دانشگاه بیرجند

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر جابجایی)

عنوان :

تعمیم‌هایی از ایده‌ال های اول

استاد راهنما :

دکتر حسین فضائلی مقیمی

استاد مشاور :

دکتر محمد حسین حسینی

نگارش :

محمد حلیمی

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی و تشکر

به نام خداوندی که داشتن او جبران همه نداشته های من است. قبل از هر چیز خدای منان را سپاس می‌گویم که مرا راهنمایی و یاری نموده و همواره یار و یاور بندگانش می‌باشد.

مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی ابراز می‌دارم که با راهنمایی ها و هدایت گرانبهایشان مرا در تدوین این پایان نامه یاری فرمودند.

همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی و اساتید گرامی جناب آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی و جناب آقای دکتر حسین اقدامی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال سپاسگزاری را دارم.

در ضمن از خانوادهٔ عزیزم که همواره موجبات دلگرمی‌ام را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم.

در نهایت از دوستان عزیزم آقایان عیسی دار، محسن کرمانی نژاد، صادق زیبایی، میثم بازیاری و همدم دوره کارشناسی و کارشناسی ارشدم حسن آخوندی تشکر و قدردانی می کنم.

تقدیم به

مادرم

که مهرش بنیانی شد برای کسب دانش

پدرم

که مهرش در دلم گرامی و مقدس است

چکیـده

در سرتاسر این پایان نامه R یک حلقه جابجایی و یکدار است، مگر خلاف آن تصریح شود. تعمیم های گوناگونی از ایده‌ال های اول مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال یک ایده‌ال I از R به طور ضعیف اول (تقریباً اول) است اگر برای $a, b \in R$، $ab \in I - \{0\}$ $(ab \in I - I^2)$ ایجاب کند $a \in I$ یا $b \in I$. فرض کنید $\phi{:}\jmath(R) \longrightarrow \jmath(R) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد که $\jmath(R)$ مجموعه ایده‌ال های حلقه R است. ایده‌ال سره I از R را ϕ ـ اول نامیم هرگاه برای $a, b \in R$، $ab \in I - \phi(I)$ ایجاب کند $a \in I$ یا $b \in I$. بنابراین با در نظر گرفتن $\phi_\emptyset(J) = \emptyset$ $(\phi_0(J) = 0, \phi_2(J) = J^2)$ یک ایده‌ال $\phi_\emptyset$ ـ اول (ϕ_0 ـ اول، ϕ_2 ـ اول) یک ایده‌ال اول (ایده‌ال به طور ضعیف اول، ایده‌ال تقریباً اول) است. در این پایان نامه نشان می دهیم ایده‌ال های ϕ ـ اول به طور مشابه دارای ویژگی های زیادی از ایده‌ال های اول هستند.

کلمات کلیدی: ایده‌ال تقریباً اول، ایده‌ال اول، ایده‌ال ϕ ـ اول، ایده‌ال به طور ضعیف اول

فهرست مندرجات

مقدمه

ایده‌ال های اول نقش اساسی در جبر جابجایی بازی می کنند. ایده‌ال سره P از حلقه R اول است اگر برای هر $a,b \in R$، $ab \in P$ ایجاب کند $a \in P$ یا $b \in P$. راههای مختلفی برای تعمیم مفهوم یک ایده‌ال اول وجود دارد. می توان جایی را که a و b یا a یا b و یا ab در آن قرار دارند را تحدید کرده یا گسترش دهیم. در سال ۱۹۸۷ هدسترم[۱] و هیوستن[۲] با گسترش جایی که a و b در آن قرار دارند تعمیمی از ایده‌ال اول به نام ایده‌ال به طور قوی اول را مطرح کردند [۱۰]. پس از آن در سال ۲۰۰۲ بداوی[۳] و هیوستن نیز با گسترش جایی که a و b در آن قرار دارند ایده‌ال های توانا و به طور قوی اولیه را معرفی کردند[۷]. همچنین می توان جایی را که ab در آن قرار دارد تحدید کنیم. در سال ۱۹۷۸ گالوویچ[۴] عناصر به طور ضعیف اول را تعریف کرد[۹]. پس از آن در سال ۱۹۹۹ آگارگن[۵] به کمک عناصر به طور ضعیف اول به مطالعه تجزیه یکتا در حلقه های مقسوم علیه صفر پرداخت[۱]. در سال ۲۰۰۳ اندرسون[۶] و اسمیت[۷] با تحدید جایی که ab در آن قرار دارد مفهوم ایده‌ال به طور ضعیف اول را ارائه کردند[۳]. پس از آن در سال ۲۰۰۵ ابراهیمی[۸] ایده‌ال به طور ضعیف اولیه را مطرح کرد[۴]. در همین سال بت وادکار[۹] مفهوم یک ایده‌ال تقریباً اول را ارائه کرد[۸]. سرانجام در سال ۲۰۰۸ اندرسون با استفاده از یک تابع $\phi: \jmath(R) \longrightarrow \jmath(R) \cup \{\emptyset\}$ که $\jmath(R)$ مجموعه ایده‌ال های R است ایده‌ال ϕ

