بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای مهدی فکروندلیل‌آبادی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۵۱۰۲۱ تحت عنوان: **«رده‌بندی برخی ابررویه‌های مستوی لورنتزی ۳- بعدی»** را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۱۱ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته **ریاضی محض (هندسه)** است که در سال **۱۳۹۱** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای **دکتر سید محمدباقر کاشانی،** مشاوره جناب آقای **دکتر عباس حیدری** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **مهدی فکروند لیل آبادی** دانشجوی رشته **ریاضی محض(هندسه)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **مهدی فکروند لیل آبادی**

تاریخ و امضا: **۹۱/۱۱/۱۴**

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب مهدی ملک‌وندلیل‌آبادی دانشجوی رشته ریاضی محض (هندسه) ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضاء: ملک‌وند

تاریخ: ۱۳۹۱/۱۱/۱۵

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (هندسه)

عنوان

رده بندی برخی ابررویه های مستوی لورنتزی ۳- بعدی

ارائه دهنده

مهدی فکروند

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقر کاشانی

استاد مشاور

دکتر عباس حیدری

بهمن ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

بهترین نعمت های عالم

پدر و مادرم

دو گوهر نایاب که از هیچ فداکاری برای من دریغ نمی کنند و نیکی به آنان بالاترین لذت زندگیم می باشد.

و تقدیم به

خواهران عزیزم و برادر بزرگوارم

که همواره مشوق و حامی من در مسیر تحصیل علم بودند.

قدردانی

حمد و سپاس خداوندی را سزاوار است که به انسان اندیشیدن و نوشتن را آموخت تا به یاری این نعمت راه سعادت را پیشه خود سازد.

ابتدا بر خود لازم میدانم که نهایت سپاس گزاری را از تمامی زحمات، تلاش ها و فداکاری‌های بی شمار کلیه اعضای خانواده ام، به ویژه پدر و مادر عزیزتر از جانم داشته باشم که همیشه تشویق ها، کمک ها و دعای خیر ایشان راهگشای من درطی مدارج علمی و کسب علم و معرفت بوده و همچنین کمال تقدیر و تشکر را از اساتید گرانقدر و بزرگوارم جناب آقای دکتر سیّد محمّد باقر کاشانی و جناب آقای دکتر عبّاس حیدری که زحمت راهنمایی و مشاوره پایان نامه اینجانب را به عهده داشتند، دارم.

فرصت را مغتنم می شمارم تا از استاد عزیزم جناب آقای دکتر سیّد رضا چاووش خاتمی نهایت تشکر و امتنان را داشته باشم که تشویق‌ها و راهنمایی‌های ایشان باعث انتخاب رشته ریاضی و بخصوص گرایش هندسه بود.

از جناب آقای دکتر بروجردیان که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را قبول کردند بی‌نهایت سپاس گزارم.

در پایان از تمامی تلاش ها و راهنمایی های دوستان عزیزم، به خصوص آقای داوود عبدی که در تایپ پایان نامه کمک زیادی را متقبل شدند وآقای حمیدرضا فصیحی که راهنمایی‌های ارزنده ای را در مورد برخی مفاهیم و تعریف های پایان نامه داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مهدی فکروند لیل آبادی

چکیده

در این پایان نامه ابررویه‌های مستوی لورنتزی در $\mathbb{R}^{n+1}$ با ۳ـفرم موازی (نسبت به هموستار لوی-چیویتای به دست آمده از متریک مستوی) بررسی می‌شود. در این بررسی یک رده‌بندی کامل از چنین ابررویه‌های ناتبهگون مستوی در $\mathbb{R}^4$ داده می‌شود، این پایان نامه به تشریح مطالب [٦] می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی:

ابررویه‌های مستوی لورنتزی، متریک مستوی، میدان برداری قاطع تک‌مدولی، ۳ـفرم موازی، هموستار لوی-چیویتا.

