بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

ارتباط بین عملگرهای ترکیبی و عملگرهای توپلیتز روی فضای هاردی

استاد راهنما:

دکتر صدیقه جاهدی

استاد مشاور:

دکتر غلام علی میرزا کریمی اصفهانی

نگارش:

رقیه خلیفه

مهر۸۶

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه/ رساله

پایان نامه/ رساله تحت عنوان **ارتباط بین عملگرهای ترکیبی و عملگرهای توپلیتز روی فضاهای هاردی** که توسط خانم **رقیه خلیفه** در مرکز **شیراز** تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع: ۲۵/۰۷/۸٦ نمره: ۱۸/۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیات داوران:

نام ونام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر صدیقه جاهدی	استاد راهنما	استادیار	
۲- دکتر غلام علی میرزاکریمی اصفهانی	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر بهمن یوسفی	استاد داور	استاد	
۴- دکتر مهناز پروانه نژاد شیرازی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به:

خانواده‌ام

سپاسگزاری

با سپاس فراوان از استاد گرامی سرکار خانم دکتر صدیقه جاهدی که ورای درس و تحصیل، دلسوزانه مرا در انجام این پایان‌نامه راهنمایی و یاری نموده‌اند.

از جناب آقای دکتر غلام علی میرزا کریمی اصفهانی به جهت مشاوره در این پایان‌نامه قدردانی می‌نمایم.

در این مجال کوتاه بر خود لازم می‌دانم حمایت‌ها و تشویق‌های بی‌دریغ خانواده‌ام که در تمام دوره زندگی بر من ارزانی داشته‌اند را ارج نهاده و سپاسگزارم. اگر چه می‌دانم که در قیاس نمی‌گنجد.

چکیده

باریا و هالموس ضمن معرفی عملگرهای تخمینی توپلیتز و عملگرهای هنکل به معرفی جبرهای مختلف پرداختند. این بحث مقدمه‌ای برای بیان انواع حالت‌های تخمینی توپلیتزی گردید. فینتوچ خاصیتی غیر از تخمین ضعیف یا قوی را بیان کرد و آن خاصیت تخمینی توپلیتزی یکنواخت بود. بنابراین سه نوع مختلف از عملگرهای تخمینی وجود دارند که عبارتند از ضعیف، قوی و یکنواخت.

فرض کنید S عملگر پیشرو و T عملگری روی فضای هاردی H^2 باشد. اگر دنباله عملگرهای $\{S^{*n}TS^n\}$ به طور قوی همگرا باشند آنگاه T را یک عملگر تخمینی توپلیتز می‌گویند. در این پایان‌نامه عملگرهای ترکیبی روی H^2 در هر یک از حالات تخمینی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند.

در فصل اول مقدمات و آنچه که در فصول بعدی مورد نیاز می‌باشند آورده شده است. فصل دوم به معرفی عملگر تخمینی توپلیتز و جبرهای توپلیتز و هنکل همراه با مثال‌های متنوع می‌پردازد. در فصل سوم نشان می‌دهیم که یک عملگر ترکیبی در صورتی به طور یکنواخت تخمینی توپلیتز است که فشرده یا همانی باشد. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که همه عملگرهای ترکیبی به جز آنهایی که به وسیله چرخش‌ها بیان می‌شوند ممکن است به طور ضعیف تخمینی توپلیتز باشند. از طرفی الحاق عملگرهای ترکیبی را مشخص نموده و نشان می‌دهیم که C_φ^* به طور قوی تخمینی توپلیتز است هرگاه φ مبدأ را ثابت نگه دارد.

فهرست

عنوان | صفحه

فصل ۱

مقدمات

۱ مقدمات

۱—۱ فضای هاردی

برای $1 \leq p < \infty$، فضای هاردی H^p از تمام توابع تحلیلی f روی گوی باز یکه $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$، تشکیل شده است که $\|f\|_p < \infty$ و $\|f\|_p$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup_{r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{r \longrightarrow 1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

فضای H^∞ نیز شامل توابع تحلیلی کراندار f روی گوی باز یکه است و نرم f به صورت زیر می‌باشد:

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} |f(z)|$$

بنابراین:

$$H^\infty = \{f \mid f \text{ is analytic}, \|f\|_\infty < \infty\}$$

به ویژه حالت $p = 2$ یعنی فضای هاردی H^2 دارای اهمیت است. فضای هاردی H^2 از تمام توابع تحلیلی f روی گوی باز یکه تشکیل شده است به طوری که $\|f\|_2 < \infty$.

