بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

φ- میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

تدوین

هدایت فتحی

استادان راهنما

دکتر علیرضا مدقالچی

دکتر جواد لالی

دی ۱۳۸۸

تعالی
بسمه

دانشکده علوم ریاضی
و
کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای هدایت فتحی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

ϕ-میانگین پذیری جبرهای باناخ

در روز چهارشنبه مورخ ۸۸/۱۰/۹ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۹/- (نوزده تمام) می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیرقابل قبول ☐

استادان راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علیرضا مدقالچی	دکتر علیرضا حسینیون	دکتر غلامرضا زباندان
دکتر جواد لالی		

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی
و کامپیوتر

تقدیم به

پدر ومادرم

وظیفهٔ شاگردی خود می‌دانم تا مراتب سپاس و قدردانی خود را به محضر استادان راهنما، دکتر علیرضا مدقالچی، که با وجود مشغلهٔ فراوان با سعهٔ صدر پایان‌نامه را مطالعه نموده از ایرادات آن کاستند و دکتر جواد لآلی، که بیشتر زحمات این پایان‌نامه بر دوش ایشان بوده است، تقدیم دارم.

از استادان بزرگوار دکتر علیرضا حسینیون و دکتر غلامرضا زباندان که داوری پایان‌نامه را پذیرفتند، صمیمانه سپاس‌گزارم.

همچنین از دوستان عزیزم حمید صادقی و علی انصاری به خاطر همکاری‌شان متشکرم.

چکیده

در این پایان‌نامه، برای تعمیم میانگین‌پذیری چپ F—جبرها، مفهوم φ—میانگین‌پذیری را برای جبر باناخ A معرفی می‌کنیم که در آن φ یک هم ریختی از A به $\mathbb{C}$ است. جبر باناخ A را φ—میانگین‌پذیر گوییم در صورتی که $m \in A^{**}$ وجود داشته باشد که $\langle m, \varphi \rangle = ۱$ و به ازای هر $f \in A^*$ و $a \in A$، $\langle m, f.a \rangle = \varphi(a)\langle m, f \rangle$.

φ—میانگین‌پذیری را از جهات مختلف بررسی کرده و چند شرط لازم و کافی برای آن بدست می‌آوریم، که مهم‌ترین آن، وجود تور کراندار (u_α) در A است، به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\|au_\alpha - \varphi(a)u_\alpha\| \longrightarrow ۰$ و به ازای هر α، $\varphi(u_\alpha) = ۱$.

φ—میانگین‌های با نرم ۱ را به طور خاص مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چنین φ—میانگینی خاصیتی نقطه‌ای است. همچنین، نشان می‌دهیم که اگر A جبر باناخ تفکیک‌پذیر و ضعیف دنباله‌ای کامل باشد، که خود A شامل φ—میانگین نیست، آنگاه A دقیقاً ۲^C، φ—میانگین خواهد داشت. برخی از خواص موروثی نیز بررسی شده است که مهم‌ترین آن انتقال φ—میانگین‌پذیری A, B به حاصل‌ضرب تانسوری تصویری $A\hat{\otimes}B$ و از $A\hat{\otimes}B$ به A, B است. چند مثال توصیفی، جبرهای لیپ‌شیتس روی فضای متری فشرده و جبرهای پیچشی $L^p(G)$ در حالتی که G فشرده است، نیز بررسی شده است. در نهایت چند قضیه راجع به φ—میانگین‌پذیری دوطرفه دوگان دوم یک جبر باناخ بیان شده است. که مهم‌ترین آن به صورت زیر است: فرض کنید A جبر باناخ جابه‌جایی باشد و $\tilde{\varphi} \in \Delta(A^{**})$. در این صورت، $(A^{**}, \Box)$ یک $\tilde{\varphi}$—میانگین دو طرفه دارد اگر و فقط اگر $(A^{**}, \Diamond)$، $\tilde{\varphi}$—میانگین دوطرفه داشته باشد.

واژه‌های کلیدی : جبر باناخ، کاراکتر، میانگین‌پذیر، φ—میانگین، ضعیف دنباله‌ای کامل، F—جبر.

رده‌بندی موضوعی ریاضی 2000: 43A07، 43A40 و 46H25.