[۱] $Hedstrom$
[۲] $Houston$
[۳] $Badawi$
[۴] $Galovich$
[۵] $Agargun$
[۶] $Anderson$
[۷] $Smith$
[۸] $Ebrahimi$
[۹] $Bhatwadekar$

ـ اول را تعریف کرد[۲]. این پایان نامه برگرفته از مراجع [۲]، [۳]، [۴]، [۷]، [۸]، [۱۰]، می باشد. فصل اول این پایان نامه شامل سه بخش ایده‌ال به طور قوی اول، ایده‌ال توانا و ایده‌ال به طور قوی اولیه است. فصل دوم در دو بخش ایده‌ال به طور ضعیف اول و ایده‌ال به طور ضعیف اولیه تنظیم شده است. در فصل سوم که شامل دو بخش ایده‌ال تقریباً اول و ایده‌ال ϕ ـ اول است ویژگی های ایده‌ال های ϕ ـ اول و ارتباط آنها با مفاهیم فصلهای قبل مانند ایده‌ال اول، ایده‌ال به طور ضعیف اول و ایده‌ال تقریباً اول مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال در گزاره ۱۵.۲.۳ با استفاده از ایده‌ال های ϕ ـ اول یک اثبات جایگزین برای قضیه ۸.۱.۲ (اگر P یک ایده‌ال به طور ضعیف اول، غیراول از حلقه R باشد، آن‌گاه $P^2 = 0$) ا را ئه می شود.

فصل ۱

جایگزینی یک دامنه صحیح با میدان کسرهایش

در این فصل تعمیم هایی از ایده‌ال های اول را مورد بررسی قرار می دهیم که از گسترش جایی که a و b درآن قرار دارند بدست می آیند.

۱.۱ ایده‌ال های به طور قوی اول

زیرمجموعه ناتهی S از حلقه R را بسته ضربی نامیم، هرگاه $1 \in S$ و اگر $a, b \in S$، آن‌گاه $ab \in S$. اگر P یک ایده‌ال اول از R باشد، آن‌گاه $S = R - P$ بسته ضربی است.

فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد. در این صورت رابطه زیر تعریف شده بر$R \times S$ یک رابطه هم ارزی است.

$(a, s) \sim (b, t)$ اگر و فقط اگر $u \in S$ موجود باشد به طوری که $u(at - bs) = 0$.

فرض کنید $S^{-1}R$ مجموعه تمام کلاس های هم ارزی تحت رابطه ذکر شده بالا روی $R \times S$ باشد. در این صورت $S^{-1}R$ یک حلقه جابجایی و یکدار است که در آن جمع و ضرب به صورت زیر تعریف می شود.

$$(a/s)(b/t) = ab/st \qquad a/s + b/t = (at + bs)/st$$

این حلقه را حلقه کسرها یا حلقه خارج قسمتی R بر S می‌نامیم. اگر R ناصفر و بدون مقسوم علیه صفرباشد و $0 \notin S$، آن‌گاه $S^{-1}R$ یک دامنه است. به خصوص اگر R دامنه صحیح باشد و $S = R - \{0\}$، آن‌گاه $S^{-1}R$ یک میدان است که میدان کسرهای R نامیده می‌شود. همچنین اگر P یک ایده‌ال اول از R باشد، آن‌گاه $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان خارج قسمتی K باشد. در این صورت ایده‌ال اول P از R را به طور قوی اول می‌نامیم، اگر برای هر $a, b \in K$، $ab \in P$ ایجاب کند $a \in P$ یا $b \in P$.

