بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم جائیه کشاورزیان** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۰۸ تحت عنوان: «**تمامیت در منطق پیوسته**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مسعود پورمهدیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار /جناب آقای دکترسید محمد باقری، مشاوره سرکار /جناب آقای دکتر - و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر - از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب جاثیه کشاورزیان دانشجوی رشته ریاضی(منطق ریاضی) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: جاثیه کشاورزیان

تاریخ و امضا:

۹۱/۲/۱۰

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب جاثیه کشاورزیان دانشجوی رشته ریاضی محض(منطق ریاضی) ورودی ۸۸سال تحصیلی۹۱-۹۰ مقطع کارشناسی ارشد ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:...........

تاریخ:۹۱/۲/۱۰

دانشگاه تربیت مدرّس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره ی کارشناسی ارشد ریاضی محض(منطق)

تمامیت در منطق پیوسته

دانشجو:

جاثیه کشاورزیان

استاد راهنما:

دکتر سید محمد باقری

دی ۱۳۹۰

تقدیم به

پیشگاه مقدس امام زمان

قدردانی

با سپاس بی کران به در گاه ایزد یکتا که بی لطف منتهایش، بنده را یاری برداشتن هیچ گامی نیست.

بیش از همه لازم می دانم از استاد راهنمای گرامی، جناب آقای دکتر سید محمد باقری که راهنمایی و سرپرستی این پایان نامه را بر عهده ایشان بوده است، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. استاد بزرگواری که، انجام و به ثمر رسیدن این پایان نامه مرهون راهنمایی، همفکری، دلسوزی، تلاش مستمرو بی وقفه و پیگیری های ایشان بوده است.

همچنین از اساتید ارجمند هیات داوران جناب آقای دکتر مسعود پور مهدیان، دکتر سید احمد موسوی و دکتر عباس حیدری به خاطر مطالعه پایان نامه و نیز قبول زحمت جهت شرکت در جلسه ی دفاعیه، تقدیر و تشکر می کنم.

چکیده

منطق پیوسته گسترشی از منطق مرتبه ی اول می باشد که برای مطالعه ی ساختارهای جبری مجهز به یک متریک طراحی شده است. منطق پیوسته بر مبنای فضای متریک، از نظر صورت بندی شباهت بسیار با منطق مرتبه اول دارد.

هدف از این پایان نامه بررسی قضیه ی تمامیت در این منطق می باشد. صورت مرتبه اول این قضیه بیان می کند که جمله ای برهان پذیر است اگروتنها اگر خرسندپذیر باشد. صورت منطق پیوسته این قضیه تفاوت هایی با صورت مرتبه اول آن داردکه در این پایان نامه مورد بحث قرار خواهد گرفت. درادامه به بعضی از قضایای دیگر از جمله در ارتباط با محاسبه پذیری خواهیم پرداخت.

همچنین واژه های کلیدی در این پایان نامه عبارتند از: پیمانه پیوستگی یکنواخت، پیوستگی یکنواخت، ، استنتاج صوری، درجه ی درستی و منطق گزاره ای پیوسته .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف وپیش نیازها

در این فصل به معرفی منطق، منطق گزاره ای، منطق مرتبه اول ومنطق گزاره ای Lukasiewicz می پردازیم. مطالب این فصل ازچهار مرجع[۲]،[۳]،[۵] و [۷] می باشد.

۱.۱تعریف منطق

منطق ریاضی، مدل سازی ریاضی برای تفکر است.

این تعریف با تعریف قدما و هم با تعریف متأخرین از علم منطق اساساً متفاوت است. قدما منطق را یک آلت تصحیح فکر می دانند به همین دلیل، منطق یک علم آلی بود و لذا از شرافت ذاتی برخوردار نبود. اما متأخرین، منطق را علم استدلال و منطق ریاضی را علم استدلال ریاضی می دانند .

۲.۱منطق گزاره ای

گزاره های اتمی، کوچکترین واحدهای خبری اند که ممکن است راست باشند یا غلط.

تعریف۱.۲.۱. زبان منطق گزاره ها عبارتند از:

۱) الفبای زبان یا نماد های گزاره ایp_1,p_0,... . مجموعه الفبای زبان را با P نمایش می دهیم.