فهرست مندرجات

مقدمه

میانگین‌پذیری جبرهای باناخ، نخستین بار توسط جانسون [1] در [۱۹] تعریف و مطالعه گردید. یکی از نتایج اساسی که توسط وی بیان و اثبات شد این بود که برای گروه موضعاً فشرده‌ی G، جبر گروهی $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر گروه G میانگین‌پذیر باشد. از آن زمان میانگین‌پذیری یکی از موضوعات اصلی در جبر باناخ و آنالیز همساز گردید.

ابتدا مفهوم میانگین‌پذیری کاراکتری را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم A یک جبر باناخ و φ یک کاراکتر روی A باشد. A را φ—میانگین‌پذیر گوییم هرگاه تابعک $m \in A^{**}$ موجود باشد که $m(\varphi) = 1$ و به ازای هر $f \in A^*, a \in A$، $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$. که در آن، $f.a \in A^*$ به صورت $\langle f.a, b\rangle = \langle f, ab\rangle (b \in A)$ تعریف شده است. در این صورت، m را یک φ—میانگین گوییم. φ—میانگین‌پذیری ضعیفتر از میانگین‌پذیری است؛ یعنی، هر جبر باناخ میانگین‌پذیر به ازای هر $\varphi \in \Delta(A)$، φ—میانگین‌پذیر است.

در مرجع [۲۶]، لائو [2] یک رده از جبرهای باناخ را معرفی کرده است که F—جبر نامیده‌می‌شود (ر.ک. تعریف ۱.۷۱.). مفهوم φ—میانگین‌پذیری، در واقع تعمیمی از میانگین‌پذیری چپ برای F—جبرهاست.

توجه می‌کنیم که در مقاله‌ی [۳۱] یک جبر باناخ، میانگین‌پذیر کاراکتری راست گفته می‌شود در صورتی که به ازای هر $\varphi \in \Delta(A)$، φ—میانگین‌پذیر بوده و همانی تقریبی راست کراندار داشته باشد. در همین مقاله ثابت شده است که جبر باناخ A، میانگین‌پذیر کاراکتری راست است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varphi \in \Delta(A) \bigcup \{0\}$، φ—میانگین‌پذیر باشد. یکی از نتایج جالب مقاله‌ی [۳۱] این است که برای گروه موضعاً فشرده‌ی G، $L^1(G)$ و $A(G)$ میانگین‌پذیر کاراکتری راست است اگر و فقط اگر G، میانگین‌پذیر

[1] Johnson

[2] Lau

باشد. در حالی که ما ثابت خواهیم کرد که $A(G)$ به ازای هر $\varphi \in \Delta(A)$، φ−میانگین‌پذیر است. در واقع، این اختلاف از وجود همانی تقریبی راست کراندار (یا معادلاً ۰−میانگین‌پذیری) به وجود می آید.

این پایان‌نامه، که بر اساس دو مقاله‌ی زیر نوشته شده است، در هفت فصل تنظیم گردیده و میانگین‌پذیری کاراکتری یک جبر باناخ را بررسی می‌کند و تقریباً تمام مطالب دو مقاله‌ی فوق (جز قضیه‌ی ۱.۴ در مقاله‌ی دوم که جهت حفظ انسجام مطالب حذف شده است.) را شامل می‌شود.

1) E. Kaniuth, A.T. Lau, J. Pym, On φ-amenability of Banach algebras, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 144 (2008), 85-96.

2) E. Kaniuth, A.T. Lau, J. Pym, On character amenability of Banach algebras, J. Math. Anal. Appl. 344(2008), 942-955.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی، برای استفاده در فصل‌های بعد، ذکر گردیده است. که شامل چهار بخش آنالیز تابعی، جبرهای باناخ و C^*−جبرها، آنالیز همساز و میانگین‌پذیری گروه‌ها و جبرهای باناخ است.

در فصل دوم، چند شرط معادل برای φ−میانگین پذیری بیان شده است:

۱)صفر شدن گروه کوهمولوژی $H^1(A, X^*)$ برای یک باناخ A−دومدول خاص X.