چون برای هر z در گوی یکه برای تمام تابع تحلیلی f داریم: $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ و a_n ضریب فوریه nام تابع f می‌باشد، بنابراین $\|f\|_2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 = \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2$.

برای هر دو تابع f و g در $H^{۲}$ ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}d\mu = \sum_{n\geq \circ} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

لازم به یادآوری است که ضریب فوریه nام تابع f که با $\hat{f}(n)$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$\hat{f}(n) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} f(t)e^{-int}dt$$

می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده گزاره‌های زیر نیز قابل توجه هستند:

گزاره ۱−۱.۱: $H^{\infty} \subset H^{۲}$. به طور عمومی‌تر، می‌توان گفت اگر $b \in H^{\infty}$ و $f \in H^{۲}$، آنگاه $bf \in H^{۲}$.

گزاره ۱−۲.۱: (قضیه لیتلوود[۱]) اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی بر U باشد، آنگاه برای هر $f \in H^{۲}$، $f \circ \varphi \in H^{۲}$.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] رجوع کنید.

حال به تعریف توابع تحلیلی و توابع داخلی می‌پردازیم.

تعریف ۱−۳.۱: تابع f را در نقطه z تحلیلی می‌گویند، هرگاه در هر همسایگی از نقطه z، مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۱−۴.۱: تابع تحلیلی f در U را یک تابع داخلی می‌گویند، اگر تقریباً همه‌جا روی دایره یکه $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$، $|f(z)| = ۱$ برقرار باشد.

یکی از مهمترین قضایایی که در فصل سوم از آن استفاده می‌شود، قضیه زیر است:

قضیه ۱−۵.۱: (تابعیت لیتلوود[۲]) اگر $f(z)$ و $F(z)$ بر گوی یکه U تحلیلی باشند و $f \prec F$، آنگاه $M_p(r,f) \leq M_p(r,F)$ که $\circ < p \leq \infty$.

---

[۱] Littlewood's theorem

[۲] Littlewood's subrodination theorem

اثبات: برای دیدن برهان به [۷] رجوع کنید.

باید توجه داشت که $\circ < p < \infty$ و

$$M_p(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\circ}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$M_\infty(r,f) = \max_{\circ \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|$$

و منظور از $f \prec F$ این است که تابعی تحلیلی مانند $\omega(z)$ روی U وجود داشته باشد که $|\omega(z)| \leq |z|$ و در رابطه $f(z) = F(\omega(z))$ صدق کند.

البته از قضیه فوق دو نتیجه مهم زیر نیز بدست می‌آیند:

نتیجه ۱—۶.۱: فرض کنید $f(z) = \sum_{n\geq\circ} a_n z^n$ و $F(z) = \sum_{n\geq\circ} A_n z^n$، با در نظر گرفتن شرایط قضیه خواهیم داشت:

$$\sum_{k=\circ}^{n} |a_k|^2 \leq \sum_{k=\circ}^{n} |A_k|^2, \quad n \geq 1$$

نتیجه ۱—۷.۱: اگر $f \in H^2$ و $f = f \circ \omega$ که در آن ω یک تابع داخلی است و $\omega(\circ) = \circ$، آنگاه

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty} |A_k|^2.$$

نتایج (۱—۶.۱) و (۱—۷.۱) از [۱۵] آورده شده‌اند.

