دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

ضربگرهای فشرده روی جبرهای گروهی

رساله‌ی دکتری ریاضی محض، آنالیز هارمونیک،

محمدجواد مهدی‌پور

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

شهریور ماه ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

رساله‌ی دکتری ریاضی محض، آنالیز هارمونیک، محمدجواد مهدی‌پور

تحت عنوان

ضربگرهای فشرده روی جبرهای گروهی

در تاریخ ۱۳۸۷/۰٦/۳۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر رسول نصر اصفهانی
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر سعید مقصودی
۳ــ استاد داور ۱	دکتر علی رجالی (دانشگاه اصفهان)
	()
۴ــ استاد داور ۲	دکتر فرید بهرامی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر رسول نصراصفهانی

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله، به بررسی ضربگرهای چپ و راست فشرده روی $L_\circ^\infty(G)^*$ از یک گروه موضعاً فشرده‌ی G می‌پردازیم و نشان می‌دهیم وجود یک ضربگر چپ یا راست ناصفر فشرده روی $L_\circ^\infty(G)^*$ با فشردگی G معادل است. همچنین قدرمطلق ضربگرهای راست و چپ روی $L_\circ^\infty(G)^*$ را نیز مطالعه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم قدر مطلق یک ضربگر در حالت کلی یک ضربگر نیست. در پایان به بررسی ضربگرهای فشرده روی $M(G)^{**}$ می‌پردازیم و صورت کلی عناصر کاملاً پیوسته‌ی چپ از $M(G)^{**}$ را مشخص می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمه

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. عملگر کراندار $T: A \to A$ را ضربگر راست می‌نامند اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $T(ab) = aT(b)$. همچنین T را ضربگر چپ می‌نامند اگر به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $T(ab) = T(a)b$. برای هر $a \in A$، عملگرهای $\lambda_a : b \mapsto ab$ و $\rho_a : b \mapsto ba$ به ترتیب ضربگرهای چپ و راست هستند. ضربگرها اولین بار در سال ۱۹۴۷ توسط هوخشیلد [۲۲] مطالعه شدند. این بررسی‌ها توسط افرادی چون هلگاسون [۱۸]، وانگ[۴۳]، وندل [۴۶] و وستون [۴۷] ادامه پیدا کرد. جانسون ظاهراً بدون آگاه بودن از این بررسیها این مفهوم را وارد آنالیز کرد و به بررسی جنبه‌های مختلف آنالیز روی ضربگرها پرداخت و نتایج خود را در مقالات [۲۴]، [۲۵] و [۲۶] منتشر کرد. دانس [۶] و دانس و هافمن [۷، ۸] نیز به مطالعه این موضوع پرداختند.

عملگر کراندار T را فشرده می‌نامند هرگاه بستار $T(B_A)$ در توپولوژی حاصل از نرم A فشرده باشد، که در آن B_A گوی یکه‌ی بسته‌ی A را نشان می‌دهد. عضو $a \in A$ را کاملاً پیوسته‌ی چپ می‌نامند هرگاه λ_a روی A فشرده باشد و آن را کاملاً پیوسته‌ی راست می‌نامند هرگاه ρ_a روی A فشرده باشد.

مطالعه‌ی ضربگرهای فشرده روی جبرهای باناخ از اهمیت خاصی برخوردار است. مطالعه‌ی آنها، کمک قابل ملاحظه‌ای به شناخت جبر A می‌کند؛ مرجع [۹] را ببینید. لذا، ریاضیدانان متعددی به مطالعه‌ی ضربگرها در حالت کلی و نیز در حالت خاص روی برخی از جبرهای باناخ پرداخته‌اند. اما

بررسی ضربگرهای فشرده روی جبرهای گروهی وابسته به یک گروه موضعاً فشرده، علاوه بر شناخت خود جبرهای گروهی، به خاصیت‌های توپولوژی گروه G نیز مرتبط می‌شود؛ برای مثال قهرمانی ولائو در دهه‌ی نود میلادی، تحقیقاتی وسیع برای شناخت ضربگرهای فشرده روی $L^1(G)^{**}$ و $M(G)^{**}$ مجهز به ضرب آرنز $\odot$ انجام دادند و نتایج به دست آمده را در مقالات [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۰ و ۱۹۹۴ و ۱۹۹۷ ارایه نمودند. آنها نشان دادند که وجود یک ضربگر راست ناصفر فشرده روی $L^1(G)^{**}$ معادل با میانگین‌پذیری G است. سپس در حالتی که G فشرده نیست، نشان دادند که $L^1(G)^{**}$ نمی‌تواند دارای ضربگر چپ فشرده‌ای مانند T باشد به طوری که برای یک عنصر $n \in L^1(G)^{**}$ داشته باشیم $\langle T(n), 1\rangle \neq 0$. لوزرت[۳۲] نیز در سال ۲۰۰۴ به تعدادی از سؤالات مطرح شده توسط قهرمانی و لائو در مقالات مزبور پاسخ داد. در واقع، وی با شرایطی خاص ضربگرهای فشرده روی $L^1(G)^{**}$ را معرفی کرد و ثابت کرد اگر G یک گروه موضعاً فشرده‌ی نافشرده باشد، آن‌گاه هیچ ایدآل راست I در $M(G)^{**}$ با شرط $I^2 = I$ یا $\mathrm{lan}(I) = \{0\}$، دارای ضربگر چپ ناصفر فشرده نیست، که در آن $\mathrm{lan}(I) = \{\iota \in I : \iota \odot I = \{0\}\}$. او همچنین نشان داد که وجود یک ضربگر چپ ناصفر فشرده روی $M(G)^{**}$ معادل با فشردگی G است.