۲) هابندهای منطقی ¬، ⊥ ، → ، ∨ ، ∧

۳) نمادهای کمکی «(» و«) »

در زبان منطق گزاره ها تعداد نماد های گزاره ای را شمارا در نظر می گیریم. به نمادهای گزاره ای، نمادهای اتمی یا متغیرهای گزاره ای هم می گوییم.

$\perp$ را هم می توان گزاره ای اتمی فرض کرد و هم هابند منطقی. در صورتی آنرا هابند منطقی فرض کنیم که $\perp$ ، یک هابند صفر موضعی باشد در حالیکه $\wedge$،$\vee$،$\rightarrow$ هابند دو موضعی و $\neg$ یک هابند یک موضعی می باشند. در اینجا از این نماد به عنوان گزاره ی اتمی استفاده می کنیم.

تعریف۱.۲.۲. مجموعه ی عبارات، شامل همه ی دنباله های متناهی از نمادهای گزاره های اتمی، هابندهای منطقی و نمادهای کمکی است و با نماد EXP نمایش می دهیم.

مجموعه ی گزاره ها را با نماد PR نمایش می دهیم که کوچکترین مجموعه $PR \subseteq EXP$ به قسمی که:

۱) $\perp \in \mathrm{PR}$ و به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $p_i \in PR$.

۲) اگر $A, B \in PR$ ، آنگاه $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in PR$.

۳) اگر $A \in PR$ آنگاه $(\neg A) \in PR$.

اگر بتوان همه ی هابندها را با استفاده از مجموعه ی خاصی از هابندها تعریف کرد، این مجموعه را« به طور تابعی کامل» می گوییم.

در این منطق مجموعه ی به طور کامل، مجموعه های $\{\perp, \neg\}$ ،$\{\neg , \rightarrow\}$ ،$\{\neg, \wedge\}$ و $\{\neg, \vee\}$ می

باشند. اما هابندی هست که به تنهایی کامل می باشد. این هابند که به وسیله ی شفر ابداع شد و به هابند شفر مشهور است معمولاً با نماد «|»نمایش داده می شود و نمادی دوتایی است. یعنی $A|B$ «نه هم A و نه هم B». اگر بخواهیم از هابند خودمان استفاده کنیم، $\mathrm{A|B}$ همان $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$ است.

تعریف ۳.۲.۱. بنداشت های موضوعه و قواعد منطق گزاره ها در دستگاه هیلبرت(HP):

الف) بنداشت های موضوعه:

۱) $A \to (B \to A)$

۲) $(A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

۳) $A \to (B \to A \wedge B)$

۴) $A \wedge B \to A$

۵) $A \wedge B \to B$

۶) $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B)$

۷) $A \to A \vee B$

۸) $B \to A \vee B$

۹) $\neg\neg A \to A$

ب) قاعده استنتاج:

$$\frac{\mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \to \mathrm{B}}{B}\ MP$$

به گزاره بالای کسر، مقدمه های استنتاج گویند و به گزاره های زیر خط، نتیجه گویند.

حال برهان را در منطق گزاره ای بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۴.۲.۱. برای مجموعه ای مثل Γ از گزاره ها وگزاره ای مثل A، برهان (استنتاج) برای A از Γ، دنباله ای مثل $A_1, \dots, A_n$ از گزاره هاست که $A_n = A$ و برای هر i، $i \leq n$ داشته باشیم:

اگر یک برهان برای A از Γ موجود باشد، گویند A از Γ قابل استنتاج است و می نویسند $\Gamma \vdash_{HP} A$.

اگر $\Gamma = \emptyset$ ،گوییم A یک قضیه (در منطق گزاره ها) است و می نویسیم $\vdash_{HP} A$.

مثال ۵.۲.۱. $((p_8 \to p_0) \wedge \perp$ یک گزاره است در صورتی که $\neg \to\perp \vee p_2$ گزاره نیست.

منظورمان از منطق ریاضی، منطق ریاضی کلاسیک است. یکی از معانی «کلاسیک» این است که هر گزاره ای یا درست است ویا غلط. به عبارت دیگر منطق کلاسیک به منطقی اطلاق می شود که دو ارزشی است.

تعریف ۶.۲.۱. یک تعبیر برای منطق گزاره ها، تابعی مانند $I: PR \to \{0.1\}$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $I(A \wedge B) = 1$ اگر وفقط اگر $I(B) = 1$ و $I(A) = 1$.

