دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر**

عنوان

تکیه‌گاه کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما

دکتر علیرضا نقی‌پور

استاد مشاور

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

پژوهشگر

الهه بهامیریان قهفرخی

بهمن ماه ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: بهامیریان قهفرخی   نام: الهه

عنوان: تکیه‌گاه کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما: دکتر علیرضا نقی‌پور
استاد مشاور: دکتر محمدرضا ریسمانچیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: جبر

دانشگاه: شهرکرد   دانشکده علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ماه ۱۳۹۰   تعداد صفحات: ۷۸

واژگان کلیدی: تکیه‌گاه، کوهمولوژی موضعی، بعد کوهمولوژیکی، مشخصه

چکیده

به بررسی این سؤال پرداخته می‌شود که آیا تکیه‌گاه یک مدول کوهمولوژی موضعی دلخواه از یک مدول متناهی مولد روی یک حلقه‌ی نوتری با تکیه‌گاه در ایدآل داده شده در توپولوژی زاریسکی بسته است. چندین نتیجه به این سؤال پاسخ مثبت داده‌اند؛ در حالت خاص نشان داده شده است که تکیه‌گاه بسته است هرگاه بعد کوهمولوژیکی ایدآل داده شده حداکثر ۲ یا حلقه‌ی زمینه موضعی از بعد حداکثر ۴ باشد. در این پایان‌نامه بسته بودن تکیه‌گاه $H_I^i(M)$ برای هر i و هر ایدآل I هرگاه M یک مدول متناهی مولد روی یک حلقه‌ی موضعی با بعد حداکثر ۴ باشد، و تعمیمی از نتیجه‌ی p مشخصه‌ی لیوبزنیک به اثبات می‌رسد.

تقدیم به

استاد استقامت پدرم
و
معلم محبت مادرم

فهرست مطالب

فهرست نمادها

$H_I^i(R)$	iامین مدول کوهمولوژی موضعی از حلقه‌ی R با تکیه‌گاه در ایدآل I
$\operatorname{Spec} R$	مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول از حلقه‌ی R
$\operatorname{depth}_I R$	عمق ایدآل I روی R
$\dim R$	بعد کرول حلقه‌ی R
$\operatorname{Hom}(M, N)$	مجموعه‌ی تمام همریختی‌ها از M به N
pd	بعد تصویری
$\operatorname{Ass}_R M$	مجموعه‌ی ایدآل‌های اول R وابسته به M
$\operatorname{Supp}_R M$	تکیه‌گاه R-مدول M
$\operatorname{Min}_R M$	مجموعه‌ی می‌نیمال‌های اول در تکیه‌گاه M
$\operatorname{cd}(I)$	بعد کوهمولوژیکی ایدآل I
$\otimes$	ضرب تانسوری
$M_{\mathfrak{q}}$	موضعی سازی مدول M در ایدآل $\mathfrak{q}$
$C(X; R)$	همبافت چخ از حلقه‌ی R متناظر با X
$D_I(R)$	ایدآل تبدیل از R نسبت از I
$\varinjlim$	حد مستقیم
$V(I)$	مجموعه‌ی ایدآل‌های اول شامل ایدآل I
$\operatorname{height} I$	ارتفاع ایدآل I
$H^i(X; R)$	iامین کوهمولوژی کزول از X روی R
$\mathbf{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathbf{N}$	مجموعه اعداد طبیعی

مقدمه

مثال‌هایی از سینگ [۱][۲۳]، کاتزمن [۲] [۱۳] و بعداً سوانسون [۳] و سینگ [۲۴]، نشان می‌دهد که مجموعه‌ی اول‌های وابسته از یک مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(R)$ از حلقه‌ی نوتری (تعویض‌پذیر) R با تکیه‌گاه در ایدآل I می‌تواند نامتناهی باشد. با این وجود، یک سؤال باز باقی می‌ماند که آیا مجموعه‌هایی از می‌نیمال اول‌ها در تکیه‌گاه چنین مدول‌های کوهمولوژی موضعی همیشه متناهی است. این معادل آن است که بپرسیم آیا تکیه‌گاه مدول‌های کوهمولوژی موضعی از حلقه‌های (یا مدول‌های) نوتری باید زیر مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی از $\operatorname{Spec} R$ باشند.