از طرف دیگر، مطالعات گسترده‌ای روی $L^\infty(G)^*$ انجام شده است و جنبه‌های مختلفی از آنالیز روی این جبر باناخ مورد بررسی قرار گرفته است. ونگ [۴۹] در سال ۱۹۷۱ ثابت کرد اگر G یک گروه فشرده باشد، آن‌گاه $L^1(G)$ در دوگان دوّم خود مجهز به ضرب آرنز، ایدآل است. واتانابه [۴۴، ۴۵] در سال‌های ۱۹۷۴ و ۱۹۷۶ دو اثبات متفاوت برای عکس نتیجه‌ی ونگ ارایه داد. همچنین درسال ۱۹۷۹، گرسر [۱۶] و جانسون [۲۷] نیز اثباتهایی متفاوت ارایه دادند. ایشیک، پیم و اولگر [۲۳]، دوگان دوم $L^1(G)^{**}$ از جبر گروهی $L^1(G)$ روی گروه فشرده‌ی G را بررسی کردند. گرسر و لوزرت [۱۷] در سال ۱۹۸۴، قهرمانی و لائو [۱۱] در سال ۱۹۸۸ و لائو و پیم [۳۰] درسال ۱۹۹۰ دوگان دوم $L^1(G)^{**}$ از یک گروه موضعاً فشرده‌ی G را بررسی کردند.

لائو و پیم [۳۰] برای بررسی $L^1(G)^{**}$ و یافتن نتایجی مشابه با حالتی که G فشرده است، زیر فضای $L_0^\infty(G)$ را معرفی و مطالعه کردند. آنها ثابت کردند که $L_0^\infty(G)^*$ نقشی اساسی در ساختار $L^\infty(G)^*$ ایفا می‌کند. بعد از آن سینک [۳۹] در سال ۱۹۹۸ نشان داد که $L_0^\infty(G)^*$ را می‌توان به عنوان دوگان دوم $L^1(G)$ تحت یک توپولوژی موضعاً محدب در نظر گرفت. اخیراً رجالی، مقصودی و نصر [۳۴]، به مطالعه‌ی ضرب از نوع آرنز روی جبر وزندار $L_0^\infty(G, 1/\omega)^*$ پرداختند و با استفاده از آن یک ضرب آرنز

روی دوگان دوم $L^1(G,\omega)$ تحت توپولوژی موضعاً محدب مزبور، معرفی و مطالعه کردند.

هدف اصلی این رساله که شامل ۵ فصل است، بررسی فشردگی و نیز قدرمطلق یک ضربگر روی جبر باناخ $L_0^\infty(G)^*$ است.

در فصل اوّل، ضمن معرفی فضای باناخ $L_0^\infty(G)$ و جبر باناخ $L_0^\infty(G)^*$ به بیان خواص شناخته شده و نیز اثبات خواص مورد نیاز دیگری از آنها می‌پردازیم. همچنین ضربگرهای راست و چپ روی $L_0^\infty(G)^*$ و نیز ارتباط آنها با عملگرهای خاص روی $L_0^\infty(G)$ را بررسی می‌کنیم.

در فصل دوم، به بررسی ضربگرهای راست فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ می‌پردازیم. در این فصل نشان می‌دهیم وجود یک ضربگر راست ناصفر فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ با فشردگی G معادل است. همچنین ثابت می‌کنیم مجموعه‌ی ضربگرهای راست ناصفر فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ با $L^1(G)$ به طور طولپا یکریخت است. در پایان نشان می‌دهیم وجود نوع خاصی از ضربگرهای راست فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ با متناهی بودن G هم ارز است.

در فصل سوم، به بررسی ضربگرهای چپ فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ می‌پردازیم. در این فصل نشان می‌دهیم وجود یک ضربگر چپ ناصفر فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ با فشردگی G معادل است. در پایان به بررسی مجموعه‌ی ضربگرهای چپ فشرده روی $L_0^\infty(G)^*$ می‌پردازیم.

در فصل چهارم، قدرمطلق ضربگرهای راست و چپ روی $L_0^\infty(G)^*$ را بررسی می‌کنیم و شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آن شرایط، قدرمطلق یک ضربگر خود یک ضربگر است. در پایان به برخی از سوالات قهرمانی و لائو [۱۴] در حالت‌های خاص پاسخ می‌دهیم.

در فصل پنجم، ضربگرهای راست و چپ فشرده روی $M(G)^{**}$ را بررسی می‌کنیم و شکل کلی یک عنصر کاملاً پیوسته‌ی چپ روی $M(G)^{**}$ را مشخص می‌کنیم.