فهرست

پیش‌گفتار

در سال ۱۸۷۲، فلیکس کلاین در برنامه‌ی مشهور ارلانگن خود اعلام کرد که هندسه‌های مختلف را می‌توان با مطالعه‌ی ناورداهای گروههای مناسبی از تبدیل‌ها به دست آورد. کلاین برنامه‌ی خود را برای هندسه‌های مقدماتی بیان کرد، ولی در ابتدای قرن بیستم (سال ۱۹۱۲) تیتزه در سخنرانی خود در ICM، به برنامه‌ی ارلانگن از دیدگاه هندسه دیفرانسیل (مستوی) اشاره کرد و برای نخستین بار یکی از مهمترین رده از رویه‌ها در هندسه دیفرانسیل مستوی، که آن‌ها را Sـرویه‌ها (کره‌های مستوی) نامید، بررسی کرد. این مطالعه آغاز پیدایش هندسه دیفرانسیل مستوی رویه‌ها بود ([۱۶] را ببینید).

بررسی منظم و اصولی خم‌ها و رویه‌ها در فضای مستوی (تک مدولی) نخستین بار در سال ۱۹۱۶ توسط بلاشکه صورت گرفت، بلاشکه به همراه ریاضیدان‌های دیگری مانند کارتان، نوردن، بارتل، کلابی، نومیزو، رادون، پیک و بروالد به مطالعه‌ی جنبه‌های ساختاری این هندسه پرداختند([۶] را ببینید).

در ابتدا هدف و موضوع اصلی در هندسه دیفرانسیل مستوی، مطالعه‌ی ویژگی‌هایی از رویه‌ها در فضای مستوی ۳ـبعدی بود که نسبت به گروه تبدیل‌های مستوی (تک مدولی) ناورداست. این پژوهش‌ها به سرعت به ابررویه‌های nـبعدی در فضای مستوی $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 3)$ گسترش یافت.

نخستین تفاوت آشکار هندسه مستوی با هندسه ریمانی در این است که عنصر حجم یک خمینه در فضای مستوی بدون متریک تعریف می‌شود و در واقع در این هندسه عنصر حجم به نوعی نقش متریک را ایفا می‌کند. به همین دلیل تبدیل‌های مستوی تک مدولی نگه دارنده‌ی عنصر حجم (پس نگه دارنده‌ی جهت‌پذیری) است.

اساس کار در بررسی ابررویه‌های مستوی این است که فضای کلی $\mathbb{R}^{n+1}$ را یک فضای مستوی $(n+1)$ـبعدی مجهز به هموستار تخت ذاتی D و یک فرم حجم موازی ω (داده شده به وسیله‌ی نگاشت دترمینان) در نظر می‌گیرند. M یک خمینه‌ی هموار همبند با بعد $n \geq 2$ چنان که $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ یک فروبری ابررویه ناتبهگون به همراه یک میدان برداری قاطع

تک مدولی ξ بر M است. این میدان برداری قاطع ξ، هموستار مستوی ∇ و متریک شبه ریمانی h را بر M القا می‌کند که به آن متریک بلاشکه گویند. افزون بر آن $\hat{\nabla}$ هموستار لوی-چیویتای وابسته به متریک مستوی h است، یعنی $\hat{\nabla} h = 0$ و برای هر میدان برداری دلخواه Y و X بر M، $\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X = [X, Y]$. آنگاه تانسور تفاضل K به صورت $K(X,Y) \equiv K_X Y = \nabla_X Y - \hat{\nabla}_X Y$ معرفی می‌شود که ارتباط آن با ۳-فرم $C = \nabla h$، عبارت است از: $h(K(X,Y),Z) = -\frac{1}{2} C(X,Y,Z)$. قضیه‌ی مشهور پیک-بروالد، بیان می‌کند که صفر بودن ۳-فرم C، هم‌ارز این است که M به طور موضعی یک رویه‌ی درجه‌ی دوم ناتبهگون است (یعنی M قسمت بازی از یک رویه‌ی درجه‌ی دوم است).

مساله‌ی جالب و طبیعی که تاکنون در هندسه دیفرانسیل مستوی مساله‌ای حل نشده است، رده‌بندی ابررویه‌های مستوی ناتبهگون در $\mathbb{R}^{n+1}$ با ۳-فرم موازی ($\hat{\nabla} C = 0$) است. نخستین بار بوکان (در [۱]) نشان داد که چنین ابررویه‌هایی لزوماً کره‌های مستوی است، افزون بر آن قضیه‌ی ۲ از [۵] نشان می‌دهد هر ابررویه مستوی ناتبهگون در $\mathbb{R}^{n+1}$ با ۳-فرم موازی، کره مستوی موضعی همگن است.