پاسخ این سؤال در چندین مورد معلوم است. البته اگر مجموعه‌ی اول‌های وابسته از مدول کوهمولوژی موضعی داده شده متناهی باشد آنگاه تکیه‌گاه آن بسته است. بنابراین، تکیه‌گاه $H_I^i(R)$ بسته است هرگاه R حلقه‌ی موضعی منظم شامل یک میدان باشد ([۱۱] و [۱۶])، یا اگر R یک حلقه‌ی موضعی، منظم و غیر منشعب با مشخصه‌ی مختلط باشد ([۱۷]). علاوه براین، مجموعه‌ی اول‌های وابسته از $H_I^i(R)$ متناهی است اگر $i \in \{۰, ۱\}$، $i = \operatorname{depth}_I R$، $i = \dim R$ یا (در این مورد R موضعی است) $i = \dim R - ۱$ باشد ([۱۸]). اولین کوهمولوژی موضعی نامتناهی مولد، تعداد متناهی اول وابسته با [۲] و مستقل [۱۵] دارد.

به ویژه، قابل توجه است که مدول‌های کوهمولوژی بالایی همیشه تکیه‌گاه بسته دارند ($H_I^i(R)$ مدول کوهمولوژی بالایی است هرگاه برای هر $j > i$، $H_I^j(R) = ۰$ و $H_I^i(R) \neq ۰$). رات‌هوس [۴] و سگا [۵]([۲۲]) ثابت کردند که تکیه‌گاه کوهمولوژی موضعی بالایی از ایدآل نامرتبط، همواره در یک حلقه‌ی نوتری مدرج استاندارد بسته است. کاتزمن، در یک استدلال منسوب به لیوبزنیک [۶]، اثبات می‌کند که اگر R یک حلقه با مشخصه‌ی اول مثبت و I یک ایدآل تولید شده توسط n عنصر باشد، آنگاه تکیه‌گاه $H_I^n(R)$ بسته است [۱۴]. این مسئله که آیا نتیجه‌ی متناظر برای حلقه‌های شامل یک میدان با مشخصه‌ی صفر صدق می‌کند، سؤالی است که هنوز به آن پاسخی داده نشده است. اگر

[۱] Singh
[۲] Katzman
[۳] Swanson
[۴] Rotthaus
[۵] Sega
[۶] Lyubenzik

I یک ایدآل دو طرفه‌ی کامل مدرج در یک حلقه‌ی موضعی صفر هم مشخصه و دارای سه مولد باشد، نمی‌دانیم که آیا تکیه‌گاه $H_I^3(R)$ بسته است یا نه. در واقع، وقتی که نتیجه ۴.۲.۴ اثبات شود، این مطلب در برخی جهات، مورد اصلی برای فهمیدن این‌که چه موقع تکیه‌گاه $H_I^n(R)$ بسته است، می‌باشد (همچنین توضیح زیر را ببینید).

همه‌ی این نتایج به سؤال زیر در موارد خاص پاسخ مثبت می‌دهند:

سؤال: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری، M یک R-مدول متناهی مولد و I یک ایدآل تولید شده توسط n عنصر باشد. آیا تکیه‌گاه $H_I^n(M)$ بسته است؟