فصل ۲

ضربگرهای راست و چپ روی $L_\circ^\infty(G)^*$

در این فصل، ضمن آشنایی با فضای باناخ $L_\circ^\infty(G)$ و جبر باناخ $L_\circ^\infty(G)^*$ وابسته به یک گروه موضعاً فشرده‌ی G، به مطالعه‌ی برخی از جنبه‌های مختلف آنالیز روی آنها می‌پردازیم. بخصوص رابطه‌ی $L_\circ^\infty(G)^*$ را با جبر گروهی $L^1(G)$ و جبر اندازه‌ی $M(G)$ مورد توجه قرار می‌دهیم. در پایان ضربگرهای راست و چپ روی $L_\circ^\infty(G)^*$ و نیز ارتباط آنها با برخی عملگرهای خاص روی $L_\circ^\infty(G)$ را بررسی می‌کنیم.

G یک گروه موضعاً فشرده با عنصر همانی e را نشان می‌دهد؛ یعنی یک گروه G همراه با یک توپولوژی هاسدورف موضعاً فشرده که تحت آن نگاشت $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ از $G \times G$ به G پیوسته است. از [۱۹] یادآوری کنیم که یک اندازه‌ی هار چپ λ روی G وجود دارد؛ یعنی اندازه‌ی رادون مثبتی روی G که برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E و هر $x \in G$ داشته باشیم $\lambda(xE) = \lambda(E)$. اندازه‌ی هار چپ تحت مضرب اسکالر یکتاست. به‌علاوه فرض کنیم Δ تابع مدولی G باشد؛ یعنی همریختی پیوسته‌ای از G به توی گروه ضربی $(\circ, \infty)$ به طوری که برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از G و هر $x \in G$ داریم $\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E)$. زیرمجموعه‌ی بورل E از G را موضعاً پوچ نامند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq G$ داشته باشیم $\lambda(E \cap K) = \circ$. یک خاصیت وابسته به $x \in G$ را موضعاً تقریباً همه جا

روی G برقرار نامند هرگاه مجموعه‌ی نقاطی از G که دارای آن خاصیت نیست، موضعاً پوچ باشد. فرض کنیم $L^\infty(G)$ معرف خانواده‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر مختلط- مقدار f روی G باشد به طوری که

$$\|f\|_\infty = \inf\{t \geq \circ : x \in G \text{ برای موضعاً تقریباً هر } |f(x)| \leq t\} < \infty.$$

با یکسان در نظر گرفتن توابعی در $L^\infty(G)$ که موضعاً تقریباً همه جا برابرند، $L^\infty(G)$ همراه با عملهای نقطه‌ای و نرم $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است؛ فصل ۱۲ از مرجع [۱۹] را ببینید. ضرب پیچشی توابع مختلط- مقدار اندازه‌پذیر f و g روی G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-۱}x)\ d\lambda(y)$$

برای هر $x \in G$ که به ازای آن انتگرال فوق تعریف شده باشد. فرض کنیم $L^۱(G)$ فضای باناخ متشکل از تمام توابع مختلط- مقدار انتگرال‌پذیر ϕ روی G را نشان دهد. با یکسان در نظر گرفتن توابعی در $L^۱(G)$ که موضعاً تقریباً همه جا برابرند، $L^۱(G)$ همراه با ضرب پیچشی توابع و $\|.\|_۱$ یک جبر باناخ با همانی تقریبی با کران یک است؛ برای جزییات بیشتر به فصل ۱۲ از مرجع [۱۹] رجوع کنید. همچنین $L^\infty(G)$ دوگان $L^۱(G)$ تحت دوگانگی زیر تعریف شده به ازای $f \in L^\infty(G)$ و $\phi \in L^۱(G)$ است

$$\langle f, \phi\rangle := \int_G f(x)\ \phi(x)\ d\lambda(x).$$

ساختار دوگان فضای باناخ $L^\infty(G)$ توسط افراد زیادی مورد بررسی قرار گرفته است؛ مراجع [۵]، [۱۵] و [۴۱] را ببینید. مخصوصاً در حالتی که G فشرده باشد، تحقیقات وسیعی توسط ایشیک، پیم و اولگر [۲۳] در سال ۱۹۸۴ صورت گرفته است. توسیع این نتایج برای حالتی که G نافشرده است، با مشکلاتی روبرو بوده است گرچه نتایج بسیاری نیز حاصل شده است؛ مراجع [۱۷]، [۱۱] و [۲۹] را ببینید.

لائو و پیم [۳۰] در سال ۱۹۹۰ زیر فضای $L^\infty_\circ(G)$ از $L^\infty(G)$ را معرفی و مطالعه نمودند و بسیاری از نتایج به دست آمده در [۲۳] را برای دوگان $L^\infty(G)$ در حالتی که G فشرده است، برای دوگان $L^\infty_\circ(G)$ در حالتی که G موضعاً فشرده است، ثابت کردند.