۲)وجود تور کراندار $(u_\alpha)_\alpha$ در A به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\|au_\alpha - \varphi(a)u_\alpha\| \longrightarrow 0$.

۳)بر اساس خاصیت توسیع هان−باناخ .

فصل سوم، ارتباط φ−میانگین‌پذیری با وجود همانی تقریبی کراندار را شامل می‌شود.

در فصل چهارم بر روی φ−میانگین‌های با نرم ۱ متمرکز می‌شویم و چند معیار برای وجود این نوع φ−میانگین‌ها بدست می آوریم.

فصل پنجم را با بیان ارتباط جبرهای باناخ ضعیف دنباله‌ای کامل و φ−میانگین‌پذیری آغاز می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر خود A شامل، φ−میانگین نباشد ولی A، φ−میانگین تقریبی دنباله‌ای کراندار داشته باشد، A حداقل $2^{\mathfrak{c}}$، φ−میانگین دارد و اگر A تفکیک‌پذیر باشد، دقیقاً $2^{\mathfrak{c}}$، φ−میانگین دارد. سپس، ارتباط آرنز منظم بودن A را با φ−میانگین‌پذیری بررسی می‌کنیم.

فصل ششم چند خاصیت موروثی را شامل می‌شود که مهمترین آن انتقال φ−میانگین‌پذیری جبرهای

باناخ B, A به حاصل‌ضرب تانسوری تصویری $A\widehat{\otimes}B$ و همچنین از $A\widehat{\otimes}B$ به B, A می‌باشد. چند مثال توصیفی، جبرهای لیپ‌شیتس روی فضای متری فشرده و جبرهای $L^p(G)$ در حالتی که G فشرده است، نیز در این فصل ارائه شده است.

فصل آخر را به نتایج و قضایایی که توسط استادان راهنما و نگارنده از شش فصل نخست به‌دست آمده است، اختصاص داده‌ایم. ابتدا مثال ساده‌ای ارائه شده است که φ—میانگین‌پذیر است ولی میانگین‌پذیر نیست. در ادامه چند قضیه از پایان‌نامه تعمیم یا توسیع داده شده است. همچنین، دو قضیه در مورد φ—میانگین‌پذیری دوطرفه‌ی دوگان دوم یک جبر باناخ بیان و ثابت شده است.

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل، تعاریف و مفاهیم اولیه را جهت استفاده در فصل‌های بعدی بیان می‌کنیم که شامل چهار بخش: آنالیزتابعی، جبرهای‌باناخ و C^*-جبرها، آنالیز همساز و میانگین‌پذیری گروه‌ها و جبرهای باناخ است.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱ . نگاشت T از فضای برداری X به فضای برداری Y را یک نگاشت خطی یا یک عملگر خطی می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و اسکالر α داشته باشیم

$$T(\alpha x_۱ + x_۲) = \alpha T(x_۱) + T(x_۲).$$

هر عملگر خطی از فضای برداری X به توی فضای اعداد مختلط را یک تابعک خطی می‌نامیم.

تعریف ۲.۱ . فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوری که

(i) هر زیرمجموعه‌ی یکانی در X یک مجموعه‌ی بسته باشد.

(ii) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشد.

در این صورت، τ یک توپولوژی برداری بر X و X یک فضای برداری توپولوژیک می‌باشد.

تعریف ۳.۱ . گوییم فضای برداری X یک فضای نرم‌دار است اگر به ازای هر $x \in X$، عددی حقیقی و نامنفی، مانند $\|x\|$، به نام نرم x، موجود باشد که:

(i) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(ii) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(iii) اگر $x \neq 0$، $\|x\| > 0$.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. T را کران‌دار گوییم در صورتی که عددی ثابت مانند M موجود باشد که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. نرم T را با $\|T\|$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : \|x\| \neq 0\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱ . فرض کنید Y, X دو فضای نرم‌دار بوده و $T : X \longrightarrow Y$ خطی باشد. سه شرط ذیل هم‌ارزند:

(i) T پیوسته است.

(ii) T کران‌دار است.

(iii) هرگاه $x_n \longrightarrow 0$ آن‌گاه $T(x_n) \longrightarrow 0$.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۳۲.۱ از [۳۸]. ■

تعریف ۶.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری باشد. نگاشت خطی $P : X \longrightarrow X$ را تصویر در X گوییم در صورتی که $P^2 = P$.