مثال ۲.۱.۱ چون حلقه R را می‌توان به عنوان یک زیرحلقه از میدان کسرهایش در نظر گرفت، پس هرایده‌ال به طور قوی اول یک ایده‌ال اول است ولی عکس آن برقرارنیست. به عنوان مثال اگر $R = \mathbb{Z}$ و $P = ۲\mathbb{Z}$، آن‌گاه P اول است ولی به طور قوی اول نیست، زیرا $(۴/۳)(۳/۲) \in P$ ولی $۴/۳, ۳/۲ \notin P$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید R یک دامنه با میدان خارج قسمتی K باشد. در این صورت R را یک دامنه ارزیابی نامیم، اگر $۰ \neq x \in K$، آن‌گاه $x \in R$ یا $x^{-۱} \in R$ یا هر دو.

تعریف ۴.۱.۱ دامنه R را یک دامنه شبه ارزیابی (PVD) نامیم، اگر هرایده‌ال اول R به طور قوی اول باشد.

مثال ۵.۱.۱ هر میدان یک دامنه شبه ارزیابی هست ولی بنا به مثال ۲.۱.۱، $\mathbb{Z}$ یک دامنه شبه ارزیابی نیست.

قضیه ٦.۱.۱ هر دامنه ارزیابی یک دامنه شبه ارزیابی است.

اثبات. فرض کنید V یک دامنه ارزیابی با میدان خارج قسمتی K و P یک ایده‌ال اول از V باشد به طوری که برای هر $a, b \in K$، $ab \in P$. در این صورت اگر $a, b \in V$، آن‌گاه چون P اول است پس $a \in P$ یا $b \in P$. حال فرض کنید $a \notin V$. در این صورت چون V دامنه ارزیابی است، پس $a^{-۱} \in V$. بنابراین $(ab)a^{-۱} = b \in P$. در نتیجه P به طور قوی اول است. ■

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنید P یک ایده‌ال اول از دامنه R بامیدان خارج قسمتی K باشد. در این صورت P به طور قوی اول است اگر و فقط اگر برای هر $x \in K - R$، $x^{-۱}P \subseteq P$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید P به طور قوی اول و $x \in K - R$ و $p \in P$. در این صورت چون $p = (px^{-1})x \in P$ و $x \notin P$ و P به طور قوی اول است، پس $x^{-1}P \subseteq P$.

$\Rightarrow$) فرض کنید برای هر $x \in K - R$ ، $x^{-1}P \subseteq P$ و $ab \in P$. در این صورت اگر $a, b \in R$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. حال فرض کنید $a \notin R$. در این صورت بنا به فرض $a^{-1}P \subseteq P$. در نتیجه $b = a^{-1}(ab) \in a^{-1}P \subseteq P$. پس P به طور قوی اول است. ■

تعریف ۸.۱.۱ حلقه R با تنها ایده‌ال ماکسیمال m را یک حلقه موضعی نامیم و با (R, m) نمایش می‌دهیم.

مثال ۹.۱.۱ فرض کنید P یک ایده‌ال اول از R و $S = R - P$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. در این صورت $m = \{a/s \mid a \in P, s \in S\}$ تنها ایده‌ال ماکسیمال حلقه R_P است. بنابراین R_P یک حلقه موضعی است.

نتیجه ۱۰.۱.۱ در دامنه شبه ارزیابی R ایده‌ال های اول نسبت به رابطه شمول دارای ترتیب کلی هستند. به خصوص R موضعی است.

اثبات. به وضوح رابطه شمول در مجموعه ایده‌ال های اول R دارای ترتیب جزئی است. فرض کنید P و Q ایده‌ال های اولی از R باشند و $a \in P - Q$ و $b \in Q$. در این صورت اگر $a/b \in R$، آن‌گاه $a = (a/b)b \in Q$ که تناقض است. پس $a/b \notin R$. حال بنا به فرض و قضیه ۷.۱.۱، $(b/a)P = (a/b)^{-1}P \subseteq P$. درنتیجه $b = (b/a)a \in (b/a)P \subseteq P$. بنابراین $Q \subseteq P$. حال فرض کنید m_1 و m_2 ایده‌ال های ماکسیمالی از R باشند. در این صورت بنا به قسمت اول اثبات $m_1 \subseteq m_2$ یا $m_2 \subseteq m_1$ و در نتیجه $m_1 = m_2$. پس R موضعی است. ■

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید (R, m) یک دامنه موضعی باشد. در این صورت عبارات زیرمعادلند:

۱) R دامنه شبه ارزیابی است؛

۲) برای هر دو ایده‌ال I و J از R، $I \subseteq J$ یا $mJ \subseteq mI$؛

۳) برای هر دو ایده‌ال I و J از R، $I \subseteq J$ یا $mJ \subseteq I$؛

۴) m به طور قوی اول است.