با استفاده از قضیه‌ای از گراسون [7] [۲۶]، می‌توانیم به این سؤال در حالت $M = R$ پاسخ مثبت دهیم (گزاره ۱.۱.۲). با استفاده از ایده‌ی هلوس [8] [۷]، نشان می‌دهیم که اگر این سؤال برای $n = 3$ برقرار باشد آنگاه برای $n \geq 4$ نیز صادق است (نتیجه ۳.۲.۳). سؤال برای $n = 1$ بدیهی است. مورد $n = 2$ و $M = R$ از یک نتیجه از هاچستر [9] [۸، نتیجه ۶.۱۱] پیروی می‌کند، که در قضیه‌ی زیر تعمیم داده می‌شود (قضیه ۴.۱.۲):

قضیه ۱.۰.۰. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و I یک ایدآل باشد به طوری‌که برای $i > 2$، $H_I^i(R) = 0$. در این صورت تکیه‌گاه $H_I^2(M)$ برای همه‌ی R-مدول‌های متناهی مولد M بسته است.*

متأسفانه، تکنیک ما برای بعدهای کوهمولوژیکی بالاتر بدون تغییر اساسی کار نمی‌کند، با توجه به یک مثال از رابرتس [10] که بعداً جزئیات را شرح می‌دهیم. [۲۱] را ببینید.

اگر R شامل یک میدان با مشخصه‌ی صفر باشد، نتیجه ی جالب زیر را ثابت می‌کنیم (قضیه ۱.۲.۴): فرض کنیم I ایدآل تولید شده توسط n عنصر باشد که $n \geq 6$. در این صورت ماتریس 3×2، A وجود دارد که درایه‌های آن در R هستند، به طوری‌که $H_I^n(R) \cong H_{I_2(A)}^3(R)$ که در آن $I_2(A)$ ایدآل تولید شده توسط کهادهای 2×2 از A است. علاوه براین، اگر $\operatorname{depth}_I R \geq 2$ آنگاه می‌توان فرض کرد $\operatorname{depth}_{I_2(A)} R \geq 2$ و از این‌رو $\operatorname{pd}_R R/I_2(A) = 2$. این قضیه پیامدهای جالبی، مخصوصاً در رابطه با مثالی از هارتشورن [11] دارد (مثال ۶.۲.۴).

در سراسر این پایان‌نامه همه‌ی حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یکدار و همه‌ی مدول‌ها یکانی فرض شده‌اند. برای R-مدول M، فرض می‌کنیم $\operatorname{Ass}_R M$ و $\operatorname{Supp}_R M$ به ترتیب نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی اول‌های وابسته و تکیه‌گاه M باشند. فرض می‌کنیم $\operatorname{Min}_R M$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی می‌نیمال

[7] Gruson
[8] Hellus
[9] Hochster
[10] Roberts
[11] Hartshorne

اول‌ها در $\operatorname{Supp}_R M$ (یا به طور معادل، در $\operatorname{Ass}_R M$) باشد. یادآوری می‌کنیم که

$$\operatorname{Ass}_R M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \quad | \quad \exists\, 0 \neq x \in M : \mathfrak{p} = \operatorname{Ann} x\}.$$

$$\operatorname{Supp}_R M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \quad : \quad M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

مطالب اصلی این پایان‌نامه از [۱۰] به‌دست آمده‌اند.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها

۱.۱ جبر تعویض‌پذیر

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی با بعد d باشد. یک سیستم از پارامترها برای R، عبارت از $a_1,...,a_d \in R$ می‌باشد به طوری‌که $\mathfrak{m} = \sqrt{(a_1,...,a_d)}$.
(حلقه‌ی R را موضعی گوییم هرگاه ایدآل ماکزیمال آن موجود و منحصربفرد باشد.)

تعریف ۲.۱.۱. یک حلقه‌ی موضعی نوتری $(R,\mathfrak{m})$ منظم است اگر یک سیستم از پارامترها، $\mathfrak{m}$ را تولید کند. اگر $\dim R = 0$، آنگاه R منظم است اگر و فقط اگر یک میدان باشد. یادآوری می‌کنیم که بعد کرول حلقه‌ی R و مدول M به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\dim R = \sup\{n | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset ... \subset \mathfrak{p}_n \quad : \quad \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R\}$$

$$\dim M = \sup\{n | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset ... \subset \mathfrak{p}_n \quad : \quad \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Supp}_R M\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. یک حلقه با مشخصه‌ی مختلط، حلقه‌ی تعویض‌پذیر R است که مشخصه‌ی صفر دارد و R یک ایدآل I را دارد به طوری‌که R/I دارای مشخصه‌ی مثبت باشد.