۲-۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. گوییم تابع $g \in L^\infty(G)$ در *بی‌نهایت تقریباً همه جا صفر می‌شود* اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از G موجود باشد به طوری که

$$\|f\chi_{G\setminus K}\|_\infty < \varepsilon.$$

که در آن $\chi_{G\setminus K}$ تابع مشخصه‌ی $G\setminus K$ روی G را نشان می‌دهد. فضای تمام توابع $g \in L^\infty(G)$ را که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با $L_\circ^\infty(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین گوییم $g \in L_\circ^\infty(G)$ دارای *محمل فشرده* است اگر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از G طوری یافت شود که

$$\|g\chi_{G\setminus K}\|_\infty = \circ$$

فضای تمام توابع با محمل فشرده در $L_\circ^\infty(G)$ را با $L_c^\infty(G)$ نشان می‌دهیم.

۲−۲ گزاره. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

(الف) $L_\circ^\infty(G)$ *یک زیرفضای بسته از $L^\infty(G)$ است.*

(ب) $L_c^\infty(G)$ در $L_\circ^\infty(G)$، $\|.\|_\infty$- *چگال است.*

(ج) *اگر G فشرده باشد، آن‌گاه* $L_c^\infty(G) = L_\circ^\infty(G) = L^\infty(G)$.

(د) *اگر G نافشرده باشد، آن‌گاه* $L_c^\infty(G) \subsetneqq L_\circ^\infty(G) \subsetneqq L^\infty(G)$.

اثبات. مرجع [۳۰] را ببینید. □

حال به بیان نتایجی در مورد فضای دوگان $L_\circ^\infty(G)^*$ از $L_\circ^\infty(G)$ که در فصل‌های بعد مورد نیاز است می‌پردازیم. ابتدا توجه کنیم که $L^1(G)$ را می‌توان به عنوان زیر فضایی از فضای باناخ $L_\circ^\infty(G)^*$ در نظر گرفت؛ در واقع، به هر عنصر $\phi \in L^1(G)$، تابعک خطی

$$f \mapsto \int_G f(x)\phi(x)\, d\lambda(x)$$

روی $L_\circ^\infty(G)$ نظیر می‌شود که برای راحتی با همان نماد ϕ نمایش داده می‌شود.

۲−۳ گزاره. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت $L^1(G) = L_\circ^\infty(G)^*$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.*

اثبات. تابعک $u \in L_\circ^\infty(G)^*$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر تابع پیوسته‌ی f با محمل فشرده داشته باشیم $\langle u, f\rangle = f(e)$. لذا اگر $L^1(G) = L_\circ^\infty(G)^*$، آن‌گاه تابع $\phi \in L^1(G)$ وجود دارد به طوری که

برای هر $g \in L_\circ^\infty(G)$ داریم

$$\langle u, g\rangle = \int_G \phi(x)\ g(x)\ d\lambda(x).$$

حال فرض کنیم U یک همسایگی باز دلخواه از e در G باشد. در این صورت بنابر لم اوریسون، تابع پیوسته‌ی h با محمل فشرده روی G وجود دارد به طوری که $0 \le h \le 1$، $h(e) = 1$ و $h(G \setminus U) = \{0\}$. بنابراین

$$\begin{aligned} |\langle u, h\rangle| &= |\int_G \phi(x)\ h(x)\ d\lambda(x)| \\ &\le \|\phi\|_1\ \lambda(U); \end{aligned}$$

یعنی $\lambda(U) \ge \|\phi\|_1^{-1}$ که از آن جا بنابر منظم بودن λ داریم $\lambda(\{e\}) \ge \|\phi\|_1^{-1} > 0$. بنابراین G گسسته است؛ مرجع [۱۹] را ببینید. □

نتیجه‌ی زیر در حالت کلی برقرار است.

۲–۴ قضیه . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت $L^1(G)$ به طور ضعیف* در $L_\circ^\infty(G)^*$ چگال است.*

اثبات. قضیه‌ی ۱۱.۲ از مرجع [۳۰] را ببینید. □

۲–۵ تعریف. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. گوییم تابعک خطی $m \in L_\circ^\infty(G)^*$ دارای *محمل فشرده* است اگر یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از G وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in L_\circ^\infty(G)$ داشته باشیم

$$\langle m, g\rangle = \langle m, g\chi_K\rangle.$$

۲–۶ گزاره . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت تابعکهای با محمل فشرده‌ی در $L_\circ^\infty(G)^*$ چگالند.*