تعریف ۷.۱ . فرض کنید X فضایی برداری و N زیر فضایی از آن باشد. X/N، فضای خارج قسمتی X به پیمانه‌ی N، را به صورت $X/N = \{\pi(x) : x \in X\}$ تعریف می‌کنیم. که در آن، $\pi(x) = x + N = \{x + y : y \in N\}$.

X/N با جمع و ضرب اسکالر

$$\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x) \quad , \quad \pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$$

یک فضای برداری است. صفر X/N برابر $N = \pi(0)$ است. نگاشت $\pi : X \longrightarrow X/N$ که x را به $\pi(x)$ می‌نگارد، نگاشت خارج قسمتی و بعد X/N، هم‌بعد N در X گفته می‌شود.

فرض کنید N زیرفضایی بسته از فضای نرم‌دار X باشد. در این صورت، X/N با نرم

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x - z\| : z \in N\}$$

فضایی نرم‌دار است. همچنین، از قضیه‌ی ۴۱.۱ از [۳۸] نتیجه می‌گردد که اگر X باناخ باشد، X/N هم فضایی باناخ است.

تعریف ۸.۱ . اگر X فضای نرمدار باشد، فضای دوگان آن؛ یعنی X^*، فضای برداری تمام تابعک های خطی پیوسته بر X است که اعمال آن جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع است. ثابت می‌شود که اگر X فضای نرمدار باشد، X^* فضایی باناخ است.

قضیه ۹.۱ . (قضیه‌ی هان—باناخ[۱]) فرض کنیم M زیرفضایی از فضای برداری حقیقی X و P یک نیم نرم بر X باشد. ($P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را نیم نرم گوییم هرگاه $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ و به ازای هر t نامنفی $P(tx) = tP(x)$.) و f یک تابعک خطی بر M باشد که به ازای هر $x \in M$ ، $|f(x)| \leq P(x)$. در این صورت، f به تابعک خطی Λ بر X توسیع می‌یابد که‌برای هر $x \in X$ در شرط $|\Lambda x| \leq P(x)$ صدق می‌کند.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۳.۳ از [۳۸]. ■

نتیجه ۱۰.۱ . فرض کنید M زیرفضایی از فضای نرم‌دار X و f یک تابعک خطی پیوسته روی M باشد. در این صورت، f را می‌توان به تابعک خطی پیوسته g روی X توسیع داد که $\|g\| = \|f\|$.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۲۵.۲۳ از [۱]. ■

نتیجه ۱۱.۱ . اگر X یک فضای نرم‌دار بوده و $x_\circ \in X$ آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد که $\Lambda x_\circ = \|x_\circ\|$ و به ازای هر $x \in X$ ، $\|\Lambda\| \leq ۱$.

برهان. ر.ک. نتیجه‌ی قضیه‌ی ۳.۳ از [۳۸]. ■

قضیه ۱۲.۱ . فرض کنیم M زیر فضایی از فضای موضعاً محدب X و $x_\circ$ عضوی از X باشد. هرگاه $x_\circ$ در بستار M نباشد آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد به طوری که $\Lambda x_\circ = ۱$ و به ازای هر $x \in M$ ، $\Lambda x = \circ$.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۵.۳ از [۳۸]. ■

[۱] Hahn-Banach theorem

قضیه ۱۳.۱ (نقطه‌ی ثابت مارکوف و کاکوتانی [۲]). فرض کنید K یک زیر مجموعه‌ی فشرده و محدب از فضای برداری توپولوژیکی X باشد و Z یک گردایه جابه‌جایی از نگاشت‌های خطی پیوسته باشد که K را به K می‌نگارد. در این صورت، نقطه‌ی $p \in K$ وجود دارد که به ازای هر $T \in Z$، $Tp = p$.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۶.۱۰.۵ از [۹]. ■