تعریف ۴.۱.۱. حلقه‌ی مدرج، حلقه‌ای است همراه با تجزیه‌ی $R = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} R_i$ (به عنوان یک $\mathbf{Z}$-مدول) به طوری‌که برای هر $i, j \in \mathbf{Z}$، $R_iR_j \subset R_{i+j}$.

یک R-مدول مدرج، R-مدول M است همراه با تجزیه‌ی $M = \bigoplus_{i\in Z} M_i$ (به عنوان یک $\mathbf{Z}$-مدول) به طوری‌که برای هر $i, j \in \mathbf{Z}$، $R_iM_j \subset M_{i+j}$ باشد. M_i، iامین مؤلفه‌ی همگن (یا مدرج) از M نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $R = \bigoplus_{i\in G} R_i$ یک حلقه‌ی مدرج باشد. اگر $G = \mathbf{N}$ و R توسط عناصر از درجه‌ی ۱ روی $R_\circ$ تولید شود، آنگاه می‌گوییم R همگن یا مدرج استاندارد است.

تعریف ۶.۱.۱. ایدآل نامرتبط، ایدآلی از حلقه‌ی مدرج از همه‌ی عناصر همگن با درجه‌ی بزرگتر از صفر است.

تعریف ۷.۱.۱. ایدآل همگن I در حلقه‌ی مدرج $R = \oplus A_i$، ایدآل تولید شده توسط یک مجموعه از عناصر همگن است؛ به عبارت دیگر، هر یک از مولدهای I فقط مشمول در یکی از A_iها باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم M مدول مدرج متناهی مولد روی حلقه‌ی نوتری و همگن

$$R = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}_\circ} R_n$$

باشد. برای هر $i \in \mathbf{N}_\circ$ فرض کنید $H^i_{R_+}(M)$ نشان دهنده‌ی iامین مدول کوهمولوژی موضعی از M نسبت به ایدآل نامرتبط $R_+ = \bigoplus_{n>\circ} R_n$ از R، فراهم شده با درجه‌بندی طبیعی R است.

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم E یک مدول وفادار متناهی مولد روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت هر R-مدول یک فیلتر متناهی از زیرمدول‌ها را می‌پذیرد که عوامل آن خارج قسمت‌هایی از مجموع مستقیم نسخه‌هایی از E هستند.*

برهان. مرجع [۲۶، قضیه ۴.۱] را ببینید. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم R یک زیر حلقه از حلقه‌ی S باشد. عنصر $s \in S$ روی R صحیح نامیده می‌شود هرگاه s یک ریشه از یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب در R باشد. یعنی داشته باشیم:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = 0 \quad ; \quad a_i \in R$$

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر R یک زیر حلقه‌ی S باشد، مجموعه‌ی $\overline{R}$، بسته‌ی صحیحِ R در S است که شامل عناصری از S است که روی R صحیح می‌باشند. R را به طور صحیح بسته می‌نامیم هرگاه $\overline{R} = R$.

تعریف ۱۲.۱.۱. R-مدول M وفادار است هرگاه $\operatorname{Ann} M = 0$.