پس از سالها تلاش پیوسته، دایلن، ورانکن و دیگران رده‌بندی چنین ابررویه‌هایی تا بعد $n \leq 7$ را (در [۲]،[۵] و [۹]) بدست آوردند و سرانجام در سال ۲۰۱۱، زی.هو، ورانکن و هایزونگ‌لی رده‌بندی کاملی از ابررویه‌های مستوی موضعی قوی-محدب در $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 2$) با ۳-فرم موازی را به دست آوردند، همچنین آنها در همان سال رده‌بندی کاملی برای ابررویه‌های مستوی لورنتزی با ۳-فرم موازی با بعد $n \geq 2$، (در [۸]) بدست آوردند. در این پایان نامه حالت $n = 3$ بررسی می‌شود، پس از آن از ترکیب قضیه‌ی اصلی پایان نامه با قضیه‌ی اصلی [۲]، رده‌بندی کاملی برای ابررویه‌های مستوی ناتبهگون با ۳-فرم موازی در $\mathbb{R}^4$ بیان می‌شود.

در فصل اول پایان نامه، ابتدا پیش‌نیازها با بهره بردن از [۱۸ ،۱۳] داده می‌شود. در فصل دوم مفهوم فروبری‌ها و ابررویه‌های مستوی (تک مدولی) معرفی می‌شود. در فصل سوم برخی از مهمترین رویه‌های مستوی معرفی می‌شود که نقش اساسی در رده‌بندی رویه‌های ناتبهگون مستوی دارند. در فصل چهارم برخی از مهم ترین رده‌بندی های صورت گرفته در هندسه دیفرانسیل مستوی برای ابررویه‌ها با شرط‌های مناسب بررسی می‌شود ([۱۰ ،۹ ،۸ ،۷ ،۶ ،۵ ،۲]). بیشتر مطالب این پایان نامه از مرجع‌های [۱]، [۲]، [۶] و [۱۶] برداشته شده است.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل پیش نیازها با بهره بردن از مرجع‌های [۱۳] و [۱۸] بیان می‌شود.

۱.۱ خمینه‌های شبه ریمانی و طولپایی‌ها

تعریف ۱.۱.۱ یک تانسور متریک g بر خمینه هموار M، عبارت است از یک میدان تانسوری نوع $(۰,۲)$ متقارن و ناتبهگون با اندیس ثابت.

به ازای هر $p \in M$، $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ یک ضرب اسکالر بر فضای مماس T_pM است که به ازای همه $p \in M$ ها اندیس این ضرب‌های اسکالر ثابت است.

تعریف ۲.۱.۱ یک خمینه شبه ریمانی، عبارت است از یک خمینه هموار همراه با یک تانسور متریک. اگر اندیس متریک صفر باشد، خمینه ریمانی نامیده می‌شود و اگر بعد خمینه $n \geq ۲$ باشد و $\nu = ۱$ (اندیس متریک)، خمینه را لورنتزی نامند.

اگر $x = (x^۱, \ldots, x^n)$ یک دستگاه مختصات موضعی بر همسایگی باز $U \subseteq M$ باشند، مقدار متریک g بر هر جفت از میدان‌های برداری $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ که $X = \sum_i X^i \partial_i$ و

$Y = \sum_j Y^j \partial_j$ چنین است

$$g(X,Y) = g(\sum_i X^i \partial_i, \sum_j Y^j \partial_j) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j \qquad (\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$$

و $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$.

چون g ناتبهگون است در هر نقطه‌ی $p \in U$، ماتریس $(g_{ij}(p))$ وارون‌پذیر است و وارون آن را با $(g^{ij}(p))$ نمایش می‌دهند. افزون بر آن چون g متقارن است g^{-1} نیز متقارن است و g را می‌توان نسبت به دستگاه مختصات موضعی بالا به شکل $g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ نمایش داد.

یکریختی طبیعی (کانونی) خطی بین $\mathbb{R}^n$ و $T_p\mathbb{R}^n$ که هر $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ را به $\mathrm{v}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ می‌نگارد، ضرب داخلی بر $\mathbb{R}^n$ را به یک متریک تانسوری بر $\mathbb{R}^n$ گسترش می‌دهد که آن را با نماد $\langle , \rangle$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$v_p = \sum_i v^i \partial_i|_p \qquad \langle v_p, w_p \rangle = v.w = \sum_i v^i w^i$$
$$w_p = \sum_i w^i \partial_i|_p$$

پس $\mathbb{R}^n$ یک خمینه ریمانی است. به طور مشابه با تعریف متریک تانسور به صورت پایین، $\mathbb{R}^n_v$ یک خمینه شبه ریمانی است.