قضیه ۱۴.۱ . (نشاننده طبیعی [۳]) فرض کنید X فضایی نرم‌دار باشد. آنگاه هر $x \in X$ تابعک خطی مانند F_x (گاهی با $\hat{x}$ هم نمایش می‌دهیم) را القا می‌کند که $\|F_x\| = \|x\|$ و به ازای هر $f \in X^*$، $F_x(f) = f(x)$. نگاشت $J : X \longrightarrow X^{**}$ که به ازای هر $x \in X$، $J(x) = F_x$ یک هم‌ریختی طول‌پا یا یک نشاننده‌ی طبیعی از X به X^{**} خواهد بود.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۲۸.۲۳ از [۱]. ■

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنید X مجموعه‌ی غیر تهی دل‌خواه و $\{X_i\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. به ازای هر i، نگاشت $f_i : X \longrightarrow X_i$ را در نظر می‌گیریم. اشتراک تمام توپولوژی‌هایی را که تحت آنها تمام f_i ها پیوسته‌اند، توپولوژی ضعیف القا شده توسط $\{f_i\}$ بر X گوییم.

اگر X فضای نرم دار و X^* فضای دوگان آن باشد، توپولوژی القا شده توسط X^* بر X را توپولوژی ضعیف X می‌نامیم (گاهی این توپولوژی را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.).

به آسانی ثابت می‌شود که $x_n \longrightarrow 0$، با توپولوژی ضعیف، اگرو فقط اگر به ازای هر $\Lambda \in X^*$، $\Lambda x_n \longrightarrow 0$.

تعریف ۱۶.۱ . فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. w^*–توپولوژی روی X^*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* است که تحت آن تمام تابعک‌های F_x (در قضیه‌ی نشاننده‌ی طبیعی) پیوسته‌اند.

قضیه ۱۷.۱ . فرض کنیم E زیر مجموعه‌ی محدبی از فضای موضعاً محدب X باشد. در این صورت، بستار ضعیف $\bar{E}_w$ از E، مساوی بستار اصلی آن است.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۱۲.۳ از [۳۸]. ■

---

[۲] Markov and Kakutani fixed point

[۳] natural embedding

قضیه ۱۸.۱ . (قضیه‌ی باناخ – آل‌اوغلو [۴]) هرگاه V یک همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq ۱, \forall x \in V\}$$

آنگاه K مجموعه‌ای w^*—فشرده است.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۱۵.۳ از [۳۸]. ■

قضیه ۱۹.۱ . فرض کنیم Y, X دو فضای نرم‌دار باشند. به ازای هر $T \in B(X,Y)$، نگاشت یکتای $T^* \in B(Y^*, X^*)$ ، به نام الحاقی T، نظیر می‌شود که در رابطه‌ی $\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle$ به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$ صدق می‌کند. به علاوه، شرط $\|T^*\| = \|T\|$ نیز برقرار است.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۱۰.۴ از [۳۸]. ■

تعریف ۲۰.۱ . فرض کنیم M زیرفضایی بسته از فضای نرم‌دار X باشد. هرگاه زیرفضای بسته‌ای مانند N از X وجود داشته باشد که $X = M + N$ و $M \bigcap N = \{۰\}$، آن‌گاه گوییم M در X متمم شده است. در این حالت گوییم X جمع مستقیم N, M است و از نماد $X = M \bigoplus N$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲۱.۱ . فضای برداری مختلط H را یک فضای حاصل‌ضرب داخلی گوییم هرگاه یک ضرب داخلی روی آن تعریف شده باشد که به ازای هر z, y, x از X در روابط زیر صدق کند:

- $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ، $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$
- $x \cdot x \geq ۰$
- $x \cdot x = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

هرگاه تعریف کنیم $\|x\|^۲ = x \cdot x$ آنگاه $\|\cdot\|$ یک نرم بر H است. اگر H با این نرم تام باشد، H را فضای هیلبرت گوییم.

به عنوان مثال، $L^۲(R)$ یک فضای هیلبرت است.

---

[۴] The Banach-Alaoglu theorem

۲.۱ جبرهای باناخ و C^*ـجبرها

تعریف ۲۲.۱ . فضای برداری A، روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر می‌نامیم در صورتی که در شرایط زیر صدق کند:

- A نسبت به جمع و ضرب برداری، یک حلقه باشد؛
- به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $x, y \in A$، $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

اگر جبر A، فضایی خطی نرم‌دار، با نرم $\|\cdot\|$، باشد و به ازای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ آن‌گاه A را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم.

e را (در صورت وجود) عنصر همانی یا واحد A گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in X$، $xe = ex = x$.