اثبات. گزاره‌ی ۶.۲ از مرجع [۳۰] را ببینید. □

به ازای هر $f \in L^\infty(G)$ و $\phi \in L^1(G)$، تابعک $f\phi \in L^1(G)^*$ به ازای هر $\psi \in L^1(G)$ با دستور زیر تعریف می‌شود

$$\langle f\phi, \psi\rangle = \langle f, \phi * \psi\rangle.$$

همچنین به ازای هر $n \in L^\infty(G)^*$ و $f \in L^\infty(G)$، تابعک $nf \in L^1(G)^*$ به ازای هر $\phi \in L^1(G)$ با دستور زیر تعریف می‌شود

$$\langle nf, \phi\rangle = \langle n, f\phi\rangle.$$

فرض کنیم X زیر فضای بسته‌ای از $L^\infty(G)$ باشد. در این صورت X را *ناوردای* چپ گویند اگر

$$XL^1(G) \subseteq X.$$

به علاوه، X را خودبرگردان *توپولوژیک* چپ گویند اگر

$$X^*X \subseteq X.$$

زمانی که X ناوردای چپ و خودبرگردان توپولوژیک چپ باشد، می‌توان ضرب آرنز اول را که با نماد $\diamond$ نمایش داده می‌شود برای هر $m, n \in X^*$ و $f \in X$ به صورت زیر روی X^* تعریف کرد

$$\langle m \diamond n, f\rangle = \langle m, nf\rangle.$$

به راحتی می‌توان دید به ازای هر $n \in X^*$، نگاشت $m \mapsto m \diamond n$ روی X^* به طور ضعیف*ـ ضعیف* پیوسته است. اما برای هر $m \in X^*$، نگاشت $n \mapsto m \diamond n$ روی X^* لزوماً به طور ضعیف*ـ ضعیف* پیوسته نیست مگر آن که $m \in L^1(G)$. مجموعه‌ی عناصری از X^* را که به ازای آنها این نگاشت به طور ضعیف*ـ ضعیف* پیوسته است مرکز توپولوژیک اول X^* می‌نامند و با $Z_1(X^*)$ نشان می‌دهند. توجه کنیم که $L^1(G) \subseteq Z_1(X^*) \subseteq X^*$. برای جزییات بیشتر در مورد ضرب آرنز مراجع [۳]، [۴] و [۳۱] را ببینید.

۲–۷ گزاره . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت $L^\infty_\circ(G)^*$ با ضرب آرنز اول یک جبر باناخ است که $L^1(G)$ را به عنوان یک ایدآل بسته شامل می‌شود.*

اثبات. گزاره‌ی ۷.۲ و قضیه‌ی ۱۱.۲ از مرجع [۳۰] را ببینید. $\square$

۲ــ۸ تعریف. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. گوییم تابعک $u \in L^\infty_\circ(G)^*$ یک همانی مخلوط است اگر به ازای هر $\phi \in L^1(G)$ داشته باشیم

$$\phi \diamond u = u \diamond \phi = \phi.$$

مجموعه‌ی تمام همانی‌های مخلوط با نرم یک را با $\Lambda_\circ(G)$ نمایش می‌دهیم.

۲ــ۹ قضیه . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

(الف) $L^1(G) = \bigcap\{u \diamond L^\infty_\circ(G)^* : u \in \Lambda_\circ(G)\}$.

(ب) *G متناهی است اگر و تنها اگر $L^\infty_\circ(G)^*$ دارای بعد متناهی باشد.*

اثبات. قضیه‌ی ۱۱.۲ از مرجع [۳۰] را ببینید. $\square$

۲ــ۱۰ گزاره . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر هم ارزند.*

(الف) *$L^\infty_\circ(G)^*$ دارای همانی تقریبی کراندار است.*

(ب) *$L^\infty_\circ(G)^*$ داری همانی است.*

(ج) *G گسسته است.*

اثبات. (الف)$\Leftarrow$(ب). فرض کنیم $L^\infty_\circ(G)^*$ دارای یک همانی تقریبی کراندار (u_γ) باشد. بدون کاستن از کلیت عنصر $u \in L^\infty_\circ(G)^*$ را طوری انتخاب می‌کنیم که در توپولوژی ضعیف* از فضای $L^\infty_\circ(G)^*$ داشته باشیم $u_\gamma \to u$. فرض کنیم $n \in L^\infty_\circ(G)^*$. چون نگاشت $m \mapsto m \diamond n$ روی $L^\infty_\circ(G)^*$ به طور ضعیف*ـ ضعیف* پیوسته است، در توپولوژی ضعیف* از فضای $L^\infty_\circ(G)^*$ داریم

$$u_\gamma \diamond n \to u \diamond n.$$

اما درتوپولوژی حاصل از نرم داریم

$$u_\gamma \diamond n \to n.$$

بنابراین $u \diamond n = n$؛ یعنی u برای $L_\circ^\infty(G)^*$ همانی چپ است.

حال برای هر $\phi \in L^1(G)$، نگاشت $k \mapsto \phi \diamond k$ به طور ضعیف*- ضعیف* پیوسته است. بنابراین در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم

$$\phi \diamond u_\gamma \to \phi \diamond u.$$

به علاوه، (u_γ) یک همانی تقریبی کراندار برای $L_\circ^\infty(G)^*$ است و لذا $\phi \diamond u = \phi$. چون $L^1(G)$ در $L_\circ^\infty(G)^*$ به طور ضعیف* چگال است، تور (ϕ_β) در $L^1(G)$ وجود دارد به طوری که در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم $\phi_\beta \to n$. بنابراین در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم

$$\phi_\beta = \phi_\beta \diamond u \to n \diamond u.$$

لذا $n \diamond u = n$؛ یعنی u برای $L_\circ^\infty(G)^*$ همانی راست نیز هست.