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{v} v^i w^i + \sum_{j=v+1}^{n} v^j w^j \qquad (0 \leq v \leq n)$$

اگر $n \geq 2$ و $\nu = 1$ باشد، $\mathbb{R}^n_1$ یک خمینه لورنتزی است که به آن فضای مینکوفسکی nـبعدی گویند. در حالت $n = 4$، $\mathbb{R}^4_1$ ساده‌ترین نمونه برای فضا_زمان نسبیتی است.

تعریف ۳.۱.۱ بردار مماس $v \in T_pM$ در یک نقطه $p \in M$ که (M,g) خمینه شبه ریمانی است، فضاگون نامیده می‌شود هرگاه $v = 0$ یا $g(v,v) > 0$، پوچ نامیده می‌شود هرگاه $v \neq 0$ و $g(v,v) = 0$ و زمان‌گون نامیده می‌شود، هرگاه $g(v,v) < 0$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید M و N خمینه‌های شبه ریمانی به ترتیب با متریک‌های g_M و g_N باشد. یک طولپایی از M به N، عبارت است از یک وابرسانی $\phi : M \to N$ که متریک‌ها را نگه می‌دارد یعنی $\phi^*(g_N) = g_M$.

چون ϕ وابرسانی است، نگاشت $d\phi_p$ یکریختی است و به ازای هر $v,w \in T_pM$، $p \in M$، $\langle d\phi(v), d\phi(w)\rangle = \langle v,w\rangle$ که $\langle,\rangle$ همان متریک است. بنابراین به ازای هر $p \in M$، $d\phi_p$ خطی-طولپایی است.

تعریف ۵.۱.۱ یک هموستار مستوی ∇ بر خمینه M نگاشت $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ است که:

۱) ∇ نسبت به مؤلفه‌ی اول $C^\infty(M)$-خطی است.

۲) ∇ نسبت به مؤلفه‌ی دوم $\mathbb{R}$-خطی است.

۳) به ازای هر $f \in C^\infty(M)$ و هر $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$، $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$، $\nabla_X Y$ را مشتق هموردای Y نسبت X گویند.

گزاره ۶.۱.۱ ([۱۸]). بر خمینه شبه ریمانی (M,g)، هموستار یکتای ∇ موجود است که
۴) $[Y,Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y$
۵) به ازای هر $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$، $X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

هموستار ∇ در گزاره‌ی بالا را هموستار لوی-چیویتا نامند و در فرمول کزول صدق می‌کند یعنی

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X.g(Y,Z) + Y.g(Z,X) - Z.g(X,Y) - g(X,[Y,Z]) \\ &\quad + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $\{x^1,\dots,x^n\}$ یک دستگاه مختصات بر همسایگی U از خمینه شبه ریمانی (M,g) باشد. ضریب‌های کریستوفل هموستار لوی-چیویتای ∇ نسبت به این دستگاه مختصات موضعی، نگاشت‌های حقیقی Γ_{ij}^k بر U است که

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k\,\partial_k \qquad (1 \le i,j \le n)$$

چون $[\partial_i, \partial_j] = ۰$، بنابراین از رابطه‌ی (۴) در گزاره‌ی ٦.۳.۱ نتیجه می‌شود $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$ در نتیجه $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. همچنین از گزاره‌ی ۳.۱۳ در [۱۸] نتیجه می‌شود $\Gamma_{ij}^k = \frac{۱}{۲}\sum_m g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right\}$.

لم ۸.۱.۱ ([۱۸]). هموستار طبیعی فضای شبه اقلیدسی $\mathbb{R}_v^n$، یک هموستار لوی-چیویتاست که نسبت به مختصات طبیعی $\mathbb{R}_v^n$ داریم:

$$(۱)\ g_{ij} = \delta_{ij}\,\varepsilon_j$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -۱ & ۱ \leq j \leq v \\ ۱ & v+۱ \leq j \leq n \end{cases}$$

$$(۲)\ \Gamma_{ij}^k = ۰$$

به ازای هر $۱ \leq i, j, k \leq n$ و هر $۰ \leq v \leq n$.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید (M, g) یک خمینه شبه ریمانی باشد، میدان برداری $Y \in \mathfrak{X}(M)$ را موازی گویند هرگاه به ازای هر $X \in \mathfrak{X}(M)$، $\nabla_X Y = ۰$ (∇ هموستار لوی-چیویتای M است).