اگر A دارای عضو همانی نباشد، می‌توان به روش زیر به آن عنصر همانی الحاق کرد(یا اصطلاحاً واحددار کرد) و واحددار شده‌ی آن را با A_e یا $A^\sharp$ نمایش می‌دهیم. A_e برابر تمام زوج های مرتب $(x, \alpha) \in A \times \mathbb{F}$ است که ضرب در آن به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (\lambda b + \mu a + ab, \lambda\mu) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{F}, a, b \in A).$$

A_e با ضرب تعریف شده در بالا و عنصر همانی $(۰, ۱)$ و نرم $\|(a, \mu)\| = \|a\| + |\mu|$ یک جبر باناخ واحددار است. اگر عنصر همانی A_e را با 1_A نمایش دهیم داریم، $A^\sharp := A \oplus \mathbb{F}1_A$.

تعریف ۲۳.۱ . زیرمجموعه‌ی J از جبر مختلط A را یک ایده‌ال چپ گوییم در صورتی که

(i) J زیرفضایی (به مفهوم برداری) باشد.

(ii) هرگاه $x \in X, y \in J$ ، آنگاه $xy \in J$.

به طریق مشابه ایده‌ال راست تعریف می‌شود. یک ایده‌ال دو طرفه(مختصراً ایده‌ال) زیرمجموعه‌ای از A است که هم ایده‌ال راست و هم چپ باشد.

تذکر ۲۴.۱ (آ) نامساوی $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$، عمل ضرب را به نگاشتی پیوسته تبدیل می‌کند.

(ب) اگر A جابه‌جایی و غیریکدارباشد، A ایده‌الی بسته از A_e با هم‌بعد ۱ است.

تعریف ۲۵.۱ . فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد و φ یک تابعک خطی بر A باشد که متحد صفر نیست. هرگاه به ازای هر $x, y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ آن‌گاه φ را یک هم‌ریختی مختلط (یا گاهی یک کاراکتر) بر A گوییم.

مجموعه‌ی تمام هم‌ریختی‌های مختلط روی A را با $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱ . فرض کنید A یک جبر نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$، باشد:

(i) همانی تقریبی چپ (راست) A، توری مانند (e_α) در A است که به ازای هر $a \in A$، $\lim_\alpha e_\alpha \cdot a = a$ $(\lim_\alpha a \cdot e_\alpha = a)$.

(ii) همانی تقریبی A، توری مانند (e_α) در A است که همانی تقریبی چپ و راست باشد.

(iii) همانی تقریبی (e_α)، کران‌دار است اگر $\sup_\alpha \|e_\alpha\| < \infty$.

(iv) همانی تقریبی (e_α)، دنباله‌یی است اگر $\alpha \in \mathbb{N}$.

(v) همانی تقریبی (e_α)، مرکزی است اگر در مرکز A باشد (یعنی به ازای هر $a \in A$ و هر α، $ae_\alpha = e_\alpha a$).

گزاره ۲۷.۱ . فرض کنید A یک جبر نرم‌دار و I یک ایده‌ال بسته در A باشد. اگر I یک همانی تقریبی راست داشته باشد و A/I هم همانی تقریبی راست (کراندار) داشته باشد آنگاه A همانی تقریبی راست (کران‌دار) دارد.

برهان. ر.ک. گزاره‌ی ۷.۱ از [۸]. ■

تعریف ۲۸.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. تور کران دار $(e_\lambda)_\lambda$ از اعضای A، همانی تقریبی راست ضعیف کران‌دار گفته می‌شود درصورتی که به ازای هر $f \in A^*$ و هر $x \in A$، $\lim_\lambda f(xe_\lambda) = f(x)$.