(ب)$\Leftarrow$(ج). فرض کنیم $L_\circ^\infty(G)^*$ دارای همانی $u_\circ$ باشد. در این صورت $\Lambda_\circ(G) = \{u_\circ\}$؛ زیرا $\Lambda_\circ(G)$ ناتهی است و از آن جا که هر $u \in \Lambda_\circ(G)$ برای $L_\circ^\infty(G)^*$ همانی راست است، $u_\circ = u_\circ \diamond u = u$.

حال بنابر قضیه‌ی ۲–۹، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} L^1(G) &= \bigcap\{u \diamond L_\circ^\infty(G)^* : u \in \Lambda_\circ(G)\} \\ &= u_\circ \diamond L_\circ^\infty(G)^* \\ &= L_\circ^\infty(G)^*. \end{aligned}$$

(ج)$\Leftarrow$(الف).فرض کنیم G گسسته باشد. در این صورت $\chi_{\{e\}}$ عنصر ناصفری از $L^1(G)$ است و لذا یک همانی برای $L^1(G)$ است. حال فرض کنیم که $m \in L_\circ^\infty(G)^*$. در این صورت تور (ϕ_γ) در $L^1(G)$ وجود دارد به طوری که در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم $\phi_\gamma \to m$. چون $\chi_{\{e\}} \in L^1(G)$ در توپولوژی ضعیف* داریم

$$\chi_{\{e\}} \diamond \phi_\gamma \to \chi_{\{e\}} \diamond m.$$

چون $\chi_{\{e\}}$ برای $L^1(G)$ همانی است، در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم

$$\phi_\gamma \to \chi_{\{e\}} \diamond m.$$

بنابراین $m = m \diamond \chi_{\{e\}}$. به طور مشابه، $m \diamond \chi_{\{e\}} = m$. در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

فرض کنیم $M(G)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام اندازه‌های بورل منظم مختلط μ روی G باشد. برای $\mu, \nu \in M(G)$، ضرب پیچشی $\mu * \nu$ را برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از G به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \mu(Ey^{-1})\ d\nu(y).$$

در این صورت $M(G)$ همراه با عملهای نقطه‌ای، نرم $\|\mu\| = |\mu|(G)$ و ضرب پیچشی یک جبر باناخ است. اندازه‌ی دیراک در $x \in G$ را با δ_x نشان می‌دهیم؛ یادآوری می‌کنیم که $\delta_x \in M(G)$ برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از G به صورت $\delta_x(E) = \chi_E(x)$ تعریف می‌شود. برای جزییات بیشتر مرجع [۱۹] را ببینید.

فضای باناخ تمام توابع پیوسته‌ی مختلط- مقدار روی G مجهز به $\|.\|_\infty$ را با $C_b(G)$ زیرفضای بسته‌ی همه‌ی توابع در بی‌نهایت صفر شونده در $C_b(G)$ را با $C_\circ(G)$ و زیرفضای همه‌ی توابع با محمل فشرده در $C_b(G)$ را با $C_c(G)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنیم $M(G)$ دوگان فضای باناخ $C_\circ(G)$ تحت دوگانگی زیر به ازای هر $\mu \in M(G)$ و $f \in C_\circ(G)$ است

$$\langle \mu, f\rangle = \int_G f(x)\ d\mu(x).$$

بدین ترتیب ضرب پیچشی روی $M(G)$ به عنوان دوگان $C_\circ(G)$ با دستور زیر داده می‌شود

$$\langle \mu * \nu, f\rangle = \int_G \int_G f(xy)\ d\mu(x)\ d\nu(y).$$

توجه کنیم که $\phi \mapsto \phi\ d\lambda$ یک تکریختی از $L^1(G)$ به توی $M(G)$ تعریف می‌کند و $L^1(G)$ را می‌توان به عنوان یک ایدآل بسته در $M(G)$ در نظر گرفت. به علاوه، برای هر $\phi \in L^1(G)$ و $\mu \in M(G)$، ضرب پیچشی $\mu * \phi$ و $\phi * \mu$ را برای تقریباً هر $x \in G$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(\mu * \phi)(x) = \int_G \phi(y^{-1}x)\ d\mu(y), \qquad (\phi * \mu)(x) = \int_G \Delta(y^{-1}) f(xy^{-1})\ d\mu(y).$$