۲) $I(A \vee B) = 0$ اگر وفقط اگر $I(A) = 0$ و $I(B) = 0$.

۳) $I(A \to B) = 0$ اگر وفقط اگر $I(A) = 1$ و $I(B) = 0$.

۴) $I(\neg A) = 1$ اگر وفقط اگر $I(A) = 0$.

۵) $I(\perp) = 0$.

برای گزاره ی A و تعبیر I ، اگر $I(A) = ۱$ می گوییم گزاره A با تعبیر I راست یا یک مدل A است. ومی نویسیم $I \vDash A$ و اگر $I(A) = 0$ ، می گوییم گزاره ی A با تعبیر I ناراست(غلط) است و می نویسند $I \nvDash A$.

همچنین اگر Γ مجموعه ای از گزاره ها باشد، $I \vDash \Gamma$ یعنی برای هر $B \in \Gamma$ ، $I \vDash B$.

از طرفی برای مجموعه ی Γ از گزاره هاوگزاره ای مثل A ، می گوییم که A نتیجه ی معناشناسانه یا نتیجه ی منطقی Γ است اگر برای هر تعبیر مثل I ، اگر $I \vDash \Gamma$ آنگاه $I \vDash A$ در اینصورت می نویسیم $\Gamma \vDash A$.

اگر Γ تهی باشد گزاره ی A را همان گو(همیشه راست)گوییم؛ یعنی برای تعبیر مثل I ، $I \vDash A$. در اینصورت می نویسیم $\vDash A$.

قضیه ۱.۲.۷.[قضیه ی استنتاج] فرض کنید که $\Gamma \cup \{A, B\}$ مجموعه ای از گزاره ها باشد.آنگاه $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{HP} B$ اگر وفقط اگر $\Gamma \vdash_{HP} A \to B$.

تعریف ۱.۲.۸. مجموعه ای مثل Γ از گزاره ها را سازگار گویند هرگاه $\Gamma \nvdash \bot$. در غیر اینصورت آنرا ناسازگارگویند.

با توجه به تعریف می توان نتیجه گرفت که منطق گزاره ها سازگار است.

قضیه ۱.۲.۹.[قضیه ی تمامیت] برای هر مجموعه از گزاره ها مثل $\Gamma \cup \{A\}$ اگر $\Gamma \vDash A$ آنگاه $\Gamma \vdash A$.

تمامیت معادل «لم وجود مدل» است یعنی قضیه تمامیت معادل این است که هر زیر مجموعه ی سازگار از گزاره ها مدل دارد.

حال به یکی از صورت های قضیه تمامیت که کاربردهای زیادی دارد می پردازیم:

قضیه ۱.۲.۱۰.[قضیه ی فشردگی]Γ مدل دارد اگرو فقط اگر هر زیر مجموعه ی متناهی آن مدل داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۱. مجموعه (سازگار) Γ از گزاره ها را کامل گویند، اگر برای هر گزاره مثل A ، $\Gamma \vdash A$ یا $\Gamma \vdash \neg A$.

با این تعریف منطق گزاره ها کامل نیست: مثلاً $\nvdash p_0$ و $\nvdash \neg p_0$.

۳.۱ منطق مرتبه ی اول

تعریف۱.۳.۱. الفبای زبان مرتبه اول شامل نمادهای زیر است:

۱) نماد رابطه ای یا نماد محمولی: برای هر عدد طبیعی n_i، مجموعه ای از نماد های رابطه ای یا محمولی n_i موضعی مثل ${p_0}^{n_0}$،${p_1}^{n_1}$،${p_2}^{n_2}$،... .

۲) نمادهای تابعی: برای هر عدد طبیعی n_i ، $n_i \geq 1$ ، مجموعه ای از نمادهای تابعی n موضعی مثل ${F_0}^{n_0}$، ${F_1}^{n_1}$ ، ${F_2}^{n_2}$،... .

۳) نمادهای ثابت: به ازای مجموعه ی I، نمادهای $\overline{c}_i$، $i \in I$.

۴) متغیرهای فردی: دنباله ی نامتناهی و شمارای x_0، x_1، ... .