قضیه ۲۹.۱ . اگر جبر باناخ A همانی تقریبی راست ضعیف کران‌دار داشته باشد، آن گاه A همانی تقریبی راست کران‌دار دارد و برعکس.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۲.۳۳ از [۸]. ■

تعریف ۳۰.۱ . فرض کنید A، یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و M فضایی برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. M را A—مدول چپ گویند هرگاه نگاشت $(a, m) \mapsto a \cdot m$ از $A \times M$ به توی M موجود باشد که در سه شرط

زیر صدق کند:

(i) به ازای هر $a \in A$ ثابت، نگاشت $m \mapsto a \cdot m$ روی M خطی باشد.

(ii) به ازای هر $m \in M$ ثابت، نگاشت $a \mapsto a \cdot m$ روی A خطی باشد.

(iii) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$.

نگاشت $(a, m) \mapsto a \cdot m$ را ضرب مدول می‌گویند. مشابهاً A—مدول راست باضرب $M \times A \mapsto M$ که $(m, a) \mapsto m \cdot a$ تعریف می‌شود.

M را یک A—دومدول گویند هرگاه هم A—مدول چپ و هم A—مدول راست باشد و $(a.m).b = a.(m.b)$.

تعریف ۳۱.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. فضای باناخ M را که A—مدول چپ (راست) است یک باناخ A—مدول چپ (راست) می‌نامیم هرگاه نگاشت دو خطی ضرب مدولی پیوسته باشد. به عبارتی دیگر، $K > 0$ موجود باشد که به ازای هر $m \in M$ و هر $a \in A$،

$$\|am\| \leq K\|a\|\|m\|. \qquad (\|ma\| \leq K\|a\|\|m\|)$$

حال اگر M هم یک باناخ A—مدول چپ و هم راست باشد که به ازای هر b, a از A و هر m از M، رابطه‌ی $(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b)$ برقرار باشد، M را یک باناخ A—دومدول گوییم.

تذکر ۳۲.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ و M^* فضای دوگان M باشد. اگر M یک باناخ A—دومدول باشد، آنگاه با تعاریف زیر M^* هم یک باناخ A—دومدول خواهد بود. به ازای هر $a \in A, x \in M, \Lambda \in M^*$،

$$\langle x, a \cdot \Lambda \rangle = \langle x \cdot a, \Lambda \rangle. \quad , \quad \langle x, \Lambda \cdot a \rangle = \langle a \cdot x, \Lambda \rangle$$

تعریف ۳۳.۱ . فرض کنید M یک باناخ A—دومدول باشد. در این صورت، تور (e_α) در A، همانی تقریبی کران‌دار برای M است هرگاه (e_α) یک همانی تقریبی برای A باشد وعلاوه بر آن به ازای هر $x \in M$،

$$\lim_\alpha e_\alpha x = \lim_\alpha x e_\alpha = x.$$

تعریف ۳۴.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک باناخ A—مدول چپ باشد. در این صورت، زیر فضای خطی بسته از X را که توسط $AX = \{ax : a \in A, x \in X\}$ تولید می‌شود «بخش اساسی » X

می‌گوییم و با X_e نشان می‌دهیم. اگر $X = X_e$ آن‌گاه X را یک باناخ A—مدول چپ اساسی گوییم. به همین ترتیب، باناخ A—مدول راست و دوطرفه اساسی نیز تعریف می‌شود.

قضیه ۳۵.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ با همانی تقریبی چپ کران‌دار (e_λ) و X یک باناخ A—مدول چپ باشد. دراین صورت،

$$X_e = \overline{AX} = \{x \in X : \lim e_\lambda x = x\}.$$

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۲.۱۵ از[۸]. ■

قضیه ۳۶.۱ (قضیه‌ی تجزیه‌ی کوهن [۵]). فرض کنید A جبر باناخ با همانی تقریبی چپ کران‌دار با کران $K \geq 1$ باشد و X یک باناخ A—مدول چپ باشد. در این صورت، به ازای هر $\delta > 0$ و $z \in X_e$، عضو $y \in X$ و $a \in A$ وجود دارد که

(i) $\quad z = ay$ $\qquad$ (ii) $\quad \|a\| \leq K$

(iii) $\quad \|y - z\| < \delta$.