به علاوه، برای $f \in C(G)$، محمل f را با $\mathrm{supp}(f)$ نشان می‌دهیم. همچنین، برای هر تابع مختلط- مقدار f روی G و برای هر $x, y \in G$ قرار می‌دهیم

$$(R_y f)(x) = f(xy), \qquad (L_y f)(x) = f(y^{-1}x).$$

برای C^*- جبر B، مجموعه‌ی تمام تابعک‌های مثبت روی B را با $P(B^*)$ و مجموعه‌ی عناصر مثبت B را با B^+ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که $L^\infty_\circ(G)$ همراه با عملهای نقطه‌ای، نرم $\|.\|_\infty$ و مزدوج مختلط به عنوان برگشت، یک C^*- جبر جابه‌جایی است. به علاوه، $g \in L^\infty_\circ(G)^+$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\phi \in P(L^۱(G))$ داشته باشیم $\langle g,\phi\rangle \geq ۰$، که در آن

$$P(L^۱(G)) := P(L^\infty_\circ(G)^*) \cap L^۱(G).$$

فرض کنیم $\mathcal{P} : L^\infty_\circ(G)^* \to M(G)$ نگاشت طبیعی تحدید از $L^\infty_\circ(G)$ به روی $C_\circ(G)$ را نشان دهد. بوضوح $\mathcal{P}$ یک همریختی است. به علاوه، می‌توان ثابت کرد که به ازای هر $u \in \Lambda_\circ(G)$، نگاشت $\mathcal{P}$ یک یکریختی طولپا از $u \diamond L^\infty_\circ(G)^*$ به روی $M(G)$ است؛ قضیه‌ی ۱۱.۲ از مرجع [۳۰] را ببینید.

۲—۱۱ گزاره . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $m \in P(L^\infty_\circ(G)^*)$. در این صورت*

$$\|m\| = \|\mathcal{P}(m)\|.$$

بنابراین

$$P(L^\infty_\circ(G)^*) \cap \ker(\mathcal{P}) = \{۰\}.$$

اثبات. لم ۵.۲ از مرجع [۳۰] را ببینید. □

برای هر $m \in L^\infty_\circ(G)^*$ و $\mu \in M(G)$، تابعک $m \diamond \mu$ را می‌توان به طور طبیعی و با روشی مشابه ضرب آرنز روی $L^\infty_\circ(G)$ تعریف نمود. در واقع، اگر $g \in L^\infty_\circ(G)$ و $\phi \in L^۱(G)$، آن‌گاه به سادگی دیده می‌شود که

$$g\phi = \frac{۱}{\Delta}\widetilde{\phi} * g \in C_\circ(G).$$

که در آن $\widetilde{\phi}$ برای هر $x \in G$ با دستور $\widetilde{\phi}(x) = \phi(x^{-۱})$ تعریف می‌شود؛ مرجع [۴۸] را ببینید. بنابراین به ازای هر $\mu \in M(G)$ و $g \in L^\infty_\circ(G)$، می‌توان تابعک μg را در $L^\infty_\circ(G)^*$ به ازای هر $\phi \in L^۱(G)$ با دستور زیر تعریف نمود

$$\langle \mu g, \phi\rangle = \langle \mu, g\phi\rangle.$$

دراین صورت $\mu g \in L_\circ^\infty(G)$؛ زیرا اگر n یک توسیع μ از $C_\circ(G)$ به $L_\circ^\infty(G)$ باشد، آن‌گاه $\mu g = ng$. پس می‌توان تابعک $m \diamond \mu \in L_\circ^\infty(G)^*$ را به ازای هر $g \in L_\circ^\infty(G)$ با دستور زیر تعریف نمود

$$\langle m \diamond \mu, g\rangle = \langle m, \mu g\rangle.$$

۲—۱۲ لم . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $m, n \in L_\circ^\infty(G)^*$. در این صورت*

$$m \diamond n = m \diamond \mathcal{P}(n).$$

اثبات. برای هر $g \in L_\circ^\infty(G)$ و $\phi \in L^1(G)$ داریم $g\phi \in C_\circ(G)$ و لذا

$$\begin{aligned}\langle ng, \phi\rangle &= \langle n, g\phi\rangle \\ &= \langle \mathcal{P}(n), g\phi\rangle \\ &= \langle \mathcal{P}(n)g, \phi\rangle;\end{aligned}$$

یعنی $ng = \mathcal{P}(n)g$ و از آن جا داریم

$$\begin{aligned}\langle m \diamond n, g\rangle &= \langle m, ng\rangle \\ &= \langle m, \mathcal{P}(n)g\rangle \\ &= \langle m \diamond \mathcal{P}(n), g\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین $m \diamond n = m \diamond \mathcal{P}(n)$. □

در ادامه به دفعات از گزاره‌ی زیر استفاده خواهیم کرد.

۲—۱۳ گزاره . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $\mu \in M(G)$. اگر $\mu * L^1(G) = \{0\}$ یا $L^1(G) * \mu = \{0\}$، آن‌گاه $\mu = 0$.*

اثبات. قضیه‌ی ۱۱.۲۲ از مرجع [۱۹] را ببینید. □

۲–۱۴ قضیه . *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $u \in L_{\circ}^{\infty}(G)^*$. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند.*

(الف) $u \in \Lambda_{\circ}(G)$.

(ب) $\|u\| = ۱$ و $\mathcal{P}(u) = \delta_e$.

(ج) $\|u\| = ۱$ و u *همانی راست* $L_{\circ}^{\infty}(G)^*$ *است.*

(د) $u \in P(L_{\circ}^{\infty}(G)^*)$ *و همانی تقریبی با کران یک* (e_γ) *از* $L^۱(G)$ *وجود دارد به طوری که در توپولوژی ضعیف* * *از فضای* $L_{\circ}^{\infty}(G)^*$ *داریم* $e_\gamma \to u$.