اثبات. ۱⇐۲) فرض کنید $I \not\subseteq J$ و $a \in I - J$. در این صورت مشابه اثبات نتیجه ۱۰.۱.۱، $a/b \notin R$. حال بنا به قضیه ۷.۱.۱، $(b/a)m = (a/b)^{-1}m \subseteq m$، پس $mb \subseteq ma \subseteq mI$. در نتیجه $mJ \subseteq mI$.

۲⇐۳) واضح است.

۳⇐۴) فرض کنید $a/b \notin R$، به طوری که $a, b \in R$. در این صورت بنابه قضیه ۷.۱.۱، کافیست نشان دهیم $(b/a)m \subseteq m$. اگر $(a) \subseteq (b)$، آن‌گاه عنصر $r \in R$ وجود دارد به طوری که $a = br$. بنابراین $a/b = r \in R$ که تناقض است. پس $(a) \not\subseteq (b)$ و در نتیجه بنا به قسمت (۳)، $m(b) \subseteq (a)$. بنابراین $mb/a \subseteq R$. حال اگر $m(b/a) = R$، آن‌گاه $m = R(a/b)$. بنابراین $a/b \in R$ که تناقض است. در نتیجه $(b/a)m \subseteq m$.

۴⇐۱) فرض کنید $x \in K - R$ ، که K میدان خارج قسمتی R و P یک ایده‌ال اول از R باشد. در این صورت بنا به قضیه ۷.۱.۱، کافیست نشان دهیم $x^{-1}P \subseteq P$. عنصر $p \in P \subseteq m$ درنظربگیرید. بنا به قضیه ۷.۱.۱، $x^{-1}p \in m$. با استفاده مجدد از قضیه ۷.۱.۱، $x^{-1}(x^{-1}p) \in m \subseteq R$. بنابراین $(x^{-1}p)^2 = x^{-1}px^{-1}p \in P$. حال چون P اول است، پس $x^{-1}p \in P$. ■

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنید R یک دامنه با میدان خارج قسمتی K باشد. در این صورت عبارات زیرمعادلند:

۱) R دامنه شبه ارزیابی است؛

۲) برای هر $x \in K - R$ و هر عنصر غیر یکه $a \in R$، $(x+a)R = xR$؛

۳) برای هر $x \in K - R$ و هر عنصر غیر یکه $a \in R$، $x^{-۱}a \in R$.

اثبات. ۱⇐۲) فرض کنید $x \in K - R$ و a یک عنصر غیریکه از R باشد. در این صورت ایده‌ال اولی مانند P وجود دارد که $a \in P$. چون بنا به فرض P به طور قوی اول است، پس بنا به قضیه ۷.۱.۱، $x^{-۱}a \in P \subseteq R$. این ایجاب می‌کند که $(x+a)/x = ۱ + x^{-۱}a \in R$. درنتیجه $(x+a)R \subseteq xR$. از طرف دیگر چون $x + a \notin R$، پس بنا به قضیه ۷.۱.۱، $(x+a)^{-۱}P \subseteq P$. حال چون $a \in P$، پس $a/(x+a) \in P \subseteq R$. بنابراین $x/(x+a) = ۱ - (a/(x+a)) \in R$ و در نتیجه $xR \subseteq (x+a)R$.

۲⇐۳) بنا به قسمت (۲)، $x + a = rx$. پس $۱ + x^{-۱}a = (x+a)/x = r \in R$. بنابراین $x^{-۱}a \in R$.