به ویژه $X_e = AX$. پس، AX زیرفضایی بسته از X است.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۱.۱٦ از [۸]. ■

قضیه ۳۷.۱ . (قضیه‌ی گلدشتاین [٦]) فرض کنیم M یک فضای باناخ باشد. به ازای هر $\varphi \in M^{**}$ تور (x_α) در M موجود است که به ازای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|\varphi\|$ و $x_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi$.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی V.۵.۴ از [۹]. ■

تعریف ۳۸.۱ . فرض کنید $E_1, \cdots, E_n$، فضاهای خطی باشند. ضرب تانسوری $E_1, \cdots, E_n$، زوج (T, τ) است که T فضایی خطی و $\tau : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow T$ یک نگاشت n—خطی باخاصیت زیر است:

برای هر فضای خطی F و نگاشت n—خطی $V : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ نگاشت خطی یکتای $\tilde{V} : T \longrightarrow F$ موجود باشد که $V = \tilde{V} \circ \tau$.

---

[۵] Cohen's factorhzation theorem

[٦] Goldstine theorem

قضیه ۳۹.۱ . فرض کنید $E_\text{۱},\cdots,E_n$ فضاهای خطی باشند. آنگاه ضرب تانسوری آنها موجود و با تقریب یکریختی منحصربه‌فرد است. ضرب تانسوری $E_\text{۱},\cdots,E_n$ را با نماد $E_\text{۱}\otimes\cdots\otimes E_n$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$x_\text{۱}\otimes\cdots\otimes x_n=\tau(x_\text{۱},\cdots,x_n),\qquad x_i\in E_i.$$

برهان. ر.ک. قضیه‌ی B.۱.۳ (صفحه‌ی ۲۴۶) از [۳۹]. ■

قضیه ۴۰.۱ . فرض کنید $E_\text{۱},\cdots,E_n$ فضاهای نرم‌دار و $x\in E_\text{۱}\otimes\cdots\otimes E_n$ باشد. دراین‌صورت، $m\in\mathbb{N}$ و $x_j^{(1)},\cdots,x_j^{(m)}\in E_j$ $(j=\text{۱},\cdots,n)$ وجود دارد که

$$x=\sum_{k=\text{۱}}^{m}x_\text{۱}^{(k)}\otimes\cdots\otimes x_n^{(k)}.$$

برهان. ر.ک. قضیه‌ی B.۱.۲.از [۳۹]. ■

تعریف ۴۱.۱ . فرض کنید $E_\text{۱}$، $\cdots$،E_n فضاهای باناخ باشند. آنگاه به ازای هر$x\in E_\text{۱}\otimes\cdots\otimes E_n$ تعریف می‌کنیم

$$\|x\|_\pi:=\inf\{\sum_{k=\text{۱}}^{m}\|x_\text{۱}^{(k)}\|...\|x_n^{(k)}\|\ :\ x=\sum_{k=\text{۱}}^{m}x_\text{۱}^{(k)}\otimes...\otimes x_n^{(k)},m\in\mathbb{N}\}$$

نرم $\|.\|_\pi$ را نرم تانسوری تصویری $E_\text{۱}\otimes\cdots\otimes E_n$ می‌نامیم.

تعریف ۴۲.۱ . فرض کنید $E_\text{۱}$،...،E_n فضاهای باناخ باشند. در این صورت، حاصل‌ضرب تانسوری تصویری $E_\text{۱}\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}E_n$، کامل شده‌ی $E_\text{۱}\otimes...\otimes E_n$ تحت نرم $\|.\|_\pi$ است.

قضیه ۴۳.۱ . اگر $m\in E\widehat{\otimes}E$، آن‌گاه مجموعه‌های مستقل خطی $\{a_i\},\{b_i\}$ در E وجود دارند که $m=\sum_{i=\text{۱}}^{n}(a_i\otimes b_i)$.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۶.۳ از [۳]. ■

قضیه ۴۴.۱ . فرض کنید $E_\text{۱},\cdots,E_n$، جبرهای نرم‌دار باشد. دراین صورت، $\otimes_{i=\text{۱}}^{n}E_i$ با نرم $\|\cdot\|_\pi$ یک جبر نرم دار و $(\widehat{\otimes}_{i=\text{۱}}^{n}E_i,\|\cdot\|_\pi)$ یک جبرباناخ خواهد بود.

برهان. ر.ک. قضیه‌ی ۲۲.۱.۲ از[۷]. ■