۵) هابندها و چنداگرها: $\exists$،$\forall$، $\perp$ ،$\neg$، $\rightarrow$ ، $\wedge$ ، $\vee$.

۶) نمادهای کمکی (و).

زبان تعریف شده ی فوق را زبان سره ی مرتبه اول گویند. اگر به الفبای بالا، نمادرابطه ای دو موضعی همانی یا تساوی اضافه شود، به آن الفبای زبان مرتبه اول گویند.

ضمناً رابطه یا نماد صفر موضعی، درست مثل اتم در منطق گزاره هاست به همین دلیل می توان منطق گزاره ها را بخشی از منطق مرتبه اول دانست.

تعریف۲.۳.۱. ساختار دنباله ای مرتب مثل:

$$\mathfrak{M} = (M, \{{R_i}^{n_i} : i \in I_R\}, \{{F_j}^{n_j} : j \in I_F, n_j \geq 1\}, \{c_i : i \in I\})$$

است که M مجموعه ی ناتهی به نام جهان ساختار $\mathfrak{M}$ است، $\{{R_i}^{n_i} : i \in I_R\}$ مجموعه ای از رابطه ها روی M است که n_i ، تعداد موضع های رابطه ی ${R_i}^{n_i}$ است، $\{{F_j}^{n_j} : j \in I_F\}$ مجموعه

ای از تابع ها روی M است که n_j ، تعدادموضع های تابع ${F_j}^{n_j}$ است و $\{c_i : i \in I\}$ مجموعه ای از ثابت هاست که $\{c_i : i \in I_R\} \subseteq M$.

هر یک از مجموعه های $\{{R_i}^{n_i} : i \in I_R\}$ و $\{{F_j}^{n_j} : j \in I_F, n_j \geq 1\}$ میتواند تهی یا متناهی عضو داشته باشند و یا حتی اندازه ی آنها، بزگتر از $\aleph_0$ باشد.

اکنون به تعریف عبارات، ترم و فرمول در منطق مرتبه اول می پردازیم:

تعریف ۱.۳.۳.

(i) مجموعه ی عبارات، با نماد EXP ، مجموعه ی همه ی دنباله های متناهی از نمادهای الفبای زبان است. به طور مثال $x_3 \forall p^2(\overline{c_i}$ یک عبارت است.

(ii) مجموعه ترم ها با نماد TER ،کوچکترین مجموعه ای است که دارای خاصیت زیر می باشد:

۱)برای هر i در I ، $\overline{c_i} \in TER$ وبرای هر عدد طبیعی مثل n ، $x_n \in TER$.

۲)اگر $t_1, \dots, t_n \in TER$ و ${f_i}^n$ نماد تابعی باشد در این صورت ${f_i}^n(t_1, \dots, t_n)$ در TER است.

(iii) مجموعه ی فرمول ها ، با نماد FRM ،کوچکترین زیر مجموعه ی EXP است که دارای خاصیت زیرمی باشد:

۱) $\perp \in$ FRM . اگر n=0 آنگاه برای هر i که ${R_i}^0$ در زبان باشد، ${R_i}^0 \in FRM$. اگر n≥1 و $t_1, \dots, t_n \in TER$ در اینصورت برای هر i که ${R_i}^n$ در زبان باشد، ${R_i}^n(t_1, \dots, t_n) \in TER$. اگر $t_1, t_2 \in TER$ آنگاه $t_1 \approx t_2 \in FRM$.

۲) اگر $A, B \in FRM$ و $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ آنگاه $(A \circ B) \in FRM$.

۳) اگر $A \in FRM$ ، آنگاه $(\neg A) \in FRM$.

۴)اگر $A \in FRM$ آنگاه برای هر عدد طبیعی i ، $(\forall x_i A) \in FRM$ و $(\exists x_i A) \in FRM$.

مجموعه فرمول هایی که در بند (۱) تعریف شده است را مجموعه فرمول های اتمی در زبان $\mathcal{L}$ می گویند با توجه به اینکه محمول های صفر موضعی در این مجموعه قرار دارند، این مجموعه شامل گزاره های اتمی منطق گزاره ها هم هست.