نتیجه ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم E یک مدول وفادار متناهی مولد روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و M یک R-مدول باشد. اگر $E \otimes M = 0$، آنگاه $M = 0$.*

برهان. مرجع [۲۶، نتیجه ۴.۳] را ببینید. □

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم M و N دو R-مدول و $\mathfrak{q}$ یک ایدآل اول از R باشند، در این صورت:*

$$(M \otimes_R N)_\mathfrak{q} \cong_{R_\mathfrak{q}} M_\mathfrak{q} \otimes_{R_\mathfrak{q}} N_\mathfrak{q}$$

گزاره ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه، B یک R-مدول و I یک ایدآل از R باشد. در این صورت $R/I \otimes_R B \cong B/IB$.*

تعریف ۱۶.۱.۱. یک فیلتر روی حلقه‌ی R یک دنباله از ایدآل‌ها به صورت زیر است:

$$R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \quad .$$

با ایدآل I نیز فیلتر زیر را داریم:

$$R \supseteq I \supseteq I^{2} \supseteq \dots \quad .$$

تعریف ۱.۱.۱۷. حلقه‌ی R را حوزه می‌نامیم هرگاه $Z(R) = 0$، که در آن $Z(R)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R است.

تعریف ۱.۱.۱۸. ایدآل I پوچ‌توان نامیده می‌شود هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت nای، $I^n = 0$.

تعریف ۱.۱.۱۹. (۱) دو عنصر a و b از حلقه‌ی R را وابسته گوییم و با نماد $a \sim b$ نمایش می‌دهیم، هرگاه عنصر یکال $u \in R$ موجود باشد به طوری‌که $a = bu$.

(۲) عنصر غیر صفر و غیر یکال $c \in R$ را تحویل‌ناپذیر گوییم، هرگاه از $c = ab$ نتیجه بگیریم که a یکال یا b یکال باشد.

تعریف ۱.۱.۲۰. حوزه‌ی R را یک حوزه‌ی تجزیه یکتا (UFD) نامیم، هرگاه:

(۱) (وجود تجزیه) هر عنصر غیر صفر و غیر یکال $a \in R$ را بتوان به صورت $a = a_1 a_2 \dots a_n$ نوشت که در آن a_iها عناصر تحویل‌ناپذیری از R می‌باشند. به عبارت دیگر $a \in R$ را بتوان به صورت حاصل‌ضربی از عوامل تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد.

(۲) (یکتایی تجزیه) اگر $a = b_1 b_2 \dots b_n = c_1 c_2 \dots c_m$، که b_iها و c_iها تحویل‌ناپذیرند، آنگاه $n = m$ و c_iها را بتوان طوری تجدید شماره‌گذاری کرد که هر b_i و c_i وابسته باشند.

تعریف ۱.۱.۲۱. یک حلقه نرمال است هرگاه همه‌ی موضعی سازی‌های آن حوزه‌های به طور صحیح بسته باشند. یک حلقه‌ی نوتری نرمال است اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی حوزه‌ی به طور صحیح بسته باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. (۱) فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایدآل اول از R باشد. ارتفاع $\mathfrak{p}$ با $\operatorname{ht}\mathfrak{p}$ یا $\operatorname{height}\mathfrak{p}$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{ht}\mathfrak{p} = \sup\{n | \exists \mathfrak{p}_0, ..., \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R \quad : \quad \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset ... \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}.$$

(۲) فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایدآل از R باشد. ارتفاع $\mathfrak{a}$ به صورت زیر است:

$$\operatorname{ht}\mathfrak{a} = \min\{\operatorname{ht}\mathfrak{p} | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \quad , \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} = \min\{\operatorname{ht}\mathfrak{p} | \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})\},$$

که در آن $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \quad | \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. عنصر $a \in R$، M-منظم نامیده می‌شود هرگاه $a \notin Z(M)$. یک دنباله از عناصر $a_1, ..., a_n \in R$ دنباله‌ی M-منظم نامیده می‌شود هرگاه

(۱) $(a_1, ..., a_n)M \neq M$، و

(۲) برای $i = 1, ..., n$، $a_i \notin Z(M/(a_1, ..., a_n)M)$.