۳⇐۱) فرض کنید P یک ایده‌ال اول از R و $a, b \in K$ به طوری که $ab \in P$. در این صورت اگر $a, b \in R$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. بنابراین فرض کنید $b \notin R$. در این صورت چون ab در R غیر یکه است بنا به قسمت (۳)، $a = b^{-۱}ab \in R$. a غیر یکه است، زیرا در غیر این صورت $b = a^{-۱}ab \in P$ که تناقض است. بنا به قسمت (۳)، $b^{-۱}a \in R$. بنابراین $a^{۲} = (b^{-۱}a)ab \in P$. حال چون P اول است، پس $a \in P$. در نتیجه P به طور قوی اول است. یعنی R دامنه شبه ارزیابی است. ■

لم ۱۳.۱.۱ فرض کنید T یک دامنه شامل دامنه شبه ارزیابی R و مشمول در میدان کسرهای K از R باشد. در این صورت اگر ایده‌ال Q در T اول باشد، آن‌گاه هر ایده‌ال اول از R مشمول در $Q \cap R$، یک ایده‌ال اول از T است.

اثبات. فرض کنید P یک ایده‌ال اول از R و $P \subseteq Q \cap R$. در این صورت ابتدا نشان می‌دهیم P یک ایده‌ال از T است. برای این منظور فرض کنید $t \in T$ و $p \in P$. چون R دامنه شبه ارزیابی است، پس P به طور قوی اول است. حال از این که $(tp)t^{-1} = p \in P$، نتیجه می‌شود $tp \in P$ یا $t^{-1} \in P$. اگر $t^{-1} \in P$، آن‌گاه $t^{-1} \in Q$ و این یعنی t^{-1} یک عنصر غیریکه از T است که با فرض $t \in T$ در تناقض است. بنابراین $tp \in P$. پس P یک ایده‌ال از T است. حال فرض کنید $t_1, t_2 \in T$ و $t_1 t_2 \in P$. در این صورت چون $T \subseteq K$ و P به طور قوی اول است، پس $t_1 \in P$ یا $t_2 \in P$. یعنی P یک ایده‌ال اول از T است.

۲.۱ ایده‌ال های توانا

در سرتاسر این بخش R را یک دامنه صحیح با میدان خارج قسمتی K در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۲.۱ ایده‌ال ناصفر I از R را توانا نامیم، هرگاه برای $a, b \in K$، $ab \in I$ ایجاب کند که $a \in R$ یا $b \in R$.

لم ۲.۲.۱ R یک دامنه ارزیابی است اگر و فقط اگر R به عنوان ایده‌ال توانا باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید $a, b \in K$، $ab \in R$ و $a \notin R$. در این صورت چون R دامنه ارزیابی است، پس $b = a^{-1}ab \in R$.

$\Rightarrow$) فرض کنید $x \in K - R$. در این صورت چون $x.x^{-1} = 1 \in R$ و R تواناست، پس $x^{-1} \in R$. ■

لم ۳.۲.۱ ایده‌ال I از R تواناست اگر و فقط اگر برای هر $x \in K - R$، $x^{-1}I \subseteq R$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید I توانا باشد و $x \in K - R$. در این صورت اگر $a \in I$، آن‌گاه چون $xx^{-1}a = a \in I$ و $x \notin R$، پس $x^{-1}a \in R$. بنابراین $x^{-1}I \subseteq R$.

$\Leftarrow$) فرض کنید $y,z \in K$ به طوری که $yz \in I$. در این صورت اگر $y \notin R$، آن‌گاه بنا به فرض $y^{-1}I \subseteq R$. بنابراین $z = y^{-1}yz \in y^{-1}I \subseteq R$.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید I یک ایده‌ال توانا و Q یک ایده‌ال اول از R باشند به طوری که $Q \subsetneq I$. در این صورت I/Q یک ایده‌ال توانا از R/Q است.

اثبات. همریختی طبیعی $\phi : R \longrightarrow R/Q$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $x = \phi(y)/\phi(z)$ یک عنصر از میدان خارج قسمتی R/Q باشد به طوری که $x \notin R/Q$. در این صورت بنا به لم ۳.۲.۱، کافیست نشان دهیم $x^{-1}(I/Q) \subseteq R/Q$. اگر $y/z \in R$، آن‌گاه به راحتی می توان دید که $x = \phi(y/z)$. حال چون $x \notin R/Q$، پس $y/z \notin R$. در نتیجه اگر $a \in I$، آن‌گاه بنا به لم ۳.۲.۱، $(z/y)a = (y/z)^{-1}a \in R$. بنابراین

$$\phi((z/y)a) = \phi(z/y)\phi(a) = (\phi(z)/\phi(y))\phi(a) \in R/Q$$

در نتیجه $x^{-1}(I/Q) \subseteq R/Q$.