مثال۱.۳.۴. فرض کنیدکه $\mathcal{L} = \{\leq, s, +, 0\}$ که $\leq$ نماد محمولی دو موضعی و s نماد تابعی یک موضعی و$+$ نماد تابعی دو موضعی و0 نماد ثابت است.چند فرمول در این زبان:

$$\exists x_2\big(x_2 \leq s(x_2)\big) \quad \text{و} \quad s(x_4) \leq 0 \quad \text{و} \quad \ldots.$$

تعریف۱.۳.۵. فرمولی مثل A را یک جمله گویند هرگاه متغیر آزاد نداشته باشد.

تعریف۱.۳.۶. تعبیر برای الفبای زبان $\mathcal{L}$ در$\mathfrak{M}$ ، تابعی مثل

$$I : \mathcal{L} \to \{R_j{}^i : i,j \in \mathbb{N}\} \cup \{F_j{}^i : i,j \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \cup \{c_i : i \in I\})$$

است که :

$$I\big(p_j{}^i\big) = R_j{}^i \qquad , \qquad i,j \in \mathbb{N}$$

$$I\big(f_j{}^i\big) = F_j{}^i \qquad , \qquad i,j \in \mathbb{N} \qquad , \qquad i \geq 1$$

$$I(\overline{c_i}) = c_i \qquad , \qquad i \in \mathbb{N}$$

اگرتعبیرI مشخص باشد به جای $I(p_j{}^i)$ از نماد$(p_j{}^i)^{\mathfrak{M}}$ استفاده می کنیم. همچنین برای $I(f_j{}^i)$ و $I(\overline{c_i})$ ،نیز از نماد های $\left(f_j{}^i\right)^{\mathfrak{M}}$ و$(\overline{c_i})^{\mathfrak{M}}$ استفاده می کنیم.

همچنین گوییم جمله A در زبان $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ ، به تعبیرI، در ساختار$\mathfrak{M}$ راست است، با نماد $\mathfrak{M} \vDash_I A$، اگر وفقط اگر

۱)

الف) به ازای هر$i \in \mathbb{N}$، $\mathfrak{M} \vDash_I p_i{}^0$ اگروفقط اگر$I(p_i{}^0) = 1$.

ب) به ازای هر $i,j \in \mathbb{N}$ ، $i \geq 1$ ، $\mathfrak{M} \vDash_I {p_j}^i(t_1, \dots, t_n)$ اگروفقط اگر $(t_1^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}})$ در $({p_j}^i)^{\mathfrak{M}}$ باشد.

ج) $\mathfrak{M} \vDash_I t_1 \approx t_2$ اگروفقط اگر $t_1^{\mathfrak{M}} = t_2^{\mathfrak{M}}$.

۲)

الف) $\mathfrak{M} \vDash_I B \wedge C$ اگروفقط اگر $\mathfrak{M} \vDash_I [B]^{\mathfrak{M}}$ و $\mathfrak{M} \vDash_I [C]^{\mathfrak{M}}$.

ب) $\mathfrak{M} \vDash_I B \vee C$ اگروفقط اگر $\mathfrak{M} \vDash_I [B]^{\mathfrak{M}}$ یا $\mathfrak{M} \vDash_I [C]^{\mathfrak{M}}$.

ج) $\mathfrak{M} \vDash_I B \to C$ اگروفقط اگرچنین نباشدکه $\mathfrak{M} \vDash_I [B]^{\mathfrak{M}}$ یا $\mathfrak{M} \vDash_I [C]^{\mathfrak{M}}$.

د) $\mathfrak{M} \vDash_I \neg B$ اگر وفقط اگرچنین نباشدکه $\mathfrak{M} \vDash_I [B]^{\mathfrak{M}}$.

۳)

الف) $\mathfrak{M} \vDash_I \forall x B$ اگروفقط اگر برای هر a در M ، $\mathfrak{M} \vDash_I (B[x|\bar{a}])^{\mathfrak{M}}$.

ب) $\mathfrak{M} \vDash_I \exists x B$ اگروفقط اگر a در M موجود باشدکه $\mathfrak{M} \vDash_I (B[x|\bar{a}])^{\mathfrak{M}}$.

اگر تعبیر I مشخص باشد به جای $\mathfrak{M} \vDash_I \mathrm{A}$ مینویسیم $\mathfrak{M} \vDash A$ ومی گوییم $\mathfrak{M}$ مدل A است. و اگر A در $\mathfrak{M}$ راست نباشد می نویسیم $\mathfrak{M} \nvDash A$.