تعریف ۱—۸.۱: اگر A یک جبر باناخ باشد، یک پیچیدگی[۳] یک نگاشت از A به A است که به هر مقدار $a \in A$ مقدار a^* را نسبت می‌دهد و برای هر a و b در A و $\alpha \in \mathbb{C}$، خواص زیر برقرار است:

۱) $(a^*)^* = a$

۲) $(ab)^* = b^* a^*$

۳) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha} a^* + b^*$

---

[۳] involution

توجه کنید که اگر A دارای عضو همانی همراه با یک پیچیدگی باشد، آنگاه $a = (1^*)^* = (a^*.1)^* = (1^*.a)^{**} = 1^*.a$ چون عضو همانی یکتاست، پس $1 = 1^*$ همچنین برای $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha^* = \bar{\alpha}$.

تعریف ۱—۱.۹: یک C^*_جبر، یک جبر باناخ A همراه با یک پیچیدگی است به طوری که برای هر $a \in A$،

$$\|aa^*\| = \|a\|^2.$$

۱—۲ عملگر ترکیبی فشرده

هر تابع تحلیلی φ که گوی باز یکه U را به خودش می‌نگارد، عملگر ترکیبی C_φ را روی فضای $Hol(U)$ متشکل از تمام توابع تحلیلی f روی U ایجاد می‌کند که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$C_\varphi f = f \circ \varphi$$

باید توجه داشت که خواص عملگر C_φ، بر اساس شرایط φ تعیین می‌گردد.

تعریف ۱—۲.۱: فرض کنید $\varphi \in L^\infty$، عملگر ضربی $M_\varphi : L^2 \longrightarrow L^2$ به صورت $M_\varphi f = \varphi f$ تعریف می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که اگر برای هر $f \in H$، $\|Tf\| \leq \|f\|$ یعنی هرگاه $\|T\| \leq 1$، آنگاه T یک انقباض روی H نامیده می‌شود. بنابراین M_φ یک انقباض روی H^2 است.

قضیه ۱—۲.۲: (اصلی تابعیت لیتلوود[4]) اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی بر U باشد و $\varphi(0) = 0$، آنگاه برای هر $f \in H^2$، $C_\varphi f \in H^2$ و $\|C_\varphi f\| \leq \|f\|$.

[4] Littlewood's subrodination principle

اثبات: از عملگر پس رو β استفاده می‌کنیم. عملگر β روی $H^۲$ با ضابطه $\beta f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \hat{f}(n+۱)z^n$ در نظر بگیرید. به وضوح β یک انقباض روی $H^۲$ است و برای هر $f \in Hol(U)$ داریم:

$$f(z) = f(\circ) + z\beta f(z) \quad (z \in U)$$

$$\beta^n f(\circ) = \hat{f}(n) \quad (n = \circ, ۱, ۲, ۳, ...)$$

اکنون فرض کنید که f یک چندجمله‌ای تحلیلی باشد، بنابراین $f \circ \varphi$ روی U کراندار است و به وسیله جایگزینی $\varphi(z)$ با z خواهیم داشت:

$$f(\varphi(z)) = f(\circ) + \varphi(z)(\beta f)(\varphi(z)) \quad (z \in U)$$

بنابراین:

$$\|C_\varphi f\|^۲ = |f(\circ)|^۲ + \|M_\varphi C_\varphi \beta f\|^۲ \leq |f(\circ)|^۲ + \|C_\varphi \beta f\|^۲$$

درنتیجه:

$$\|C_\varphi \beta f\|^۲ \leq |\beta f(\circ)|^۲ + \|C_\varphi \beta^۲ f\|^۲$$

$$\|C_\varphi \beta^۲ f\|^۲ \leq |\beta^۲ f(\circ)|^۲ + \|C_\varphi \beta^۳ f\|^۲$$

$$\vdots$$

$$\|C_\varphi \beta^n f\|^۲ \leq |\beta^n f(\circ)|^۲ + \|C_\varphi \beta^{n+۱} f\|^۲$$

با در نظر گرفتن این مطالب برای هر عدد نامنفی n داریم:

$$\|C_\varphi f\|^۲ \leq \sum_{k=\circ}^{n} |(\beta^k f)(\circ)|^۲ + \|C_\varphi \beta^{n+۱} f\|^۲$$

با توجه به روابط بالا برای هر عدد نامنفی n، هرگاه f یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آنگاه $\beta^{n+۱} f = \circ$،

$$\|C_\varphi f\|^۲ \leq \sum_{k=\circ}^{n} \|(\beta^k f)(\circ)\|^۲ = \sum_{k=\circ}^{n} |\hat{f}(k)|^۲ = \|f\|_۲^۲.$$

بنابراین C_φ نیز یک انقباض می‌باشد. در نهایت فرض کنید $f \in H^۲$ چندجمله‌ای نباشد و f_n، nامین مجموع جزئی از سری $f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ باشد، بنابراین $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H^۲}} f$، پس $f_n \xrightarrow{u} f$ و $f_n \circ \varphi \xrightarrow{u} f \circ \varphi$.