بنابر لم بالا ضریب‌های کریستوفل نسبت به دستگاه مختصات طبیعی $\mathbb{R}_v^n$ صفر است، بنابراین میدان‌های برداری مختصاتی طبیعی $\mathbb{R}_v^n$ موازی است.

تعریف ۱۰.۱.۱ دیفرانسیل هموردای یک میدان تانسوری A از نوع (r, s) بر خمینه M، عبارت است از میدان تانسوری A از نوع $(r, s+۱)$ که

$$(DA)(\theta^۱, \ldots, \theta^r, X_۱, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^۱, \ldots, \theta^r, X_۱, \ldots, X_s)$$

برای $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ و هر $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$، که $D_V A$ مشتق هموردای A نسبت به V است.

تعریف ۱۱.۱.۱ میدان تانسوری A از نوع (r, s) بر خمینه M را موازی گویند هرگاه دیفرانسیل هموردای آن صفر باشد، یعنی $DA = ۰$ یعنی برای هر $X \in \mathfrak{X}(M)$، $D_X A = ۰$.

گزاره ۱۲.۱.۱ ([۱۸]). برای یک خم $\alpha : I \to M$، فرض کنیم $a \in I$ و $z \in T_{\alpha(a)}(M)$، آن‌گاه یک میدان برداری یکتای موازی Z در امتداد خم α موجود است که $Z(a) = z$.

تعریف ۱۳.۱.۱ با فرض‌های گزاره‌ی بالا، اگر $b \in I$، آن‌گاه نگاشت

$$\begin{aligned} p = p_a^b(\alpha) : T_p(M) &\to T_q(M) \\ z &\mapsto Z(b) \end{aligned}$$

را انتقال موازی در امتداد خم α از نقطه‌ی $p = \alpha(a)$ به $q = \alpha(b)$ نامند.

لم ۱۴.۱.۱ ([۱۸]). انتقال موازی نگاشت خطی-طولپایی است.

۲.۱ تانسور خمیدگی ریمانی

در این بخش به معرفی خمیدگی‌ها، از جمله تانسور خمیدگی ریمانی، خمیدگی برشی، خمیدگی میانگین، خمیدگی ریچی و خمیدگی اسکالر می‌پردازیم. بیشتر مطالب این بخش از مرجع [۱۸] گرفته شده است.

تعریف ۱.۲.۱ ([۱۸]). فرض کنید (M, g) یک خمینه شبه ریمانی با هموستار لوی-چیویتای ∇، نگاشت $R : \mathfrak{X}^{3}(M) \to \mathfrak{X}(M)$، یک میدان تانسوری نوع $(1,3)$ بر M است که به آن تانسور خمیدگی ریمانی خمینه M گویند و چنین تعریف می‌شود

$$\forall\, X, Y, Z \in (M);\ \ R_{XY}Z = R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

لم ۲.۲.۱ ([۱۸]). بر یک همسایگی مختصاتی، با دستگاه مختصات $\{x^1, \ldots, x^n\}$، داریم

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R^i_{jkl}\, \partial_i$$

که مؤلفه‌های R چنین است.

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

فرض کنید $\Pi = \mathrm{span}\{v, w\}$ یک زیرفضای دوبعدی ناتبهگون T_pM $(p \in M)$ باشد که به آن صفحه‌ی مماس بر M در نقطه‌ی $p \in M$ گویند. تابع حقیقی پایین را بگیرید

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

بنابر لم ۹—۲ از [۱۸]، صفحه‌ی مماس Π ناتبهگون است اگر و تنها اگر $Q(v, w) \neq 0$.

لم ۳.۲.۱ ([۱۸]). فرض کنید Π یک صفحه‌ی مماس ناتبهگون در نقطه‌ی $p \in M$ باشد، عدد حقیقی

$$K(\Pi) = K(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v, w)}$$

ناوابسته به پایه‌ی $\{w, v\}$ است و به آن خمیدگی برشی M نسبت به Π گویند.