اگر همه‌ی a_iها متعلق به ایدآل a باشند، گوئیم $a_1, ..., a_n \in R$ یک دنباله‌ی M-منظم در a است. علاوه بر این، اگر $a_{n+1} \in a$ وجود نداشته باشد به طوری که a_1،...،a_n،a_{n+1} یک دنباله‌ی M-منظم باشد، آنگاه a_1،...،a_n دنباله‌ی M-منظم ماکزیمال در a نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم M یک مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی نوتری R و $\mathfrak{a}$ یک ایدآل از R باشد به طوری‌که $\mathfrak{a}M \neq M$. در این صورت طول دنباله‌ی M-منظم ماکزیمال در $\mathfrak{a}$ درجه‌ی $\mathfrak{a}$ روی M نامیده می‌شود و با $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, M)$ نمایش داده می‌شود. اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی باشد، آنگاه

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M) = \operatorname{depth} M.$$

همچنین $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M = \operatorname{grade}(\mathfrak{a}, M)$.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر باشد. گوئیم M مدول کوهن-مکالی است هرگاه $\operatorname{depth} M = \dim M$. اگر R یک R-مدول کوهن-مکالی باشد آنگاه R یک حلقه‌ی کوهن-مکالی نامیده می‌شود. اگر $\dim M = \dim R$، آنگاه M مدول کوهن-مکالی ماکزیمال نامیده می‌شود.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر یکدار باشد. R-جبر (یا جبر روی R) A، حلقه‌ای است که:

(۱) $(A, +)$ یک R-مدول یکانی است،

(۲) به ازای هر $r \in R$ و $a, b \in A$،

$$r(ab) = (ra)b = a(rb).$$

تعریف ۲۷.۱.۱. R-مدول راستی مثل M را یکدست می‌نامیم هرگاه تابعگون همورد $M \otimes_R -$ دقیق باشد؛ همچنین R-مدول چپی مثل N را یکدست می‌نامیم هرگاه تابعگون همورد $- \otimes_R N$ دقیق باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱. یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از حلقه‌ی R، زیر مجموعه‌ی S از R است به طوری‌که:

(۱) $1 \in S$،

(۲) اگر $s_1, s_2 \in S$ آنگاه $s_1 s_2 \in S$.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R\times S$ برای هر $(a,s),(b,t)\in R\times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a,s)\sim(b,t)\Longleftrightarrow \exists u\in S \quad : \quad u(at-bs)=\circ$$

به آسانی مشاهده می‌شود که رابطه‌ی $\sim$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

کلاس هم‌ارزی $(a,s)\in R\times S$ را با a/s نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم

$$S^{-1}R=\{a/s \quad | \quad a\in R, s\in S\}.$$

اگر S مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های ناصفر در R باشد، آنگاه $S^{-1}R$ حلقه تمام کسرهای R نامیده می‌شود.

تعریف ۳۰.۱.۱. مدول P روی حلقه‌ی R تصویری (پروژکتیو) نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر نمودار

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow f \\ A \xrightarrow{g} B \to \circ \end{array}$$

از همریختی‌های R-مدولی که سطر پایین آن دقیق باشد (یعنی، g برووریختی باشد)، یک همریختی R-مدولی مانند $h:P\to A$ وجود داشته باشد به طوری‌که نمودار

$$\begin{array}{c} P \\ h\swarrow\downarrow f \\ A \xrightarrow{g} B \to \circ \end{array}$$

تعویض‌پذیر باشد (یعنی، $gh = f$).

تعریف ۳۱.۱.۱. یک تجزیه‌ی تصویری از مدول M، دنباله‌ی دقیقی به صورت زیر است که در آن هر P_i مدول تصویری است؛

$$P : ... \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

تعریف ۳۲.۱.۱. بعد تصویری R-مدول M عبارتست از می‌نیمم مقادیر n، که M تجزیه‌ی تصویری به طول n داشته باشد.