واضح است که $\|f_n\| \leq \|f\|$ و درنتیجه برای هر $\circ < r < ۱$ داریم: $\|f_n \circ \varphi\| \leq \|f_n\|$. درنتیجه خواهیم داشت:

$$M_۲(f \circ \varphi, r) = \lim_{n \longrightarrow \infty} M_۲(f_n \circ \varphi, r) \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \|f_n \circ \varphi\| \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \|f_n\| \leq \|f\|$$

در حالتی که $r \longrightarrow ۱$ اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۱−۲.۳: (اولین تقریب رتبه[۵]) اگر T یک عملگر خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه T فشرده است اگر و فقط اگر یک دنباله $\{F_n\}$ از عملگرها با رتبه متناهی و کراندار وجود داشته باشد به طوری که:

$$\|T - F_n\| \longrightarrow \circ$$

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

یادآوری می‌کنیم که عملگر T روی فضای هیلبرت H را فشرده می‌گویند، هرگاه $\overline{T(ball H)}$ فشرده باشد. همچنین عملگر T روی H دارای رتبه متناهی است، اگر بعد برد T متناهی باشد.

قضیه ۱−۲.۴: (اولین قضیه فشردگی[۶]) اگر $\|\varphi\|_\infty < ۱$، آنگاه C_φ یک عملگر فشرده روی $H^۲$ است.

اثبات: برای هر عدد مثبت n، عملگر T_n را به ازای هر $f \in H^۲$ به صورت $T_n f = \sum_{k=\circ}^{n} \hat{f}(k) \varphi^k$ تعریف می‌کنیم. بنابراین T_n، $H^۲$ را به روی مولد خطی از n توان اول φ می‌نگارد. T_n یک عملگر کراندار روی $H^۲$ است، زیرا $\|T_n\| \leq \sqrt{n+۱}$. همچنین T_n دارای رتبه متناهی است. ادعا می‌کنیم

[۵] First Rank Approximation
[۶] First compactness theorem

زیرا: $\|(C_\varphi - T_n)f\| \longrightarrow ۰$

$$\begin{aligned}\|(C_\varphi - T_n)f\| &= \left\|\sum_{k=n+۱}^{\infty} \hat{f}(k)\varphi^k\right\| \\ &\le \sum_{k=n+۱}^{\infty} |\hat{f}(k)|\|\varphi^k\| \\ &\le \sum_{k=n+۱}^{\infty} |\hat{f}(k)|\|\varphi\|_\infty^k \\ &\le \left(\sum_{k=n+۱}^{\infty} |\hat{f}(k)|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\sum_{k=n+۱}^{\infty} \|\varphi\|_\infty^{۲k}\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\le \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+۱}}{\sqrt{۱-\|\varphi\|_\infty^۲}}\|f\|.\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\|C_\varphi - T_n\| \le \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+۱}}{\sqrt{۱-\|\varphi\|_\infty^۲}} \longrightarrow ۰$$

و چون C_φ حد دنباله‌ای از عملگرها با رتبه متناهی است، طبق قضیه قبل فشرده می‌باشد. □

قضیه ۱–۵.۲: (لیتلوود[۷]) اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی بر U باشد، آنگاه C_φ یک عملگر کراندار روی $H^۲$ است و $\|C_\varphi\| \le \sqrt{\frac{۱+|\varphi(۰)|}{۱-|\varphi(۰)|}}$. بنابراین اگر $\varphi(۰) = ۰$، آنگاه $\|C_\varphi\| \le ۱$.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۱–۶.۲: (همگرایی ضعیف[۸]) اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی بر U باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

الف) C_φ یک عملگر فشرده روی $H^۲$ است.

