C \subseteq X$ مخروط محدب و بسته‌ای با $int\ C \neq \emptyset$ باشد. در این صورت برای هر $x, y, z \in X$ خواهیم داشت:

(الف) اگر $x - y \in int\ C$ و $x \notin int\ C$ آنگاه $y \notin int\ C$.

(ب) اگر $x + y \in C$ و $x + z \notin int\ C$ آنگاه $z - y \notin int\ C$.

(ج) اگر $x + z - y \notin int\ C$ و $-y \in C$ آنگاه $x + z \notin int\ C$.

(د) اگر $x + y \notin int\ C$ و $y - z \in C$ آنگاه $x + z \notin int\ C$.

اثبات . (الف) فرض کنید $y \in int\ C$ و $x - y \in int\ C$ باشد. در این صورت

$$x - y + y \in int\ C + int\ C \subseteq int\ C$$

پس $x \in int\ C$ امّا این تناقض است. بنابراین $y \notin int\ C$ است.

(ب) فرض کنید $z - y \in int\ C$ و $x + y \in C$ باشد. در این صورت

$$z - y + x + y \in int\ C + C \subseteq int\ C$$

پس $z + x \in int\ C$ امّا این تناقض است. بنابراین $z - y \notin int\ C$ است.

(ج) فرض کنید $x + z \in int\ C$ و $-y \in C$ باشد. در این صورت

$$x + z - y \in int\ C + C \subseteq int\ C$$

در نتیجه $x + z - y \in int\ C$. امّا این تناقض است.

بطور مشابه قسمت (د) نیز ثابت می‌شود. ■

قضیه ۲۵.۱ . فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای غیرتهی، محدب و تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ اکیداً شبه محدب