گزاره ۳۳.۱.۱. *اگر I_1 و I_2 دو ایدآل از حلقه‌ی R باشند، آنگاه*

$$\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}.$$

نتیجه ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و I' و J' ایدآل‌هایی از R باشد. فرض کنیم I' روی ایدآل $I = (a_0, ..., a_{n-1})$ تولید شده با n عنصر و J' روی ایدآل $J = (b_0, ..., b_{m-1})$ تولید شده با m عنصر باشد. در این صورت $I'J'$ حداکثر با $n + m - 1$ عنصر تولید می‌شود.*

برهان. مرجع [۲۵، نتیجه ۱.۷.۶] را ببینید. □

تعریف ۳۵.۱.۱. یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر یکدار، حلقه‌ی هم‌مشخصه نامیده می‌شود هرگاه مشخصه‌ی حلقه برابر مشخصه‌ی میدان باقیمانده با هر ایدآل ماکزیمالی باشد.

تعریف ۳۶.۱.۱. مدول E روی حلقه‌ی R تزریقی (انژکتیو) است هرگاه به ازای هر نمودار

$$0 \rightarrow A \overset{g}{\rightarrow} B$$

$$\downarrow f$$

$$E$$

از همریختی‌های R-مدولی با سطر بالای دقیق (یعنی، g تکریختی باشد)، یک همریختی از R-مدول‌ها مانند $h : B \to E$ وجود داشته باشد به طوری‌که نمودار

$$\begin{array}{c} 0 \to A \overset{g}{\to} B \\ f \downarrow \swarrow h \\ E \end{array}$$

تعویض‌پذیر باشد (یعنی، $hg = f$).

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. مدول تزریقی E به طوری‌که $M \subset E$ یک توسیع اساسی باشد، پوشش تزریقی نامیده می‌شود و با نماد $E(M)$ یا $E_R(M)$ نشان داده می‌شود (توسیع اساسی به این معناست که اگر Kای بین E و M وجود داشته باشد به گونه‌ای که $M \cap K = 0$، آنگاه $K = 0$.).

تعریف ۳۸.۱.۱. حلقه‌ی R یک نقطه‌ی منفرد مجزا است (یا R یک نقطه ی منفرد مجزا دارد)، هرگاه مو ضعی‌سازی‌های $R_{\mathfrak{p}}$ برای هر ایدآل اول $\mathfrak{p}$ از R به جز ایدآل‌های ماکزیمال، حلقه‌های موضعی منظم باشند.

۲.۱ حد مستقیم

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی I، مجموعه‌ی جهت‌دار نامیده می‌شود هرگاه رابطه‌ی $\leq$ روی I وجود داشته باشد به طوری‌که:

(۱) I بازتابی باشد،

(۲) I ترایایی باشد،

(۳) برای جفت $i, j \in I$، یک $k \in I$ وجود داشته باشد به طوری‌که $i, j \leq k$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم I یک مجموعه‌ی جهت‌دار و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از R-مدول‌ها باشد. فرض کنیم برای هر زوج i و j که $i \leq j$ در I، R-همریختی $f_{ji} : M_i \to M_j$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

(۱) $f_{ii} : M_i \to M_i$ برای هر $i \in I$ همانی باشد،

(۲) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه $f_{kj} o f_{ji} = f_{ki}$.

در این صورت می‌گوییم R-مدول‌های M_i همراه با همریختی‌های f_{ji} تشکیل یک سیستم مستقیم می‌دهند که با (M_i, f_{ji}) نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. برای هر $i \in I$، فرض کنیم $\lambda_i : M_i \to \bigsqcup_{i\in I} M_i$، iامین نگاشت یک به یک باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{\longrightarrow} M_i = (\bigsqcup_{i\in I} M_i)/S,$$

که S زیر مدولی از $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ تولید شده توسط همه‌ی عناصر به شکل $\lambda_j f_{ji}(x_i) - \lambda_i x_i$ باشد، که $x_i \in M_i$ و $i \leq j$.