ب) هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله کراندار در $H^۲$ باشد که به طور یکنواخت روی زیرمجموعه فشرده‌ای از U همگرا به صفر است، آنگاه $\|C_\varphi f_n\| \longrightarrow ۰$.

اثبات: الف $\Longleftarrow$ ب) فرض کنید C_φ یک عملگر فشرده است، یعنی $C_\varphi(B)$ زیرمجموعه نسبتاً فشرده‌ای از $H^۲$ است. در اینجا منظور از B، گوی بسته یکه در $H^۲$ است. همچنین فرض کنید

[۷] Littlewood's theorem
[۸] Weak Convergence theorem

$\{f_n\}$ یک دنباله کراندار در H^2 باشد که در MB (گوی با شعاع M) قرار دارد و به طور یکنواخت روی زیرمجموعه فشرده‌ای از U به طور یکنواخت همگرا به صفر است. نشان خواهیم داد که $\|C_\varphi f_n\| \longrightarrow 0$. بدین‌منظور کافی است نشان دهیم که $\{C_\varphi f_n\}$ تحت نرم به صفر همگراست. می‌دانیم که $C_\varphi f_n \xrightarrow{u} 0$ و چون همگرایی در H^2، همگرایی نقطه به نقطه است، تنها حد ممکن صفر است. با استفاده از فشردگی C_φ، دنباله $\{C_\varphi f_n\}$ نسبتاً فشرده است، پس باید به نقطه‌ای همگرا باشد، درنتیجه $\|C_\varphi f_n\| \longrightarrow 0$.

ب$\Leftarrow$ الف) فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع در B باشد. چون توابعی که در B قرار دارند روی زیرمجموعه فشرده‌ای از U کراندارند، پس زیردنباله $\{f_{n_k}\} = \{g_k\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که روی زیرمجموعه فشرده‌ای از U به تابع تحلیلی g به طور یکنواخت همگراست. ادعا می‌کنیم که $g \in H^2$. برای هر $0 < r < 1$ داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_k(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sup_k \|g_k\|^2 \leq 1$$

این نامساوی نشان می‌دهد که $g \in H^2$ و درحقیقت $\|g\| \leq 1$. بنابراین دنباله $\{g_k - g\}$ روی H^2 کراندار است و $g_n - g \xrightarrow{u} 0$. درنتیجه $\|C_\varphi(g_k - g)\| \longrightarrow 0$. $\square$

گزاره ۱—۲.۷: فرض کنید $\varphi(z) = \lambda z + (1 - \lambda)$ که $0 < \lambda < 1$، بنابراین C_φ روی H^2 فشرده نیست.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۱—۲.۸: فرض کنید φ و ψ خودنگاشت‌های تحلیلی بر U باشند و $\|\varphi\| = 1$ و $\psi(U) \subset \varphi(U)$. اگر C_φ روی H^2 فشرده باشد، آنگاه C_ψ نیز فشرده است.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

گزاره ۱—۲.۹: اگر S و T عملگرهایی روی فضای هیلبرت H باشند به طوری که S کراندار و T فشرده است آنگاه هر دوی ST و TS فشرده هستند.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

الحاق عملگرها نیز موضوع مهمی است که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱ــ۲.۱۰: فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی H باشد. اگر برای هر h و k در H. عملگر B در رابطه $\langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$ صدق کند، آنگاه B را الحاق A می‌نامند و با نماد $B = A^*$ نمایش می‌دهند. لازم به ذکر است که B یکتاست. همچنین برای هر عملگر A، $\|A\| = \|A^*\|$ و $(CA)^* = \bar{C}A^*$ و $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$.

گزاره ۱ــ۲.۱۱: اگر A یک عملگر با رتبه متناهی باشد، آنگاه A^* نیز یک عملگر با رتبه متناهی است.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

لم ۱ــ۲.۱۲: اگر T یک عملگر فشرده باشد، آنگاه T^* نیز فشرده است.