قضیه ۵.۲.۱ یک ایده‌ال اول از R به طور قوی اول است اگر و فقط اگر توانا باشد.

اثبات. فرض کنید P یک ایده‌ال اول توانا از R باشد و برای $x,y \in K$، $xy \in P$. در این صورت $x^{۲}y^{۲} = (xy)^{۲} \in P^{۲} \subseteq P$. چون P تواناست، پس $x \in R$ یا $y \in R$. اگر $x,y \in R$، آن‌گاه چون P اول است، پس $x \in P$ یا $y \in P$. فرض کنید $x \notin R$ و $y \in R$. در این صورت نشان می دهیم $y \in P$. یعنی P به طور قوی اول است. اگر $x^{۲} \in R$، آن‌گاه چون $x \notin R$ و P یک ایده‌ال تواناست، پس $x^{۲} \notin P$. در نتیجه $x^{۲}y^{۲} \in P$ ایجاب می کند که $y^{۲} \in P$. بنابراین از آنجا که P اول است، $y \in P$. حال اگر $x^{۲} \notin R$، آن‌گاه چون $(y^{۲}/xy)x^{۲} = xy \in P$ و P تواناست، پس $y^{۲}/xy \in R$. بنابراین $y^{۲} = (y^{۲}/xy)xy \in P$. در نتیجه $y \in P$. برعکس واضح است. ■

لم ۶.۲.۱ اگر $Q \subseteq P$ ایده‌ال های اولی از R باشند به طوری که P به طور قوی اول باشد، آن‌گاه Q نیز به طور قوی اول است.

اثبات. اگر $a \in K - R$ دلخواه باشد، آن‌گاه چون P به طور قوی اول است، پس بنا به قضیه ۷.۱.۱، $a^{-1}P \subseteq P$. بنابراین $a^{-1}PQ \subseteq PQ$. در نتیجه بنا به قضیه ۷.۱.۱، PQ به طور قوی اول است. فرض کنید Q به طور قوی اول نباشد و برای $x, y \in K$، $xy \in PQ$. در این صورت $xy \in Q$. بنابراین $x, y \notin Q$. حال چون $PQ \subseteq Q$، پس $x, y \notin PQ$. یعنی PQ به طور قوی اول نیست و این تناقض است.

قضیه ۷.۲.۱ اگر $J \subseteq I$ ایده‌ال هایی ناصفر از R باشند به طوری که I توانا باشد، آن‌گاه J نیز تواناست.

اثبات. فرض کنید $a, b \in K$ به طوری که $ab \in J$. در این صورت چون I تواناست و $ab \in I$، پس $a \in R$ یا $b \in R$. ■

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید I یک ایده‌ال توانا از R باشد. در این صورت

۱) اگر J یک ایده‌ال از R باشد، آن‌گاه یا $J \subseteq I$ یا $I^{2} \subseteq J$.

۲) اگر J یک ایده‌ال اول از R باشد، آن‌گاه یا $J \subseteq I$ یا $I \subseteq J$.

۳) ایده‌ال های اول R مشمول در $\sqrt{I}$ تحت رابطه شمول مرتب هستند.

اثبات. ۱) فرض کنید $J \not\subseteq I$، $a \in J - I$ و $b, c \in I$. در این صورت $(bc/a)(a/b) \in I$. حال چون $a/b \notin R$ و I تواناست، پس $bc/a \in R$. بنابراین $bc \in (a) \subseteq J$. در نتیجه $I^{2} \subseteq J$.

۲) بنا به (۱) واضح است.

۳) فرض کنید ایده‌ال های اول P و Q به طور سره مشمول در $\sqrt{I}$ باشند. در این صورت $P,Q \subseteq I$. زیرا در غیر این صورت بنا به قسمت (۲)، $I \subseteq P \subsetneq \sqrt{I}$ و $I \subseteq Q \subsetneq \sqrt{I}$، که به تناقض $Q = P = \sqrt{I}$ می انجامد. پس بنا به قضیه ۷.۲.۱، P و Q توانا هستند. در نتیجه بنا به قسمت (۲) نتیجه حاصل است. ■