گزاره ۴.۲.۱ ([۱۸]). اگر در یک نقطه‌ی $p \in M$، $K = 0$ آن‌گاه در $p \in M$، $R = 0$.

تعریف ۵.۲.۱ ([۱۸]). خمینه‌ی شبه ریمانی M را تخت نامند هرگاه تانسور خمیدگی ریمانی آن، R در هر نقطه صفر باشد.

بنابر گزاره‌ی بالا M تخت است اگر و تنها اگر خمیدگی برشی M، متحد با صفر باشد. برای نمونه هر فضای شبه اقلیدسی $\mathbb{R}^n_v$، یک خمینه شبه ریمانی تخت است.

تعریف ۶.۲.۱ ([۱۸]). خمینه شبه ریمانی M، دارای خمیدگی ثابت است اگر خمیدگی برشی آن ثابت باشد.

برای نمونه خمینه‌های شبه ریمانی $S_v^n(r)$، $H_v^n(r)$ و $\mathbb{R}_v^n(r)$ دارای خمیدگی‌های ثابت به ترتیب $\frac{1}{r^2}$، $-\frac{1}{r^2}$ و 0 است، $r \neq 0$.

نتیجه ۷.۲.۱ ([۱۸]). اگر خمینه شبه ریمانی M دارای خمیدگی ثابت C باشد، آن‌گاه به ازای هر $x, y, z \in T_pM$،

$$R(x,y)z = R_{xy}z = C\{\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x\}$$

تعریف ۸.۲.۱ ([۱۸]). خمیدگی ریچی خمینه‌ی شبه ریمانی (M,g) که با Ric نشان می‌دهند عبارت است از انقباض تانسور خمیدگی ریمانی R یعنی $\mathrm{Ric} = C_3^1(R)$.

مؤلفه‌های خمیدگی ریچی نسبت به یک دستگاه مختصات به صورت $\mathrm{Ric}(\partial_i, \partial_j) = \sum_m R_{ijm}^m$ است و نمایش آن نسبت به یک میدان کنجی $\{E_i\}_{i=1}^n$، چنین است.

$$\forall\, X, Y \in (M);\ \mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m}Y, E_m\rangle$$

که $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m\rangle$.

یادآوری ۹.۲.۱ به سادگی می‌توان نشان داد

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \mapsto R_{ZX}Y\}$$

تعریف ۱۰.۲.۱ ([۱۸]). خمیدگی اسکالر خمینه‌ی شبه ریمانی (M,g) که آن را با نماد S نشان می‌دهند عبارت است از $C(\mathrm{Ric})$ و در یک دستگاه مختصات موضعی، نمایش آن چنین است.

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum g^{ij} R^{k}_{ijk}$$

تعریف ۱۱.۲.۱ ([۱۸]). وابرسانی $\varphi : M \to N$ را که $(M, g_{_M})$ و $(N, g_{_N})$ خمینه‌های شبه ریمانی است، یک تجانس با ضریب C گویند هرگاه $\varphi^*(g_{_N}) = Cg_{_M}$ (φ^* همان برگردان بدست آمده از وابرسانی φ است). اگر $c = ۱$ باشد φ یک طولپایی است و اگر $c = -۱$ باشد φ را پادطولپایی گویند.

لم ۱۲.۲.۱ ([۱۸]). تجانس، هموستار لوی-چیویتا را نگه می‌دارد.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید V یک فضای ضرب اسکالر با بعد n باشد، آن‌گاه یک فرم حجم V عبارت است از یک نگاشت n-خطی متناوب ناصفر

$$\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$
$$(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \mapsto \omega(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \quad \forall \alpha_i \in V, \quad ۱ \leq i \leq n$$

که مقدار آن را بر هر n-تایی از بردارهای V، می‌توان حجم متوازی‌السطوح بدست آمده از این بردارها نامید.

تعریف ۱۴.۲.۱ یک عنصر حجم بر خمینه شبه ریمانی (M^n, g)، یک n-فرم (همه‌جا ناصفر) هموار است.

عنصر حجم بر دامنه هر دستگاه مختصاتی (x, U) هموار موجود و به صورت $\sqrt{|\det[g_{ij}]|} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^۱}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ است که $\omega = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}\, dx^۱ \wedge \ldots \wedge dx^n$، $x = (x^۱, \ldots, x^n)$.