اثبات: فرض کنید T یک عملگر فشرده باشد، بنابراین دنباله $\{F_n\}$ از عملگرهای کراندار با رتبه متناهی وجود دارد به طوری که $\|T - F_n\| \longrightarrow 0$ و از آنجا:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|T^* - F_n^*\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(T - F_n)^*\| = 0$$

چون هر F_n^* نیز دارای رتبه متناهی است، پس T^* نیز فشرده می‌باشد. □

تعریف ۱ــ۲.۱۳: یک عملگر T روی فضای هیلبرت H را یک عملگر هیلبرت ـ اشمیت می‌گویند اگر $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$ که در آن $\{e_n\}$ یک پایه متعامد یکه در H است.

لم ۱ــ۲.۱۴: هر عملگر هیلبرت ـ اشمیت فشرده است.

اثبات: برای دیدن برهان به [۲۱] مراجعه کنید.

۱—۳ عملگر توپلیتز و عملگر هنکل

قضیه ۱—۳.۱: اگر $\varphi \in L^\infty$، آنگاه M_φ یک عملگر کراندار است و $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. به عبارت دیگر:

$$\sup\{\|M_\varphi f\|_۲ : f \in H^۲, \|f\|_۲ = ۱\} = \|\varphi\|_\infty.$$

اثبات: برای دیدن برهان به [۱۷] مراجعه کنید.

نتیجه ۱—۳.۲: اگر $\varphi \in H^\infty$، آنگاه $M_\varphi : H^۲ \longrightarrow H^۲$ که به صورت $M_\varphi f = \varphi f$ تعریف می‌شود در رابطه $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ صدق می‌کند.

حال به تعریف عملگر توپلیتز می‌پردازیم.

تعریف ۱—۳.۳: فرض کنید $\varphi \in L^\infty$، عملگر توپلیتز T_φ روی $H^۲$ به صورت $T_\varphi f = P_{H^۲}(M_\varphi f)$ تعریف می‌شود. به وضوح چون $\|P\| = ۱$ و $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$، پس T_φ یک عملگر کراندار روی $H^۲$ است و در رابطه $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ صدق می‌کند. البته به زودی خواهیم دید که برای هر $\varphi \in L^\infty$، $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. ضمناً توجه کنید که φ را نماد T می‌گویند و P تصویر متعامد یکه از $L^۲$ به $H^۲$ است.
اگر $\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k$، خواهیم داشت:

$$T_\varphi e_n = P_{H^۲}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{int} e^{int}\right) = \sum_{p=۰}^{\infty} d_{p-n} e^{ipt}, \quad p = n+k$$

بدین ترتیب، ماتریس T_φ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} d_۰ & d_{-۱} & d_{-۲} & d_{-۳} & \cdots \\ d_۱ & d_۰ & d_{-۱} & d_{-۲} & \cdots \\ d_۲ & d_۱ & d_۰ & d_{-۱} & \cdots \\ d_۳ & d_۲ & d_۱ & d_۰ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

واضح است که اگر $\varphi = ۱$، آنگاه T_φ دارای ماتریس همانی است و همچنین $T_\varphi = ۰$ اگر و فقط اگر $\varphi = ۰$.

قضیه ۱—۴.۳: اگر $\varphi \in L^{\infty}$، آنگاه $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

اثبات: می‌دانیم که $\|T_\varphi\| = \|P_{H^۲} M_\varphi\| \le \|M_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$. بنابراین تنها لازم است نشان دهیم که $\|\varphi\|_\infty \le \|T_\varphi\|$. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. پس تابع $f \in H^۲$ با $\|f\|_۲ = ۱$ وجود دارد به طوری که $\|M_\varphi f\|_۲ > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$. بدون کاسته شدن از کلیت مساله می‌توان فرض کرد که f چندجمله‌ای $p(e^{it}) = \sum_{k=۰}^{N} C_k e^{ikt}$ است. چون همیشه دنباله‌ای از چندجمله‌ای P_n می‌توان یافت به طوری که:

$$\|P_n - f\|_۲ \longrightarrow ۰ \quad , \quad \|M_\varphi P_n - M_\varphi P\|_۲ \longrightarrow ۰$$