نتیجه ۹.۲.۱ دامنه R یک دامنه شبه ارزیابی است اگر و فقط اگر R شامل ایده‌ال ماکسیمال توانایی باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید m ایده‌ال ماکسیمال R باشد. در این صورت چون R دامنه شبه ارزیابی است، پس m به طور قوی اول است. حال بنا به قضیه ۵.۲.۱، m تواناست.
$\Rightarrow$) فرض کنید P یک ایده‌ال اول دلخواه از R و m ایده‌ال ماکسیمال توانایی از R باشد. در این صورت چون $P \subseteq m$، پس بنا به قضیه ۷.۲.۱، P تواناست. در نتیجه بنا به قضیه ۵.۲.۱، P به طور قوی اول است. یعنی R یک دامنه شبه ارزیابی است. ■

قضیه ۱۰.۲.۱ اگر R شامل یک ایده‌ال توانا باشد، آن‌گاه R شامل بزرگترین ایده‌ال توانای منحصر بفرد است.

اثبات. کافیست نشان دهیم مجموع ایده‌ال های توانا، تواناست. فرض کنید $\{I_\alpha\}$ یک خانواده از ایده‌ال های توانا باشد. در این صورت اگر $x \in K - R$، آن‌گاه بنا به لم ۳.۲.۱ برای هر α، $x^{-1} I_\alpha \subseteq R$. بنابراین $x^{-1} \sum_\alpha I_\alpha \subseteq R$. با استفاده مجدد از لم ۳.۲.۱، نتیجه می شود که $\sum_\alpha I_\alpha$ تواناست.

قضیه ۱۱.۲.۱ اگر I یک ایده‌ال سره توانا از R باشد، آن‌گاه $P = \bigcap_{k=0}^{\infty} I^k$ یک ایده‌ال توانا و به طور قوی اول است.

اثبات. چون $P=\bigcap_{k=0}^{\infty} I^k \subseteq I$ و I تواناست، پس بنا به قضیه ۷.۲.۱، P تواناست. حال بنا به قضیه ۵.۲.۱، کافیست نشان دهیم P اول است. فرض کنید $xy \in P$ به طوری که $x \in R - P$. در این صورت عدد صحیح و مثبت n وجود دارد که $x \notin I^n$. بنابراین $(x) \nsubseteq I^n$. حال بنا به قضیه ۸.۲.۱ قسمت (۱)، $I^{2n} \subseteq (x)$ و برای هر $k>0$، $xy \in P \subseteq I^{2n+k} \subseteq xI^k$. در نتیجه برای هر $k>0$، $y \in I^k$. پس $y \in P$. یعنی P اول است.

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنید I یک ایده‌ال توانا از R باشد. در این صورت اگر $x,y \in K$ و $xy \in \sqrt{I}$، آن‌گاه عدد صحیح مثبت m وجود دارد به طوری که یا $x^m \in I$ یا $y^m \in I$. به خصوص اگر I یک ایده‌ال سره توانا از R باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}$ اول است.

اثبات. از آنجا که $xy \in \sqrt{I}$، پس عدد صحیح و مثبت n وجود دارد که $(xy)^n \in I$. بنابراین $(x^{3n}/x^ny^n)(y^{3n}/x^ny^n) = x^ny^n \in I$. حال چون I تواناست، پس $x^{3n}/x^ny^n \in R$ یا y^{3n}/x^ny^n. در نتیجه $(x^{3n}/x^ny^n)(x^ny^n) = x^{3n} \in I$ یا $(y^{3n}/x^ny^n)(x^ny^n) = y^{3n} \in I$.

تعریف ۱۳.۲.۱ یک دامنه ارزیابی گسسته یک دامنه ایده‌ال اصلی است که دقیقاً یک ایده‌ال اول دارد.

مثال ۱۴.۲.۱ رادیکال یک ایده‌ال توانا لزوماً توانا نیست. فرض کنید $V = K + m$ یک دامنه ارزیابی گسسته از رتبه یک باشد به طوری که K یک میدان و $m = tV$ ایده‌ال ماکسیمال V است. فرض کنید $R = K + m^2$. نشان می دهیم m^3 یک ایده‌ال توانا از R است. برای این منظور $x,y \in K$ را چنان در نظر بگیرید که $xy \in m^3$. حال می توانیم بنویسیم $x = ut^n$ و $y = vt^k$ که u و v عناصری یکه از V و n و k اعداد صحیح هستند. چون $xy \in m^3$، پس $n + k \geqslant 3$. بنابراین یا $n \geqslant 2$ یا $k \geqslant 2$. فرض کنید $n \geqslant 2$. در این صورت