اثبات. (الف)⇐(ب). فرض کنیم $u \in \Lambda_{\circ}(G)$. برای هر $\mu \in M(G)$، نشان می‌دهیم $\mu * \mathcal{P}(u) = \mu$. چون $\mathcal{P}(L_{\circ}^{\infty}(G)^*) = M(G)$، عنصر $n \in L_{\circ}^{\infty}(G)^*$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{P}(n) = \mu$. حال اگر $\phi \in L^۱(G)$، آن‌گاه از آن جایی که $L^۱(G)$ یک ایدآل در $L_{\circ}^{\infty}(G)^*$ است و $\mathcal{P}$ روی $L^۱(G)$ همانی است داریم

$$\begin{aligned}
\phi * (\mu * \mathcal{P}(u)) &= (\phi * \mu) * \mathcal{P}(u) \\
&= (\phi * \mathcal{P}(n)) * \mathcal{P}(u) \\
&= \mathcal{P}(\phi \diamond n) * \mathcal{P}(u) \\
&= \mathcal{P}((\phi \diamond n) \diamond u) \\
&= \mathcal{P}(\phi \diamond n) \\
&= \mathcal{P}(\phi) * \mathcal{P}(n) \\
&= \phi * \mu
\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $\phi \in L^۱(G)$ داریم $\phi * \mu * \mathcal{P}(u) = \phi * \mu$. پس بنابر گزاره‌ی ۲–۱۳ داریم $\mu * \mathcal{P}(u) = \mu$؛ یعنی $\mathcal{P}(u)$ یک همانی راست برای $M(G)$ است که از آن جا داریم $\mathcal{P}(u) = \delta_e$.

(ب)⇐(ج). فرض کنیم $n \in L_{\circ}^{\infty}(G)^*$. ابتدا توجه کنیم که به ازای هر $f \in L_{\circ}^{\infty}(G)$ داریم $\delta_e f = R_e f$؛ زیرا به ازای هر $\phi \in L^۱(G)$،

$$\begin{aligned}
\langle \delta_e f, \phi \rangle &= \langle \delta_e, f\phi \rangle \\
&= (\frac{۱}{\Delta}\widetilde{\phi} * f)(e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_G \frac{1}{\Delta(x)}\widetilde{\phi}(x)f(x^{-1}e)\; d\lambda(x) \\ &= \int_G \phi(x)f(x)\; d\lambda(x) \\ &= \langle R_e f, \phi\rangle. \end{aligned}$$

از این رو

$$\langle n\diamond\delta_e, f\rangle = \langle n, \delta_e f\rangle = \langle n, R_e f\rangle = \langle n, f\rangle.$$

در نتیجه

$$n\diamond u = n\diamond \mathcal{P}(u) = n\diamond\delta_e = n.$$

(ج)⇐(د). فرض کنیم $\|u\| = 1$ و u یک همانی راست $L_\circ^\infty(G)^*$ باشد. در این صورت برای هر $\phi\in L^1(G)$ داریم $u\diamond\phi = \phi$؛ زیرا برای هر $\psi\in L^1(G)$ داریم

$$\psi\diamond(u\diamond\phi) = (\psi\diamond u)\diamond\phi = \psi\diamond\phi$$

و لذا $\psi * (u\diamond\phi) = \psi*\phi$. بنابر قضیه‌ی هان—باناخ، u دارای توسیعی مثل $\widetilde{u}$ به $L^\infty(G)$ است به طوری که $\|\widetilde{u}\| = 1$. اما به ازای هر $f\in C_\circ(G)$ داریم

$$\langle\widetilde{u}, f\rangle = \langle u, f\rangle = f(e).$$

حال بنابر گزاره‌ی ۱.۲ از [۱۰]، $\widetilde{u}\geq 0$ و یک همانی تقریبی کراندار به یک از $L^1(G)$ مانند (e_γ) وجود دارد که به طور ضعیف* در $L^\infty(G)^*$ به $\widetilde{u}$ همگراست. چون $L_\circ^\infty(G)\subseteq L^\infty(G)$، در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم $e_\gamma\to u$. همچنین چون $\widetilde{u}\geq 0$ داریم $u\geq 0$.

(د)⇐(الف). فرض کنیم همانی تقریبی با کران یک (e_γ) از $L^1(G)$ وجود داشته باشد به طوری که در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ به u همگرا باشد. بنابر خاصیت پیوستگی ضرب آرنز در توپولوژی ضعیف* داریم

$$e_\gamma\diamond\phi\to u\diamond\phi.$$

اما در توپولوژی حاصل از نرم داریم $e_\gamma\diamond\phi = e_\gamma*\phi\to\phi$. پس $u\diamond\phi=\phi$. حال چون $\phi\in L^1(G)$ در توپولوژی ضعیف* از فضای $L_\circ^\infty(G)^*$ داریم $\phi\diamond e_\gamma\to\phi\diamond u$. از طرفی دیگر

$$\phi\diamond e_\gamma = \phi * e_\gamma\to\phi.$$