بدین ترتیب، ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $k > ۰$، هنگامی که $m \longrightarrow \infty$، آنگاه

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt} e^{int})\|_۲ \longrightarrow ۰$$

و زمانی که $m \longrightarrow \infty$ داریم:

$$\begin{aligned}\|(I - P_{H^۲})\sum d_r e^{irt} e^{int} e^{ikt}\|_۲ &= \left\| \sum_{r=-\infty}^{-۱-m-k} d_r e^{i(r+m+k)t} \right\|_۲ \\ &= \left(\sum_{r=-\infty}^{-۱-m-k} |d_r|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow ۰.\end{aligned}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt} p(e^{it})\|_۲ \le \sum_{k=۰}^{N} |c_k| \|(T_\varphi - M_\varphi) e^{imt} e^{ikt}\|_۲ \longrightarrow ۰$$

اکنون با استفاده از اینکه $\|e^{imt} p\|_۲ = \|p\|_۲$ و

$$\|T_\varphi(e^{imt} p)\|_۲ \longrightarrow \|M_\varphi(e^{imt} p)\|_۲ = \|e^{imt} \varphi p\|_۲ = \|M_\varphi p\|_۲.$$

با توجه به اینکه $\|M_\varphi p\|_۲ > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ و ε نیز دلخواه است، اثبات به اتمام می‌رسد. □

قضیه ۱—۵.۳: اگر T یک عملگر روی $H^۲$ باشد آنگاه T یک عملگر توپلیتز است اگر و فقط اگر $S^*TS = T$. منظور از S عملگر پیشرو است.

اثبات: برای دیدن برهان به [۱۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱–۶.۳: اگر φ و ψ در L^∞ باشند، آنگاه $T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi$ اگر و فقط اگر $\psi \in H^\infty$ یا $\bar{\varphi} \in H^\infty$.

اثبات: برای دیدن برهان به [۱۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱–۷.۳: تنها عملگر توپیلتز فشرده $T_0 = 0$ است.

اثبات: فرض کنید $\{e_n\}$ پایه متعامد یکه در H^2 و S نیز یک عملگر با رتبه متناهی در H^2 باشند. می‌دانیم که $\|Se_n\| \longrightarrow 0$. زیرا می‌توانیم بنویسیم $Se_n = \sum_{k=1}^{r}(e_n, x_k)y_k$ که $(x_k)_{k=1}^{r}$ و $(y_k)_{k=1}^{r}$ دنباله‌های متناهی در H^2 هستند. چون برای هر k، $(e_n, x_k) \longrightarrow 0$. بنابراین زمانی که $n \longrightarrow \infty$ داریم:

$$\|Se_n\| \leq \sum_{k=1}^{r}|(e_n, x_k)|\|y_k\| \longrightarrow 0$$

برای هر عملگر فشرده S روی H^2 نیز به طور مشابه به مطلب درست است. چون می‌توان S را به صورت حد دنباله‌ای از عملگرهای $\{S_k\}$ با رتبه متناهی در نظر گرفت و نیز مشاهده می‌کنیم که:

$$\|Se_n\| \leq \|S - S_k\| + \|S_k e_n\|.$$

اگر k به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود $\|S - S_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ و اگر n به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود $\|S_k e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ و بنابراین $\|Se_n\| \longrightarrow 0$. به هر حال به آسانی دیده می‌شود که برای یک عملگر توپلیتز T_φ تا زمانی که T_φ یک عملگر صفر نباشد عبارت $\|T_\varphi e_n\| \longrightarrow 0$ نادرست است. با استفاده از این مطلب به ازای $n \geq -m$ داریم: $\|T_\varphi e_n\| \geq |d_m|$، پس تا زمانی که درایه‌ها صفر نباشد، T_φ فشرده نخواهد بود. $\square$

عملگرهای توپلیتز در فصل سوم نقش مهمی را ایفا می‌کنند. با توجه به مطالبی که درباره عملگرهای توپلیتز گفته شد، بهتر خواهیم توانست مطالب فصل سوم را بررسی کنیم.