تعریف ۱.۳.۷. فرض کنید که $\Gamma \cup \{A\}$ مجموعه ای از جمله ها در زبان $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ باشد:

۱) $\mathfrak{M} \vDash_I A$ اگروفقط اگر برای هرتعبیر I ، $\mathfrak{M} \vDash_I \mathrm{A}$.

۲) $\vDash A$ یا A راست است، اگروفقط اگر برای هر $\mathcal{L}$-ساختار $\mathfrak{M}$ ، $\mathfrak{M} \vDash A$.

۳) $\Gamma \vDash A$ اگروفقط اگر برای هر $\mathcal{L}$-ساختار $\mathfrak{M}$ ، اگر برای هر B در Γ ، $\mathfrak{M} \vDash_I B$ ، آنگاه $\mathfrak{M} \vDash A$.

۴) جمله A ارضاشدنی است اگروفقط اگر $\mathcal{L}$-ساختار $\mathfrak{M}$ موجود باشد که $\mathfrak{M} \vDash A$.

۵) فرمول B با متغیر های آزاد $x_1, \dots, x_n$ ارضاشدنی است اگروفقط اگر $\mathcal{L}$-ساختار $\mathfrak{M}$ موجود باشد که $\mathfrak{M} \vDash_I \exists x_1, \dots, x_n B$.

۸.۳.۱. بنداشت ها و قواعد منطق مرتبه اول در دستگاه هیلبرت(HQ)

الف)بنداشت های موضوعه :

۱-۹) بنداشت منطق گزاره ها

۱۰) $\forall x\, A(x) \to A[x|t]$

۱۱) $\forall x\big(A \to B(x)\big) \to \big(A \to \forall x B(x)\big)$ (x در A آزاد نیست)

۱۲) $A[x|t] \to \exists x A(x)$

۱۳) $\forall x(A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)$ (x در B آزاد نیست)

ب) قواعد استنتاج:

۱) قاعده استنتاج در منطق گزاره ها

۲)قاعده ی تعمیم:

$$(\mathrm{G})\ \frac{\mathrm{A}}{\forall x A(x)}$$

ضمناً در به کار بردن قاعده ی تعمیم باید به این مطلب توجه کرد که متغیر در فرمول هایی که برای اثبات A استفاده شده اندآزاد نباشند.

قضیه ۹.۳.۱.[استنتاج] فرض کنید که $\Gamma \cup \{A, B\}$ مجموعه ای از فرمول ها باشد، آنگاه :

$$\Gamma \vdash_{HQ} \mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash_{HQ} \mathrm{B}$$

قضیه ۱۰.۳.۱ .[تمامیت] اگر Γ مجموعه ای سازگار از جمله ها در زبان $\mathcal{L}$ باشد آنگاه Γ مدل دارد.

یکی از مهمترین نتایج قضیه ی تمامیت، قضیه ی فشردگی است:

قضیه ۱۱.۳.۱.[فشردگی] مجموعه Γ از جمله ها در زبان $\mathcal{L}$ مدل دارد اگر وفقط اگر هر زیر مجموعه متناهی از Γ مدل داشته باشد .

تبصره۱۲.۳.۱. تعریف برهان در HQ مانند تعریف در HP است و نماد $\Gamma \vdash_{HQ} \mathrm{A}$ یعنی فرمول A از مجموعه ی Γ از فرمول ها (در HQ)استنتاج می شود.

۴.۱. منطق گزاره ای Lukasiewicz

قبل از اینکه به تعریف منطق گزاره ای Lukasiewicz بپردازیم، عمل دو موضعی $\dot{-}$ را تعریف می کنیم:

تعریف۱.۴.۱. عمل دو موضعی $\dot{-}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{-} : R^{\geq 0} \times R^{\geq 0} \to R^{\geq 0}$$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & x \geq y \\ 0 & else \end{cases}$$

چند اتحاد در مورد $\dot{-}$:

۱) $x \dot{-} y = (x+z) \dot{-} (y+z)$

۲) $(x \dot{-} y) \dot{-} z = x \dot{-} (y+z)$

۳) $min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

۴) $max(x,y) = 1 \dot{-} (min(1 \dot{-} x, 1 \dot{-} y))$